Estadística V

Examen Final

Junio de 1998

PROBLEMAS

1. Sabemos que una moneda puede ser de uno de dos posibles tipos. El primer tipo da "cara" (1) con probabilidad $\frac{1}{2}$. El segundo tipo da "cara" con probabilidad $\frac{1}{3}$. Nos proporcionan una moneda, y nos hemos de pronunciar sobre el tipo. Podemos lanzarla una vez.

   Si no acertamos el tipo de moneda, perdemos una unidad. Si acertamos, no perdemos nada.

   a) Describe el problema en términos de Teoría de la Decisión, especificando en particular: i) El conjunto de estados de la Naturaleza; ii) El experimento; iii) El espacio muestral; iv) El conjunto de decisiones; v) La función de pérdida.

   b) Llamamos d_0 a la decisión: "la moneda tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de dar cara", y d_1 a la decisión "la moneda tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ de dar cara". Considera los siguientes cuatro procedimientos no aleatorizados:

   $$\begin{aligned} \delta_1(0) &= \delta_1(1) = d_0; \\ \delta_2(0) &= \delta_2(1) = d_1; \\ \delta_3(0) &= d_1 \quad ; \quad \delta_3(1) = d_0; \\ \delta_4(0) &= d_0 \quad ; \quad \delta_4(1) = d_1. \end{aligned}$$

   Calcula la función de riesgo de cada uno de los cuatro procedimientos.

   c) Utiliza los resultados en el apartado anterior para determinar cuáles de los cuatro anteriores procedimientos son:

   1) Admisibles.
   2) Bayes respecto de la distribución *a priori* $\xi(\frac{1}{3}) = 1 - \xi(\frac{1}{2}) = 0{,}1$.

3) Bayes respecto de la distribución *a priori* $\xi(\frac{1}{3}) = 1 - \xi(\frac{1}{2}) = 0{,}6$.
4) Minimax.

d) El procedimiento que has hallado ser Bayes en (1*c*2), ¿lo seguiría siendo para otras distribuciones *a priori*? ¿Para cuáles?

2. Muestreas al azar una población cuyos sujetos clasificas con arreglo a dos caracteres, A y B, cada uno de los cuales admite tiene dos niveles, A_1, A_2 y B_1, B_2 respectivamente. La tabla de doble entrada conteniendo la clasificación es la siguiente:

	A_1	A_2
B_1	14	23
B_2	24	33

a) Sean θ_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) las respectivas probabilidades de que un sujeto muestreado al azar caiga en la casilla ij. ¿Cuáles son las estimaciones máximo verosímiles de las θ_{ij}? ¿Cuántos parámetros *libres* hay?

b) Considera el modelo que prescribe independencia entre los caracteres A y B. ¿Cuántos parámetros son precisos para especificarlo?

c) Encuentra estadísticos suficientes para los parámetros en el modelo de independencia. Estima máximo verosímilmente dichos parámetros.

d) Evalúa las verosimilitudes en el modelo más general y en el modelo que supone independencia y haz un contraste razón generalizada de verosimilitudes de la hipótesis H_0 : "Hay independencia entre A y B."

3. Considera una muestra aleatoria simple, $X_1, \ldots, X_n$, procedente de una distribución uniforme $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$.

a) Representa gráficamente la forma de la función de verosimilitud.

b) Obtén razonadamente estadísticos suficientes para θ.

c) Estima θ por máxima verosimilitud. ¿Es el estimador único?

d) Obtén un estimador minimax de θ.

e) Demuestra de modo directo la consistencia débil de $\hat{\theta}_{MV}$ al verdadero valor del parámetro (como te será evidente de la contemplación de la función obtenida en 3*a*, no hay aquí condiciones de regularidad, ni recurso posible al teorema de consistencia de $\hat{\theta}_{MV}$ de Wald visto en clase).

4. Imagina que tienes una muestra aleatoria simple, $X_1, \ldots, X_n$, procedente de una distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Como sabes, $\overline{X}$ es máximo verosímil para λ, insesgado, y de mínima varianza.

a) Supón que tu deseo es estimar no λ sino λ^2. ¿Sería $\overline{X}^2$ estimador máximo verosímil? ¿Insesgado? ¿Sería un estadístico suficiente?

b) Calcula el valor medio $E[X_i(X_i - 1)]$ (Ayuda: recuerda que λ es a la vez media y varianza de la distribución $\mathcal{P}(\lambda)$.)

c) Sea $S = X_1 + \ldots + X_n$. ¿Cuál es el valor medio de una cualquiera de las X_i —por ejemplo, X_1— dado S? (Ayuda: Recuerda que dado S, el vector $(X_1, \ldots, X_n)$ tiene distribución multinomial con probabilidades $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. En particular, X_1 tendría distribución binomial con $p = \frac{1}{n}$.)

d) ¿Cuál es el estimador insesgado de mínima varianza de λ^2?

e) Si ignorases el modo de servirte del teorema de Rao-Blackwell y sus corolarios para responder al apartado anterior, o si su aplicación fuera infactible, podrías reducir o eliminar el sesgo en el estimador $\overline{X}^2$ aludido en (4*a*) mediante el *jackknife*. Hazlo suponiendo que la muestra es: $4, 3, 7, 2, 5, 5$, y compara el resultado con el que obtienes de (4*d*).

5. *(Optativo: requiere alguna programación o una tediosa resolución a mano)* Quieres estimar la proporción θ_i de caseríos en una determinada comarca que tienen un número de vacas en cada una de los siguientes intervalos:

   - Caseríos con menos de 3 vacas (θ_1).
   - Caseríos con entre 3 y 10 vacas (θ_2).
   - Caseríos con entre 11 y 15 vacas (θ_3).
   - Caseríos con más de 15 vacas (θ_4).

   Encargas el trabajo de campo a tres consultoras, A, B y C, cada una de las cuales visita cincuenta caseríos y averigua el número de cabezas de vacuno en cada uno. No obstante, entienden mal tus instrucciones respecto a los intervalos que te interesan. Además son lo suficientemente inútiles como para tirar los cuestionarios que han rellenado y proporcionarte sólo la información siguiente:

   - Consultora A: 32 caseríos con hasta diez vacas, y 18 con más de diez vacas.
   - Consultora B: 28 caseríos con menos de tres vacas, y 22 con tres o más vacas.
   - Consultora C: 41 caseríos con hasta quince vacas, y 9 con más de quince vacas.

   ¿Qué harías (aparte de no pagar a las consultoras)? ¿Puedes obtener a partir de los datos anteriores estimaciones de las proporciones que te interesan? ¿Cómo lo harías? Hazlo.