eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

TAREA 6

EJERCICIOS

Esta tarea tiene por objeto familiarizarte con algunos resultados simples sobre convergencia estocástica, que surgen de continuo en problemas y demostraciones. Te serán de utilidad textos de Probabilidad y libros de Estadística como [1] o [2].

1. Demuestra que si $X_n \xrightarrow{p} X$ e $Y_n \xrightarrow{p} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$. (Ayuda: Todo lo que tienes que comprobar es que si X_n e Y_n puede lograrse que estén con gran probabilidad en las cercanías de X e Y respectivamente, entonces su suma está con gran probabilidad en las cercanías de X e Y.)

    De forma sustancialmente similar, aunque un poco más tediosa, podrías comprobar que $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$ o $X_n/Y_n \xrightarrow{p} X/Y$, con la condición añadida, en este último caso, de que el límite en probabilidad de Y_n no sea cero.

2. Considera una sucesión de variables aleatorias independientes cuyo término genérico X_n tiene la siguiente distribución:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1 - \frac{1}{n} \\ n & \text{con probabilidad } \frac{1}{n} \end{cases} \tag{1}$$

    a) ¿Converge en probabilidad a álguna constante? En su caso, ¿a cuál?

    b) ¿Convergen los valores medios de las X_n a algo? ¿A qué?

3. Considera una sucesión de v.a. tal que $X_n \xrightarrow{p} X$.

    a) ¿Se verifica que $E[f(X_n)] \longrightarrow E[f(X)]$? ¿Siempre? (Ayuda: el ejercicio anterior puede iluminarte a este respecto.)

    b) ¿Qué condiciones añadidas bastarían para garantizar que $f(X_n) \xrightarrow{p} f(X)$?

4. Sea $F_X^*(x)$ la función de distribución empírica (una función escalonada, con saltos de $\frac{k}{n}$ para cada valor muestral que se repite k veces). Haz uso de una ley débil de grandes números para demostrar (es trivial) que $F_X^*(x) \xrightarrow{p} F_X(x)$ en todo punto de continuidad de la última. (Observa que existen resultados más potentes, como $\sup |F_X^*(x) - F_X(x)| \xrightarrow{p} 0$, aunque ya no tan simples de obtener.)

5. En clase comprobamos que $X_{(n)}$ (el mayor de los estadísticos de orden) es suficiente y estimador máximo verosímil de θ en una distribucion $U(0, \theta)$. Comprobamos también que adolecía de casi cada posible patología —la verosimilitud no era derivable, la desigualdad de Cramer-Rao no era aplicable, porque el soporte depende de θ, etc.—. Comprueba sin embargo, de manera directa, que es estimador consistente. (Ayuda: ¿A qué tiende la probabilidad de que $X_{(n)} \in (0, \theta - \epsilon)$, para cualquier $\epsilon > 0$ prefijado?)

6. A la luz del ejercicio anterior y de las cosas que ya sabes sobre $X_{(n)}$ como estimador de θ, ¿implica insesgadez la consistencia? ¿Implica que el sesgo decrezca hacia cero? Demuestra lo que afirmes o suministra contraejemplos.

Referencias

[1] E. L. Lehmann. *Testing Statistical Hypothesis*. Chapman & Hall, 2 edition, 1986.

[2] V.K. Rohatgi. *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*. Wiley, 1976.