eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

TAREA 3

EJERCICIOS

1. Sea $\Theta = \{1, 2, \ldots, N\}$ y una familia de distribuciones discretas sobre los números naturales cuyo representante para un $\theta \in \Theta$ se especifica así:

$$f_X(X = x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } x = 1, \ldots, \theta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1}$$

   a) Demuestra (por ejemplo, por inducción) que si para todo θ se verifica $E_\theta[g(X)] = 0$, entonces $g(x) = 0$ (es decir, demuestra que una única observación X es un estadístico completo).

   b) Demuestra que $\hat{\theta}(X) = 2X - 1$ es un estimador insesgado de θ.

   c) Habida cuenta que $\hat{\theta}(X)$ depende sólo de X y X es completo además de (obviamente) suficiente, ¿que puedes decir de $\hat{\theta}(X)$ como estimador de θ?

2. Considera una distribución cuya densidad venga dada por:

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right\} \tag{2}$$

   Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de tamaño n. Muestra que $(\overline{X}^2 - 1/n)$ es un estimador insesgado de mínima varianza de μ^2.

3. Considera una tabla de contingencia de doble entrada, en cuya casilla ij se anota el total x_{ij} de veces que aparecen en conjunción los niveles i y j de dos caracteres.

   a) En el caso en que dicha tabla se suponga resultante de muestrear una población multinomial que atribuye a la casilla ij la probabilidad θ_{ij} (sin más restricción que $\sum_i \sum_j \theta_{ij} = 1$), ¿cuáles serían estadísticos suficientes para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{11}, \ldots, \theta_{IJ})$?

   b) En el caso de que dicha tabla procediera de una población en que hay independencia entre los dos caracteres considerados (es decir, $\theta_{ij} = \theta_{i+} \times \theta_{+j}$, en que θ_{i+} y θ_{+j} son las probabilidades marginales de los niveles i y j del primer y segundo carácter respectivamente), ¿cuáles serían estadísticos suficientes para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{1+}, \ldots, \theta_{I+}, \theta_{+1}, \ldots, \theta_{+J})$?

   c) Obtén, en un caso como en otro, estimaciones insesgadas de mínima varianza para los parámetros correspondientes.

4. El estimador de mínima varianza insesgado basado en n observaciones para la media de una distribución exponencial,
$$f_X(x;\theta) = \theta^{-1}e^{-x/\theta} \tag{3}$$
fue ya obtenido en clase.
   a) Calcula la información de Fisher asociada a una observación.
   b) Encuentra la cota de Cramer-Rao para estimadores regulares insesgados de θ.
   c) Comprueba que el estimador obtenido con ayuda del teorema de Rao-Blackwell alcanza la cota de Cramer-Rao.

Lectura recomendada. Todos los manuales que se citan a continuación son de interés: [1], [3], [5], [8], [9]. Hay problemas resueltos en todos ellos y en [7], [11] y [4].

Puede ayudarte a resolver el problema 1 el artículo [12] (las revistas de Estadística están en la hemeroteca, a la que, como estudiante de segundo ciclo, tienes acceso; los números muy atrasados han de pedirse en el mostrador).

El Ejercicio 3 hace referencia al caso más simple posible de una tabla de contingencia. Sobre análisis de datos categóricos y tablas de contingencia hay mucha bibliografía. Un pequeño manual muy legible es [6]. Mucho más avanzados son [2] o [10].

Referencias

[1] P. J. Bickel and K. A. Doksum. *Mathematical Statistics*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1977.

[2] Y.M.M. Bishop, S.E. Fienberg, and P.W. Holland. *Discrete Multivariate Analysis. Theory and Practice*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1975.

[3] D. R. Cox and D. V. Hinkley. *Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London, 1979 edition, 1974.

[4] D. R. Cox and D. V. Hinkley. *Problems and Solutions in Theoretical Statistics*. Chapman and Hall, London, 1980 edition, 1980.

[5] E.J. Dudewicz and S.N. Mishra. *Modern Mathematical Statistics*. Wiley, 1988.

[6] S.E. Fienberg. *The Analysis of Cross-Classified Categorical Data*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1980.

[7] A. Garín and F. Tusell. *Problemas de Probabilidad e Inferencia Estadística*. Ed. Tébar-Flores, Madrid, 1991.

[8] P.H. Garthwaite, I.T. Jolliffe, and B. Jones. *Statistical Inference*. Prentice Hall, London, 1995.

[9] E. L. Lehmann. *Theory of Point Estimation*. Wiley, New York, 1983.

[10] R.L. Plackett. *The Analysis of Categorical Data*. Griffin, London, 1974.

[11] J. P. Romano and A. F. Siegel. *Counterexamples in Probability and Statistics*. Wadsworth and Brooks/Cole, Monterrey, California, 1986.

[12] S.M. Stigler. Completeness and unbiased estimation. 26(2):28–29, 1972.