eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

TAREA 1

EJERCICIOS

1. *(examen Junio 1998)* Sabemos que una moneda puede ser de uno de dos posibles tipos. El primer tipo da “cara” (1) con probabilidad $\frac{1}{2}$. El segundo tipo da “cara” con probabilidad $\frac{1}{3}$. Nos proporcionan una moneda, y nos hemos de pronunciar sobre el tipo. Podemos lanzarla una vez.

   Si no acertamos el tipo de moneda, perdemos una unidad. Si acertamos, no perdemos nada.

   a) Describe el problema en términos de Teoría de la Decisión, especificando en particular: i) El conjunto de estados de la Naturaleza; ii) El experimento; iii) El espacio muestral; iv) El conjunto de decisiones; v) La función de pérdida.

   b) Llamamos d_0 a la decisión: “la moneda tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de dar cara”, y d_1 a la decisión “la moneda tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ de dar cara”. Considera los siguientes cuatro procedimientos no aleatorizados:

$$\begin{aligned}
\delta_1(0) &= \delta_1(1) = d_0;\\
\delta_2(0) &= \delta_2(1) = d_1;\\
\delta_3(0) &= d_1 \quad ; \quad \delta_3(1) = d_0;\\
\delta_4(0) &= d_0 \quad ; \quad \delta_4(1) = d_1.
\end{aligned}$$

   Calcula la función de riesgo de cada uno de los cuatro procedimientos.

   c) Utiliza los resultados en el apartado anterior para determinar cuáles de los cuatro anteriores procedimientos son:

   1) Admisibles.
   2) Bayes respecto de la distribución *a priori* $\xi(\frac{1}{3}) = 1 - \xi(\frac{1}{2}) = 0{,}1$.
   3) Bayes respecto de la distribución *a priori* $\xi(\frac{1}{3}) = 1 - \xi(\frac{1}{2}) = 0{,}6$.

   d) El procedimiento que has hallado ser Bayes en (1c2), ¿lo seguiría siendo para otras distribuciones *a priori*? ¿Para cuáles?

2. Supón que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria simple procedente de una distribución de Poisson con parámetro θ desconocido.

   a) Escribe la función de verosimilitud asociada a la muestra. ¿Cuál sería el estimador máximo verosímil (= el que hubieras probablemente empleado en Estadística II)?

   b) Busca una distribución *a priori* conjugada. ¿Cuál es entonces la distribución a posteriori?

c) Obtén la media y varianza de la distribución a priori y la media y varianza de la distribución a posteriori.

d) Si la función de pérdida fuera cuadrática, ¿cual sería el procedimiento de Bayes para estimar θ? Compara con el estimador máximo verosímil, y comprueba que la información a priori influye del modo esperado.

e) De entre la familia de distribuciones a priori conjugadas que has encontrado más arriba, selecciona una que recogiera la creencia de que $\theta \approx 1$ con gran convencimiento.

f) Idem. selecciona una que recoja gran ignorancia a priori.

3. Considera de nuevo la situación muy simple, empleada como ejemplo en clase, en que:

$$\Theta = \{\theta_1(= \text{“Petróleo”}), \theta_2(= \text{“No petróleo”})\} \quad (1)$$
$$D = \{d_1(= \text{“Perforar”}), d_2(= \text{“No perforar”})\}. \quad (2)$$

Poedmos observar la variable aleatoria X, resultado de un sondeo, que proporciona valores $X = 0$ (“No sale gas”) o $X = 1$ (“Sale gas”). Las probabilidades respectivas de que ello acontezca en los dos estados de la naturaleza considerados son:

Cuadro 1: Distribución $f_{X|\theta}(x|\theta)$ de los resultados de un sondeo en diferentes estados

	“No sale gas” $(X = 0)$	“Sale gas” $(X = 1)$
θ_1 (“Hay petróleo”)	0.20	0.80
θ_2 (“No hay petróleo”)	0.70	0.30

Supongamos que la distribución *a priori* fuera $\xi(\theta_1) = 0{,}20$, $\xi(\theta_2) = 0{,}80$ y la función de pérdida:

Cuadro 2: Función de pérdida $L(\theta, d)$ para cada decisión y estado.

	“Perforar” d_1	“No perforar” d_2
θ_1 (“Hay petróleo”)	-1000	10
θ_2 (“No hay petróleo”)	300	10

Hay cuatro procedimientos estadísticos posibles, resultado de combinar de todas las maneras posibles las dos decisiones con los dos posibles resultados del sondeo.

a) Calcula los riesgos de Bayes de todos ellos, y dí cuál es el procedimiento de Bayes relativo a la distribución *a priori* especificada.

b) Calcula los riesgos de Bayes de las dos decisiones d_1, d_2, es decir, los riesgos de Bayes sin hacer uso de X. ¿Cuál es la decisión de Bayes?

c) ¿Cuál es el valor esperado del sondeo? En otras palabras, ¿cuanto estaríamos dispuestos a gastar en hacer el sondeo?

4. *(contraste de una hipótesis simple frente a una alternativa, desde el punto de vista de la Teoría de la Decisión)* Considera la situación en que el conjunto de estados se reduce a dos, $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, y el de decisiones también a dos: $D = \{d_0, d_1\}$. Puedes interpretar esta situación como la de un contraste de hipótesis muy simple, en que hubieras de aceptar o rechazar una hipótesis: θ_0 sería el valor de un parámetro bajo H_0 y θ_1 la única alternativa posible.

Puedes observar una variable aleatoria X cuya función de probabilidad bajo los respectivos estados es $f_{X|\theta}(x|\theta_i)$, $i = 1, 2$.

Si la función de pérdida es

$$L(\theta_i, d_j) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } i = j \\ \ell_{ij} & \text{cuando } i \neq j, \end{cases} \tag{3}$$

muestra que para cualquier distribución *a priori* $\eta(\theta)$ los procedimientos de Bayes no aleatorizados son de la forma

$$\begin{array}{cl} d_0 & \text{si } f_{X|\theta_0}(x|\theta_0) > C f_{X|\theta_1}(x|\theta_1) \\ d_1 & \text{si } f_{X|\theta_0}(x|\theta_0) < C f_{X|\theta_1}(x|\theta_1) \\ d_0 \text{ ó } d_1 & \text{si } f_{X|\theta_0}(x|\theta_0) = C f_{X|\theta_1}(x|\theta_1), \end{array} \tag{4}$$

en que C es alguna constante.

a) ¿Cómo depende C de la distribución *a priori*?

b) ¿Cómo depende C de $L(\theta, d)$?

c) Explica que relación tiene esto con el teorema de Neyman-Pearson.

Observaciones, ayudas, comentarios.

1. La densidad de una v.a. con distribución $\gamma(a, r)$ es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-ax} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases} \tag{5}$$

puedes obtener sus momentos o consultarlos en cualquier manual (ej.: [6]).

Lectura recomendada. Hay una magnífica introducción elemental a la Teoría de la Decisión en [1]. También te puede interesar [4]. y el manual [5], que tiene un capítulo (el 11) sobre teoria de la decisión.

De nivel matemático mayor es el capítulo 11 de [2]. Una monografía especializada es [3], de nivel muy superior al del curso.

Referencias

[1] H. Chernoff and L. E. Moses. *Elementary Decision Theory*. Wiley, New York, 1967 edition, 1959.

[2] D. R. Cox and D. V. Hinkley. *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London, 1979 edition, 1974.

[3] T. S. Ferguson. *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*. Academic Press, New York, 1967.

[4] J. C. Kiefer. *Introduction to Statistical Inference*. Springer-Verlag, New York, 1987 edition, 1983. (ed. Gary Lorden).

[5] D. Peña. *Fundamentos de Estadística*. Alianza Editorial, 2001.

[6] A. Fz. Trocóniz. *Probabilidades. Estadística. Muestreo.* Tebar-Flores, Madrid, 1987.