eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

EJERCICIOS

Los ejercicios lo son a la vez de repaso de nociones simples de álgebra lineal y de manejo de R. Siempre que sea posible, debe darse un argumento o demostración analítica del hecho que se pide comprobar, además de realizar los cálculos. Adjunta un listado con los cálculos realizados **debidamente anotados y comentados al margen.**

1. Crea en R la siguiente matriz X de orden 5×3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Forma la matriz $X'X$. ¿Es siempre diagonalizable? Si lo es, ¿cuáles son sus vectores y valores propios? Conserva unos y otros para utilización posterior.

2. ¿Es de rango completo la matriz $X'X$? ¿Qué te permite llegar a esta conclusión? ¿Existe la matriz $(X'X)^{-1}$? Si existe, compútala y guárdala para uso posterior.

3. Computa $X(X'X)^{-1}X'$. ¿Qué orden tiene? ¿Es simétrica? ¿Idempotente? ¿Cuáles son sus valores propios?

4. Computa $I - X(X'X)^{-1}X'$. Repite las operaciones en el apartado anterior.

5. ¿Existe $[X(X'X)^{-1}X']^{-1}$? ¿Qué te permite llegar a tal conclusión? ¿Existe la matriz

$$(I - X(X'X)^{-1}X')^{-1}?$$

6. Haciendo uso de la matriz $X'X$ y de los vectores y valores propios obtenidos en el apartado 2, encuentra una matriz B tal que $BB = X'X$ (una especie de "raíz cuadrada" de la matriz $X'X$) (Ayuda: $V'(X'X)V = \Gamma$, o, lo que es lo mismo, $(X'X) = V\Gamma V'$, siendo Γ una matriz diagonal con los valores propios de $(X'X)$ en la diagonal principal, y V una matriz ortogonal.

7. Toma un vector arbitrario $\vec{y}$ en R^5 , y calcula:

$$\vec{u} = X(X'X)^{-1}X'\vec{y} \quad (1)$$
$$\vec{v} = [I - X(X'X)^{-1}X']\vec{y} \quad (2)$$

   Guarda $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

8. Calcula $< \vec{u}, \vec{v} >$ con los vectores computados en el apartado anterior. ¿Qué observas? ¿Por qué?

9. Calcula $||\vec{y}||^2$, $||\vec{u}||^2$, $||\vec{v}||^2$. ¿Qué observas? ¿Por qué?

10. Volviendo al problema 6, ¿es B única? Demuestra, en su caso, que lo es, o proporciona una B^* alternativa.

11. Utilizando, por ejemplo, el método de ortogonalización de Gram-Schmidt encuentra un conjunto de vectores en R^5 que sea base ortogonal del subespacio generado por las columnas de la matriz en 1).

AYUDAS, SUGERENCIAS Y COMPLEMENTOS

1. En R, la función `det` da directamente el determinante. En S-PLUS dispones de la función `det` en la libraría `Matrix`.

2. Tanto en R como en S-PLUS el modo de cargar una librería conteniendo funciones adicionales a las standard es mediante un mandato como: `library(Matrix)`, `library(MASS)`, o lo que sea.

3. Recuerda que, además de contar con los manuales, puedes en todo momento pedir ayuda al sistema para averiguar la sintaxis y funcionamiento de una función. Por ejemplo, `help(diag)` te dirá cuanto necesitas saber sobre la función `diag`.

4. En R puedes también invocar `help.start()` y mantener abierta la ayuda en una ventana aparte, o buscar ayuda sobre alguna cuestión con `help.search()`.

   Cualesquiera manuales de entre los de la bibliografía te serán de utilidad; por ejemplo, [7], [6] o [5] para cuestiones relacionadas con regresión. Para cuestiones relacionadas con S-PLUS/R, tienes el "Libro Azul" [1], que es una buena introducción o el "Libro Blanco" [2]. También puedes servirte de [10], de las notas [8] (traducción castellana en [9]), o de [4].

Para las cuestiones de algebra lineal y matricial puedes servirte, por ejemplo, de [3].

Referencias

[1] R.A. Becker, J.M. Chambers, and A.R. Wilks. *The New S Language. A Programming Environment for Data Analysis and Graphics*. Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1988.

[2] J.M. Chambers and T.J. Hastie. *Statistical Models in S*. Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, Ca., 1992.

[3] J.H. Grafe. *Matemáticas Universitarias*. MacGraw-Hill, Madrid, 1985.

[4] J.H. Maindonald. Data analysis and graphics using R - An introduction. January 2000.

[5] R.H. Myers. *Classical and Modern Regression with Applications*. PWS-KENT Pub. Co., Boston, 1990.

[6] G.A.F. Seber. *Linear Regression Analysis*. Wiley, New York, 1977.

[7] A. Fdez. Trocóniz. *Modelos Lineales*. Serv. Editorial UPV/EHU, Bilbao, 1987.

[8] B. Venables, D. Smith, R. Gentleman, and R. Ihaka. *Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics*. Dept. of Statistics, University of Adelaide and University of Auckland, 1997. Available at `http://cran.at.r-project.org/doc/R-intro.pdf`.

[9] B. Venables, D. Smith, R. Gentleman, R. Ihaka, and M. Mächler. *Notas sobre R: Un entorno de programación para análisis de datos y gráficos*, 2000. Traducción española de A. González y S. González.

[10] W.N. Venables and B.D. Ripley. *Modern Applied Statistics with* S-PLUS. Springer-Verlag, New York, third edition, 1999.