



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

TAREA 1

EJERCICIOS

Las siguientes cuestiones son de manipulación y recordatorio de cosas que, en su mayoría, has visto en cursos anteriores, o se deducen de modo inmediato de ellas. Responde a cada cuestión “cierto” o “falso”, en este último caso aportando un contraejemplo en apoyo de tu afirmación. Si se pide, bosqueja una demostración o haz el desarrollo solicitado.

Las letras mayúsculas, A , B , C , etc. denotan matrices. Los vectores se denotan por $\vec{x}$, $\vec{y}$, etc. Si A es una matriz cuadrada, $|A|$ denota su determinante, y $\text{tr}(A)$ su traza. El operador de trasposición se denota por $'$, como en $\vec{x}'$, A' , etc.

1. $(A + B)' = A' + B'$.
2. $AB = BA$.
3. $|AB| = |A||B|$, ambas matrices cuadradas.
4. $|AB| = |BA|$, A y B matrices cuadradas.
5. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
6. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; ilustra la veracidad o falsedad con un ejemplo utilizando dos matrices cualesquiera 2×2 .
7. A cuadrada, $A\vec{x} = \vec{0}$ y $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |A| = 0$.
8. $\vec{x}'\vec{x} \geq 0$, cualquiera que sea $\vec{x}$.
9. Muestra que $A'A$ es en todo caso definida o semidefinida positiva (Ayuda: considera $A\vec{y} = \vec{x}$ y haz uso del resultado anterior).
10. $A'A$ es simétrica.
11. Si $A'A$ es semidefinida positiva y no definida positiva, hay $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{x} = \vec{0}$. Demuestra.
12. ¿Cómo está relacionado el rango de AB con el de sus factores, A y B ?
13. $(AB)' = A'B'$.
14. $(AB)' = B'A'$.
15. Si A es simétrica semidefinida positiva, siempre hay B tal que $A = BB'$; da una demostración constructiva que produzca una B (no es en general única).
16. Si A es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, entonces $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$.

17. Si A es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, entonces $|A| = \prod_{i=1}^p \lambda_i$.
18. $\sum_{i=1}^p (\vec{a}' \vec{x}_i)^2 = \vec{a}' \left(\sum_{i=1}^p \vec{x}_i \vec{x}_i' \right) \vec{a}$.
19. $\sum_{i=1}^p (A \vec{x}_i)(A \vec{x}_i)' = A \left(\sum_{i=1}^p \vec{x}_i \vec{x}_i' \right) A'$.
20. Una matriz de covarianzas es siempre definida o semidefinida positiva; demuéstalo (Ayuda: el valor medio de una variable aleatoria al cuadrado es necesariamente no negativo).
21. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ si A tiene inversa.
22. Los valores propios no nulos de AB y BA (conformables, pero no necesariamente de la misma dimensión) son iguales.
23. Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ dos vectores p -dimensionales centrados, es decir, $\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i = 0$. Recordando que en un espacio vectorial dotado de producto interno $\langle, \rangle$ se define el coseno del ángulo θ entre dos vectores como

$$\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|},$$

interpreta geoméricamente el coeficiente de correlación muestral ordinario.

24. Escribe una matriz 2×2 que multiplicada por un vector cualquiera de R^2 proporcione otro del mismo módulo girado θ grados en sentido antihorario.
25. ¿Cuáles de entre estas propiedades tienen las matrices asociadas a aplicaciones lineales “giro”; (i) Cuadradas, (ii) Ortogonales, (iii) Singulares, (iv) De rango completo?
26. Una aplicación lineal giro operando sobre los p vectores de una base ortogonal de R^p produce otros p vectores. ¿Son éstos últimos base de R^p ? ¿Base ortogonal?
27. Indica y justifica la relación existente entre el carácter de definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida de la forma cuadrática $\vec{x}' A \vec{x}$ y los valores propios de A .
28. Los valores propios de una matriz simétrica son siempre positivos.
29. Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales.
30. Una matriz simétrica, semidefinida positiva e idempotente tiene valores propios que son 0 ó 1. Demuéstralo.
31. ¿Cómo son los contornos definidos por $\vec{x}' A \vec{x} = c^2$ para diferentes valores de c cuando A es: (i) Escalar (diagonal con elementos iguales a lo largo de la diagonal principal), (ii) Diagonal (posiblemente con elementos diferentes en la diagonal principal), o (iii) Positiva definida cualquiera.
32. Una matriz A es Gramiana (simétrica y definida positiva) si, y sólo si, puede expresarse como producto $A = P' P$ con P no singular. Demuéstralo.
33. ¿Qué es el núcleo de una aplicación lineal?

Lectura recomendada. Cualquier texto de Algebra Lineal que hayas manejado. Si has cursado Matemáticas en la Facultad, seguramente habrás utilizado [2]. Un resumen bastante completo de resultados de álgebra matricial que emplearemos puede encontrarse en [1], Cap. 2.

Referencias

- [1] A. Basilevsky. *Statistical Factor Analysis and Related Methods*. Wiley, 1992.
- [2] J.H. Grafe. *Matemáticas Universitarias*. MacGraw-Hill, Madrid, 1985.