eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

TAREA 2

EJERCICIOS

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple procedente de una distribución con densidad

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x > \theta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Encuentra un estadístico suficiente para el parámetro θ.

2. Sea un experimento binario con probabilidad de éxito θ en el cual se han obtenido R "éxitos" en m intentos (m fijo y establecido de antemano). Adicionalmente, se realizan N intentos adicionales hasta lograr s "éxitos" adicionales. (Nótese que ahora N es aleatorio porque hemos fijado s.)

   Considerando la función $U(R,N) = R/m - (s-1)/(N-1)$, muéstrese que (R,N) son conjuntamente suficientes para θ, pero no forman un estadístico completo.

3. Considera una distribución cuya función de densidad es

$$f_X(x;\theta) = \theta^{-1} x \exp\left\{-x^2/2\theta\right\},$$

   con $\theta > 0$ y para $x \in [0,\infty)$. Procedente de dicha distribución cuentas con una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ formada por n observaciones.

   a) Utilizando el teorema de factorización, o de otro modo, encuentra un estadístico suficiente para θ.

   b) El estadístico suficiente encontrado en (3*a*) ¿Es mínimo?

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple procedente de una distribución de Laplace con densidad

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

   a) Encuentra un estadístico suficiente para el parámetro θ.

   b) Encuentra el estimador máximo-verosímil de θ. (Observa: este es un caso en que el estimador MV no es único.)

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple procedente de una distribución con densidad

$$f_X(x;\theta) = \theta^{-1} e^{-x/\theta} \qquad (x > 0, \theta > 0)$$

   Considera los siguientes estimadores de θ:

a) $T_1 = \sum_i X_i/n$;

b) $T_2 = \sum_i X_i/(n+1)$;

c) $T_3 = n \min(X_1, \ldots, X_n)$.

¿Cuáles de ellos son funciones de un estadístico suficiente? ¿Cuáles de ellos son además insesgados? ¿Máximo verosímiles?

6. Como se mencionó en clase, es preciso tener presente que la noción de suficiencia *es siempre relativa a una familia de distribuciones*. Un estadístico suficiente para un parámetro en una familia puede no serlo para el parámetro análogo en otra. Lo que sigue tiene por objeto ilustrarlo.

   a) Genera cien muestras de: i) Doscientas una observaciones $N(\theta, \sigma = 1)$ y ii) Doscientas observaciones con distribución de Cauchy y parámetro de ubicación θ (escoge el valor de θ que desees).

   b) Para cada una de las cien muestras y de las dos distribuciones consideradas computa $\overline{X}$ y la mediana.

   c) Para cada una de las dos distribuciones, computa el promedio de $\overline{X}$ y mediana y su error cuadrático promedio.

   Deberías observar que $\overline{X}$ es mejor estimador que la mediana en el caso de la normal —es lógico, puesto que la mediana no es suficiente—. Lo contrario debe ocurrir en el caso de la Cauchy.

   Observa que los dos tipos de distribuciones serían bastante difíciles de distinguir, incluso con doscientas una observaciones. El apresurarse a hacer uso del concepto de suficiencia puede hacernos perder información si no estamos ante la distribución que imaginamos.

Lectura recomendada. Todos los manuales que se citan a continuación son de interés: [1], [3], [5], [7], [8] y, sobre Teoría de la Decisión, [2]. Hay problemas resueltos en todos ellos y en [6], [9] y [4]. Algunos de los problemas anteriores provienen de [7], que tiene también bastantes ejemplos.

Para la simulación en el último ejercicio puedes valerte de un simple bucle en S-PLUS (o en R) y de las funciones `rnorm` y `rcauchy`.

Referencias

[1] P. J. Bickel and K. A. Doksum. *Mathematical Statistics*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1977.

[2] H. Chernoff and L. E. Moses. *Elementary Decision Theory*. Wiley, New York, 1967 edition, 1959.

[3] D. R. Cox and D. V. Hinkley. *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London, 1979 edition, 1974.

[4] D. R. Cox and D. V. Hinkley. *Problems and Solutions in Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London, 1980 edition, 1980.

[5] E.J. Dudewicz and S.N. Mishra. *Modern Mathematical Statistics*. Wiley, 1988.

[6] A. Garín and F. Tusell. *Problemas de Probabilidad e Inferencia Estadística*. Ed. Tébar-Flores, Madrid, 1991.

[7] P.H. Garthwaite, I.T. Jolliffe, and B. Jones. *Statistical Inference*. Prentice Hall, London, 1995.

[8] E. L. Lehmann. *Theory of Point Estimation*. Wiley, New York, 1983.

[9] J. P. Romano and A. F. Siegel. *Counterexamples in Probability and Statistics*. Wadsworth and Brooks/Cole, Monterrey, California, 1986.