eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

TAREA 4

EJERCICIOS[1]

Puedes a tu elección trabajar en R, S-PLUS ó MATLAB.

1. Considera la función

$$f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - \frac{x}{2}.$$

La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución y signos opuestos en los extremos del intervalo $[1, 3]$. Explota este hecho para encontrar dicha solución haciendo uso del método de bisección.

2. *(probabilidad de extinción en un proceso de ramificación vía iteración funcional)* Definamos como extinción de un linaje la no existencia de varones que lleven un apellido en primera posición. Entonces, un varón ve extinguirse su linaje si no tiene hijos varones o si tiene uno y esa línea sucesoria se extingue, o tiene dos y ambas líneas se extinguen... o tiene n y todas las n líneas sucesorias se extinguen. Supongamos que las probabilidades de $0, 1, \ldots, 10$ hijos varones fueran:

```
> dpois(0:10,1.3)
 [1] 2.725318e-01 3.542913e-01 2.302894e-01 9.979206e-02 3.243242e-02
 [6] 8.432429e-03 1.827026e-03 3.393049e-04 5.513704e-05 7.964239e-06
[11] 1.035351e-06
```

(probabilidades en una Poisson con $\lambda = 1.3$ de $0, \ldots, 10$ hijos[2]). Si llamamos x a la probabilidad de que el linaje de un varón se extinga, de la discusión anterior se deduce que dicha probabilidad verifica[3]

$$x = 0.2725318 + 0.3542913x + 0.2302894x^2 + \ldots + 1.035351 \times 10^{-6}x^{10}$$

Calcula la probabilidad de extinción mediante iteración funcional.

3. Emplea la regla de Newton para resolver cualquiera de los dos problemas anteriores. Observa la mucha mayor velocidad de convergencia (en número de iteraciones) partiendo de una misma solución inicial, con tal de que dicha solución inicial sea "decente".

[1] Copia de estos enunciados y, en general, de todo el material escrito repartido en clase, está disponible en `http://etdx01.bs.ehu.es`.

[2] Observa que las probabilidades anteriores suman casi exactamente 1, dado que los términos omitidos —once y más hijos varones— tienen probabilidad en su conjunto despreciable

[3] En palabras: la probabilidad de extinción es la probabilidad de que no haya hijo varón, o de que un único hijo varón no tenga descendencia masculina, o de que dos únicos hijos varones, etc.

AYUDAS, SUGERENCIAS Y COMPLEMENTOS

1. En general, antes de intentar resolver una ecuación como $f(x) = 0$ te interesará ver el comportamiento de la función $f(x)$ en el intervalo relevante. En el caso del ejercicio 1 podrías (en R) emplear una instrucción como

   ```
   curve(x*sin(x)-.5*x,from=1,to=3,n=100)
   ```

   para tener una idea del número y localización de las raíces de $f(x)$.

2. Puedes emplear la regla de Horner para evaluar un polinomio como (2), pero no es realmente necesario: puedes obtener los coeficientes mediante

   ```
   > h <- dpois(0:10,1)
   ```

   y a continuación definir el lado derecho como:

   ```
   sum(h*x^(0:10))
   ```

   Expresiones análogas en MATLAB.

3. Ahora que lo sabes hacer, no es preciso que lo hagas nunca más: tienes funciones que lo hacen por ti. En R, dispones entre otras de `uniroot` que busca una raíz en un intervalo y `polyroot`, que busca todas las raíces (posiblemente complejas) de un polinomio. Observa además que cualquier función que haga minimización puede indirectamente utilizarse para resolver la ecuación $f(x) = 0$ si proponemos como objetivo a minimizar $[f(x)]^2$, aunque funciones especializadas serán ordinariamente más eficaces.

4. El algoritmo de Newton requiere hacer uso de derivadas. Podemos calcularlas "a mano" o hacer uso de las capacidades de derivación simbólicas de R (pobres: véase las funciones `deriv` y `deriv3`), algo más extensas de MATLAB o de un programa especializado como MATHEMATICA. Si seguimos esta última vía, podemos hacer todo el trabajo con él o habremos de "empalmar" el resultado en nuestra función en R o MATLAB.

   Esta última operación resulta facilitada porque podemos exportar fórmulas generadas por MATHEMATICA a notación C o FORTRAN (también a TEX, si deseáramos incluirlas en un documento): Véase [4], pág. 182 en relación con este último punto.

References

[1] G. Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[2] K. Lange. *Numerical Analysis for Statisticians*. Springer, 1998. Signatura: 519.6 LAN.

[3] R.A. Thisted. *Elements of Statistical Computing*. Chapman & Hall, New York, 1988.

[4] S. Wolfram. *Mathematica: A System for doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley, 1991.