eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

TAREA 0

EJERCICIOS

Las siguientes cuestiones son de manipulación y recordatorio de cosas que, en su mayoría, has visto en cursos anteriores, o se deducen de modo inmediato de ellas.

Responde a cada cuestión “cierto” o “falso”, en este último caso aportando un contraejemplo en apoyo de tu afirmación. Si se pide, bosqueja una demostración o haz el desarrollo solicitado.

Las letras mayúsculas, A, B, C, etc. denotan matrices. Los vectores se denotan por $\vec{x}$, $\vec{y}$, etc. Si A es una matriz cuadrada, $|A|$ denota su determinante, y $\mathrm{tr}(A)$ su traza. El operador de trasposición se denota por $'$, como en $\vec{x}\,'$, $A\,'$, etc. Denotamos por $\vec{1}$ a un vector formado por “unos”. I_n es la matriz identidad $n \times n$.

Cuestiones que debes conocer de la asignatura de ESTADÍSTICA: MODELOS LINEALES

1. $(A + B)\,' = A\,' + B\,'$.
2. $AB = BA$.
3. $|AB| = |A||B|$, ambas matrices cuadradas.
4. $|AB| = |BA|$, A y B matrices cuadradas.
5. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
6. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$; ilustra la veracidad o falsedad con un ejemplo utilizando dos matrices cualesquiera 2×2.
7. A cuadrada, $A\vec{x} = \vec{0}$ y $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |A| = 0$.
8. $\vec{x}\,'\vec{x} \geq 0$, cualquiera que sea $\vec{x}$.
9. Muestra que $A\,'A$ es en todo caso definida o semidefinida positiva (Ayuda: considera $A\vec{y} = \vec{x}$ y haz uso del resultado anterior).
10. $A\,'A$ es simétrica.
11. Si $A\,'A$ es semidefinida positiva y no definida positiva, hay $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{x} = \vec{0}$. Demuestra.

12. ¿Cómo está relacionado el rango de AB con el de sus factores, A y B?
13. $(AB)' = A'B'$.
14. $(AB)' = B'A'$.
15. Si A es simétrica semidefinida positiva, siempre hay B tal que $A = BB'$; da una demostración constructiva que produzca una B (no es en general única).
16. Si A es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, entonces $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.
17. Si A es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, entonces $|A| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$.
18. $\sum_{i=1}^{p} (\vec{a}\,'\vec{x}_i)^2 = \vec{a}\,' \left(\sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i\vec{x}_i\,'\right) \vec{a}$.
19. $\sum_{i=1}^{p} (A\vec{x}_i)(A\vec{x}_i)' = A \left(\sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i\vec{x}_i\,'\right) A'$.
20. Una matriz de covarianzas es siempre definida o semidefinida positiva; demuéstralo (Ayuda: el valor medio de una variable aleatoria al cuadrado es necesariamente no negativo).
21. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ si A tiene inversa.
22. Los valores propios no nulos de AB y BA (conformables, pero no necesariamente de la misma dimensión) son iguales.
23. Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ dos vectores p-dimensionales centrados, es decir, $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i = 0$. Recordando que en un espacio vectorial dotado de producto interno $<,>$ se define el coseno del ángulo θ entre dos vectores como
$$\frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{||\vec{x}||||\vec{y}||},$$
interpreta geométricamente el coeficiente de correlación muestral ordinario.
24. Escribe una matriz 2×2 que multiplicada por un vector cualquiera de R^2 proporcione otro del mismo módulo girado θ grados en sentido antihorario.
25. ¿Cuáles de entre estas propiedades tienen las matrices asociadas a aplicaciones lineales "giro"; (i) Cuadradas, (ii) Ortogonales, (iii) Singulares, (iv) De rango completo?
26. Una aplicación lineal giro operando sobre los p vectores de una base ortogonal de R^p produce otros p vectores. ¿Son éstos últimos base de R^p? ¿Base ortogonal?
27. Indica y justifica la relación existente entre el carácter de definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida de la forma cuadrática $\vec{x}\,'A\vec{x}$ y los valores propios de A.
28. Los valores propios de una matriz simétrica son siempre positivos.
29. Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales.
30. Una matriz simétrica, semidefinida positiva e idempotente tiene valores propios que son 0 ó 1. Demuéstralo.
31. ¿Cómo son los contornos definidos por $\vec{x}\,'A\vec{x} = c^2$ para diferentes valores de c cuando A es: (i) Escalar (diagonal con elementos iguales a lo largo de la diagonal principal), (ii) Diagonal (posiblemente con elementos diferentes en la diagonal principal), o (iii) Positiva definida cualquiera.

32. Una matriz A es Gramiana (simétrica y definida positiva) si, y sólo si, puede expresarse como producto $A = P'P$ con P no singular. Demuéstralo.

33. ¿Qué es el núcleo de una aplicación lineal?

34. Sea A una matriz cuadrada simétrica. Describe brevemente como calcularías A^{65} sin recurrir a la solución de fuerza bruta de multiplicar A por sí misma 65 veces.

35. Haciendo uso del hecho de que para cualquier matriz A se verifica que $A'A = 0 \Longrightarrow A = 0$, demuestra que para matrices reales P, Q, X se verifica:

$$PXX' = QXX' \Longrightarrow PX = QX.$$

36. Demuestra que para una matriz K real cualquiera, $I + KK'$ es definida positiva.

Cuestiones adicionales sobre cosas que emplearemos en ESTADÍSTICA: ANÁLISIS MULTIVARIANTE

1. Demuestra que $\left(I_n - n^{-1}\vec{1}\vec{1}'\right)$ es la "matriz centradora". Si multiplicamos por ella cualquier vector columna $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ obtenemos el mismo vector centrado.

2. Demuestra que $\left(I_n - n^{-1}\vec{1}\vec{1}'\right)$ es de rango incompleto. (Ayuda: Basta encontrar un vector $\vec{v}$ tal que $\left(I_n - n^{-1}\vec{1}\vec{1}'\right)\vec{v} = \vec{0}$.)

3. Demuestra que $\left(I_n - n^{-1}\vec{1}\vec{1}'\right)$ es idempotente...

4. ...y, haciendo uso de su idempotencia, calcula su rango.

5. Dado un vector $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, demuestra que

$$\vec{x}'\left(I_n - n^{-1}\vec{1}\vec{1}'\right)\vec{x}$$

es n veces su varianza muestral.

6. Una matriz cuadrada $n \times n$, que particionada en la primera y sucesivas filas es de la forma:

$$H_n = \begin{pmatrix} h' \\ K_{n-1} \end{pmatrix}$$

con

$$h' = \vec{1}'/\sqrt{n}$$

y K_n cuya j-ésima fila viene dada por:

$$\left[\vec{1}_j{}' | -j | \vec{0}_{n-j-1}{}'\right] / \sqrt{j(j+1)} \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

recibe el nombre de matriz de Helmert de orden $n \times n$. Por ejemplo, si $n = 4$,

$$H_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-3}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

a) Muestra que es ortogonal.

b) Muestra que si $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$, entonces:

$$\sum_i (x_i - \overline{x})^2 = \vec{x}\,' K'_{n-1} K_{n-1} \vec{x}$$

7. Demuestra que si todas las inversas involucradas existen, $(I + A^{-1})^{-1} = A(A + I)^{-1}$.

8. Demuestra que si todas las inversas involucradas existen, $(I + E^{-1}H)^{-1} = (E + H)^{-1}E$.

9. Demuestra que si δ_i son los valores propios de la matriz $E^{-1}H$, entonces:

$$\frac{|I|}{|I + E^{-1}H|} = \prod_i \frac{1}{1 + \delta_i}$$

Lectura recomendada. Cualquier texto de Algebra Lineal que hayas manejado. Si has cursado Matemáticas en la Facultad, seguramente habrás utilizado [3]. Un resumen bastante completo de resultados de álgebra matricial que emplearemos puede encontrarse en [2], Cap. 2, o en el Capítulo 2 de [5]. El libro [1], aunque con formato de problemas, es un completo manual que cubre mucho de lo que se pregunta aquí.

Un texto que cubre con largueza todo cuanto necesitaremos sobre álgebra matricial es [6]. También es de interés, pero no tanto para este curso como para otros [4].

Referencias

[1] K.M. Abadir and J.R. Magnus. *Matrix Algebra*. Cambridge Univ. Press, 2005.

[2] A. Basilevsky. *Statistical Factor Analysis and Related Methods*. Wiley, 1992.

[3] J.H. Grafe. *Matemáticas Universitarias*. MacGraw-Hill, Madrid, 1985.

[4] J.R. Magnus and H. Neudecker. *Matrix differential calculus with applications in Statistics and Econometrics*. Wiley, 1988.

[5] D. Peña. *Análisis de Datos Multivariantes*. McGraw-Hill, 2002.

[6] S.R. Searle. *Matrix Algebra useful for Statistics*. Wiley, 1982.