eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

# TAREA 1

## EJERCICIOS

Las siguientes cuestiones son de manipulación y recordatorio de cosas que, en su mayoría, has visto en cursos anteriores, o se deducen de modo inmediato de ellas. Responde a cada cuestión "cierto" o "falso", en este último caso aportando un contraejemplo en apoyo de tu afirmación. Si se pide, bosqueja una demostración o haz el desarrollo solicitado.

Las letras mayúsculas, $A$, $B$, $C$, etc. denotan matrices. Los vectores se denotan por $\vec{x}$, $\vec{y}$, etc. Si $A$ es una matriz cuadrada, $|A|$ denota su determinante, y $\mathrm{tr}(A)$ su traza. El operador de trasposición se denota por $'$, como en $\vec{x}'$, $A'$, etc.

1. $(A+B)' = A' + B'$.
2. $AB = BA$.
3. $|AB| = |A||B|$, ambas matrices cuadradas.
4. $|AB| = |BA|$, $A$ y $B$ matrices cuadradas.
5. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
6. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$; ilustra la veracidad o falsedad con un ejemplo utilizando dos matrices cualesquiera $2 \times 2$.
7. $A$ cuadrada, $A\vec{x} = \vec{0}$ y $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |A| = 0$.
8. $\vec{x}'\vec{x} \geq 0$, cualquiera que sea $\vec{x}$.
9. Muestra que $A'A$ es en todo caso definida o semidefinida positiva (Ayuda: considera $A\vec{y} = \vec{x}$ y haz uso del resultado anterior).
10. $A'A$ es simétrica.

11. Si $A'A$ es semidefinida positiva y no definida positiva, hay $\vec{x} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{x} = \vec{0}$. Demuestra.

12. ¿Cómo está relacionado el rango de $AB$ con el de sus factores, $A$ y $B$? (Ayuda: Si piensas en $AB$ como en la matriz asociada a la aplicación lineal composición de las representadas por $B$ y por $A$, en este orden, el resultado te resultará obvio.)

13. $(AB)' = A'B'$.

14. $(AB)' = B'A'$.

15. Si $A$ es simétrica semidefinida positiva, siempre hay $B$ tal que $A = BB'$; da una demostración constructiva que produzca una $B$ (Ayuda: no es en general única. Una posibilidad[1] es la llamada factorización de Cholesky.)

16. Si $A$ es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, entonces $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

17. Si $A$ es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, entonces $|A| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$.

18. $\sum_{i=1}^{p} (\vec{a}'\vec{x}_i)^2 = \vec{a}' \left( \sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i \vec{x}_i{}' \right) \vec{a}$.

19. $\sum_{i=1}^{p} (A\vec{x}_i)(A\vec{x}_i)' = A \left( \sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i \vec{x}_i{}' \right) A'$.

20. Una matriz de covarianzas es siempre definida o semidefinida positiva; demuéstralo. (Ayuda: el valor medio de una variable aleatoria al cuadrado es necesariamente no negativo. Si tomas el valor medio $E(u_1X + u_2Y)^2$ en que $X$ e $Y$ son variables aleatorias cualesquiera, y $u_1$, $u_2$ son números cualesquiera, verás que $E(u_1X + u_2Y)^2 = \vec{u}'\Sigma\vec{u}$, de donde fácilmente puedes deducir lo que se pide.)

21. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ si $A$ tiene inversa.

22. Los valores propios no nulos de $AB$ y $BA$ son iguales. ($A$ y $B$ no son necesariamente cuadradas, pero sí de dimensiones tales que permiten ambos productos matriciales.)

23. Sean $\vec{x}$ y $\vec{y}$ dos vectores $p$-dimensionales centrados, es decir, $\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} y_i = 0$. Recordando que en un espacio vectorial dotado de producto interno $<,>$ se define el coseno del ángulo $\theta$ entre dos vectores como
$$\frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||},$$
interpreta geométricamente el coeficiente de correlación muestral ordinario.

24. Escribe una matriz $2 \times 2$ que multiplicada por un vector cualquiera de $R^2$ proporcione otro del mismo módulo girado $\theta$ grados en sentido antihorario.

25. Indica y justifica la relación existente entre el carácter de definida (positiva o negativa), semidefinida (positiva o negativa) o indefinida de la forma cuadrática $\vec{x}'A\vec{x}$ y los valores propios de $A$.

[1] Que puedes encontrar descrita en multitud de libros, o en la Wikipedia, `http://es.wikipedia.org`, por ejemplo.

26. Los valores propios de una matriz simétrica son siempre positivos.

27. Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales.

28. Una matriz simétrica, semidefinida positiva e idempotente tiene valores propios que son 0 ó 1. Demuéstralo.

29. ¿Qué es el núcleo de una aplicación lineal?

30. Sea $A$ una matriz cuadrada simétrica. Describe brevemente como calcularías $A^{65}$ sin recurrir a la solución de fuerza bruta de multiplicar $A$ por sí misma 65 veces.

31. Demuestra que para una matriz $K$ real cualquiera, $I + KK'$ es definida positiva.

**Lectura recomendada.** Cualquier texto de Algebra Lineal que hayas manejado. Si has cursado Matemáticas en la Facultad, posiblemente habrás utilizado Grafe (1985). Un resumen bastante completo de resultados de álgebra matricial que emplearemos puede encontrarse en Basilevsky (1992), Cap. 2, y también en Peña (2002), Cap. 2. Textos que cubren con largueza todo cuanto necesitaremos son Searle (1982), Gentle (2007), Seber (2007), Magnus & Neudecker (1988) y Abadir & Magnus (2005) (éste último es una recopilación de ejercicios).

**Recursos *on line*.** Hay un resumen (y enlaces) en la Wikipedia; busca por ejemplo "Matrix theory" en `http://en.wikipedia.org`. Abarcando *mucho más* de lo que necesitamos es Petersen & Pedersen (2008).

# Referencias

Abadir, K. & Magnus, J. (2005), *Matrix Algebra*, Cambridge Univ. Press.

Basilevsky, A. (1992), *Statistical Factor Analysis and Related Methods*, Wiley.

Gentle, J. (2007), *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*, Springer.

Grafe, J. H. (1985), *Matemáticas Universitarias*, MacGraw-Hill, Madrid.

Magnus, J. & Neudecker, H. (1988), *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiley.

Petersen, K. B. & Pedersen, M. S. (2008), *The Matrix Cookbook*, Libremente disponible en Internet. **URL:** *http://matrixcookbook.com*

Peña, D. (2002), *Análisis de Datos Multivariantes*, McGraw-Hill.

Searle, S. R. (1982), *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Wiley.

Seber, G. (2007), *A Matrix Handbook for Statisticians*, Wiley.