

INSTRUCCIONES

1. El examen consta de cuestiones, que se responden sobre la hoja de codificación proporcionada, y problemas, que se responden en papel aparte.
2. Para escoger una respuesta, basta efectuar una marca **rellenando debidamente el rectángulo sobre el que está la letra escogida** en la hoja de codificación. Piénsalo antes; aunque puedes borrar si escribes con lápiz (número 2 o similar), marcas que no estén perfectamente borradas pueden ser leídas. Te aconsejamos que señales sobre el formulario de examen las respuestas que te parezcan adecuadas, y emplees los últimos diez minutos del tiempo asignado en transcribir las a la hoja de codificación.
3. Hay siempre, en las preguntas de elección múltiple, una **única** respuesta correcta. Todas las cuestiones correctamente resueltas valen 1 punto mientras que las fallidas suponen una penalización de 0.2 puntos. Las preguntas no contestadas no suponen penalización.
4. Cada uno de los problemas, A, B y C debe responderse en una hoja de papel diferente. La recogida se producirá escalonadamente, en los momentos que constarán en la pizarra; primero, la hoja de codificación, y luego los problemas A, B, y C en este orden.
5. El formulario de examen tiene seis hojas numeradas correlativamente al pie (del 0.1 al 0.6). Cerciórate de recibirlas todas, y reclama si tu formulario fuera incompleto. Hay distintos tipos de examen. Este es del tipo 0; marca un 0 en la columna I de tu hoja de codificación, como en el ejemplo.
6. Los puntos obtenibles en cuestiones y problemas son 30 y 30 respectivamente. Son precisos 15 y 15 para superar el examen. Cuestionarios con puntuaciones iguales o superiores a 14 pueden en algún caso ser compensados por una buena nota en los problemas.
7. Rellena tus datos en la hoja de codificación y pliegos de papel suministrados. En "Convocatorias" (columna II) pondrás el número de convocatorias consumidas *incluyendo ésta*.

Ejemplo:

12545

PEREZ, Ernesto

Examen tipo 0

Convocatorias

CUESTION	NUMERO DEL ALUMNO
ENSEÑANZA	
OFICIAL	LIBRE
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Observaciones	

D.N.I. / N.A.N.									
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

NUMERO / ZENBAKIA									
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

I	II	III	IV
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

CUESTIONES (Duración: 1 hora 30 minutos)

1. **PREGUNTA-REGALO.** La capital de España es:

- (A) París (B) Sebastopol (C) Madrid (D) Londres (E) Pekín

Las cuestiones 2 y 3 hacen referencia al siguiente enunciado:

En un determinado deporte la tasa anual de accidentados es de 4 por mil personas. Una empresa aseguradora tiene 3 000 clientes asegurados de dicho deporte.

2. Una buena aproximación del número de indemnizaciones por accidentados que deberá pagar al año es la distribución:

- (A) Poisson ($\lambda = 12$) (B) Binomial ($p = 0.4, n = 3\,000$) (C) Poisson ($\lambda = 48$)
(D) $N(12, \sigma^2 = 12)$ (E) Binomial ($p = 0.5, n = 3\,000$)

3. Si las indemnizaciones fueran todas de 10 000 euros, el monto anual medio de indemnizaciones a pagar sería de:

- (A) 300 (B) 120 000 (C) 150 000 (D) 60 000 (E) 24 000

Las cuestiones 4 a 6 hacen referencia al siguiente enunciado:

El número de clientes que entran en una tienda cada hora sigue una distribución de Poisson cuya media es 3.25. Se supone independencia entre los diferentes momentos.

4. La probabilidad de que en una hora entren exactamente 5 clientes es:

- (A) 0.8118 (B) 0.1172 (C) 0.9168 (D) 0.0252 (E) 0.7793

5. El número más probable de clientes que entran en una hora es:

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 2.25 (E) 3.25

6. La probabilidad aproximada de que en el transcurso de 12 horas entren menos de 42 clientes es:

- (A) 0.6255 (B) 0.6844 (C) 0.3745 (D) 0.3446 (E) 0.6554

Las cuestiones 7 a 9 hacen referencia al siguiente enunciado:

El tiempo de espera en un restaurante es una v.a. con distribución exponencial de media 20 minutos. Se supone independencia entre los diferentes días.

7. Si una persona acude a ese restaurante ¿cuál es la probabilidad de que deba esperar menos de 10 minutos?

- (A) 0.3624 (B) 0.6220 (C) 0.6065 (D) 0.6376 (E) 0.3935

8. Si dicha persona transcurridos 24 minutos sin ser atendida se marcha del restaurante, ¿cuál es la probabilidad de que se marche?

- (A) 0.7 (B) 0.6 (C) 0.4 (D) 0.5 (E) 0.3

9. Si dicha persona acude a ese restaurante 10 veces ¿cuál es la probabilidad de que se marche más de 3 veces?

- (A) 0.9452 (B) 0.6496 (C) 0.9894 (D) 0.3504 (E) 0.0106

10. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con función de cuantía:

$$P(X_n = -2) = \frac{1}{3n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{3n}, \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{3n}$$

Esta sucesión converge:

- (A) En distribución, probabilidad y media cuadrática a $X = 2$
(B) En distribución, probabilidad y media cuadrática a $X = 0$
(C) Sólo en distribución a $X = 2$
(D) Sólo en distribución a $X = 0$
(E) Sólo en probabilidad a $X = 0$

Las cuestiones 11 a 13 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sean X_1, X_2, \dots, X_5 cinco v.a. independientes entre sí, todas ellas con distribución $\gamma(0.25, 1)$.

11. La media y varianza de X_1 son, respectivamente:

- (A) 0.25 y 0.25 (B) 0.25 y 0.0625 (C) 4 y 4 (D) 4 y 16 (E) 4 y 0.25

12. La distribución de la v.a. $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_5$ es:

- (A) $\text{Exp}(\lambda = 0.25)$ (B) χ_{10}^2 (C) Todo falso
(D) $\text{Exp}(\lambda = 1.25)$ (E) $\gamma(0.25, 1)$

13. ¿Y cuál será la distribución de la media aritmética $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5}$?

- (A) $\gamma(1.25, 5)$ (B) $\text{Exp}(\lambda = 1.25)$ (C) χ_{10}^2
(D) $\gamma(0.25, 5)$ (E) $\text{Exp}(\lambda = 0.25)$

Las cuestiones 14 a 17 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 variables aleatorias independientes entre sí con distribuciones normales con medias respectivas -3, 0, -3 y 0 y varianzas 1, 1, 4 y 4, respectivamente.

14. Sea $Z = (X_1 + 3)^2 + \frac{1}{4}(X_3 + 3)^2$. Entonces, $P(Z < 4.61)$ es:

- (A) 0.1 (B) Todo falso (C) 0.05 (D) 0.9 (E) 0.95

15. Sea $W = \frac{X_2}{\sqrt{\frac{Z}{2}}}$. Entonces $P(W > 4.3)$ es:

- (A) 0.95 (B) 0.05 (C) 0.975 (D) 0.025 (E) 0.1

16. El valor de k que cumple $P(|W| < k) = 0.6$ es:

- (A) 0.617 (B) 2.92 (C) 1.061 (D) 1.89 (E) 0.142

17. La variable $Y = \frac{X_4^2}{2Z}$ tiene distribución:

- (A) t_1 (B) $F_{2,1}$ (C) χ_2^2 (D) $F_{1,2}$ (E) Todo falso

Las cuestiones 18 y 19 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea X una v.a. con función de cuantía:

$$P(X = -2) = \frac{1}{3}\theta, \quad P(X = 0) = 1 - \frac{2}{3}\theta, \quad P(X = 2) = \frac{1}{3}\theta$$

Para estimar el parámetro θ se ha tomado una m.a.s. de tamaño $n = 10$, en la que se ha obtenido tres veces el valor -2, cinco veces el 0 y dos veces el 2.

18. La estimación de θ por el método de máxima verosimilitud es:

- (A) 1.4 (B) 0 (C) 0.75 (D) 0.25 (E) 0.37

19. La estimación de θ por el método de momentos es:

- (A) 0.37 (B) 0 (C) 1.4 (D) 0.25 (E) 0.75

Las cuestiones 20 y 21 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea X una v.a. con función de densidad:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)}, \quad x > \theta,$$

cuya media es $2 + \theta$. Para estimar el parámetro θ se ha tomado una m.a.s. de tamaño n , X_1, \dots, X_n .

20. El estimador de θ por el método de máxima verosimilitud es:

- (A) $\max \{x_i\}$ (B) $\bar{X} + 2$ (C) \bar{X} (D) $\bar{X} - 2$ (E) $\min \{x_i\}$

21. El estimador de θ por el método de momentos es:

- (A) $\frac{1}{\bar{X}}$ (B) \bar{X} (C) $\frac{\bar{X}}{2}$ (D) $\bar{X} + 2$ (E) $\bar{X} - 2$

Las cuestiones 22 y 23 hacen referencia al siguiente enunciado:

Se tiene una m.a.s. de tamaño n de una distribución de Poisson de parámetro λ . Como estimador de λ se decide utilizar $\hat{\lambda} = \bar{X} + \frac{1}{n^2}$.

22. Este estimador de λ es:

- (A) insesgado y asintóticamente sesgado
(B) sesgado y asintóticamente insesgado
(C) insesgado y asintóticamente insesgado
(D) sesgado y asintóticamente sesgado
(E) Todo falso

23. ¿Es este estimador de λ consistente?

- (A) No (B) - (C) Sí (D) - (E) -

Las cuestiones 24 y 25 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea X una v.a. con distribución $N(m, \sigma^2 = 1)$. Para contrastar la hipótesis nula $H_0 : m = 5$, frente a la alternativa $H_1 : m > 5$ utilizando \bar{X} como estadístico, tomamos una región crítica de la forma: (C, ∞) .

24. Para que el nivel de significación sea $\alpha = 0.10$ cuando la muestra consta de $n = 4$ observaciones, habríamos de tomar C igual a:

- (A) 6.2800 (B) 5.8159 (C) 6.6500 (D) 5.6400 (E) 5.4079

25. Para dicho valor de C la potencia cuando $m = 5.5$ vale:

- (A) 0.9406 (B) 0.6103 (C) 0.5714 (D) 0.3897 (E) 0.0594

Las cuestiones 26 a 28 hacen referencia al siguiente enunciado:

En un estudio de mercado interesa contrastar la hipótesis H_0 de que al menos el 40% de la población está dispuesta a comprar un nuevo producto. Para ello se toma una m.a.s. de tamaño 20 y se considera el estadístico Z : número de personas en la muestra dispuestas a comprar el producto.

26. Al nivel de significación 10%, la región crítica más adecuada para el contraste es:

- (A) $z \leq 4$ (B) $z \leq 3$ (C) Todo falso (D) $z > 4$ (E) $z > 3$

27. La potencia de la prueba si $p = 0.3$ es:

- (A) 0.8929 (B) 0.7625 (C) 0.1071 (D) 0.2375 (E) Todo falso

28. Si se toma una m.a.s. de tamaño $n = 100$ y se decide rechazar H_0 si el número de personas en la muestra dispuestas a comprar el producto es menor que 30, ¿cuál es el nivel de significación aproximado de la nueva prueba?

- (A) 0.052 (B) 0.016 (C) 0.026 (D) 0.979 (E) 0.337

Las cuestiones 29 y 30 hacen referencia al siguiente enunciado:

Queremos contrastar la hipótesis nula de que los beneficios (en millones) de las empresas en una cierta industria siguen una distribución normal con media 10 y varianza 4. Para ello observamos los beneficios de 100 empresas de las cuales 30 tienen beneficios menores de 8, 50 tienen beneficios entre 8 y 13 y las 20 restantes tienen unos beneficios mayores que 13.

29. De ser cierta la hipótesis de contraste, ¿cuántas empresas aproximadamente se esperaría observar en la muestra con beneficios menores que 8?

- (A) 25 (B) 16 (C) 84 (D) 0 (E) 32

30. Entonces, nuestra decisión al nivel de significación del 5% será:

- (A) - (B) No rechazar H_0 (C) - (D) - (E) Rechazar H_0

PROBLEMAS (Duración: 75 minutos)

A. (10 puntos, 25 minutos)

El gerente de una empresa pretende determinar si la probabilidad de que los empleados asistan al consultorio médico de la empresa es la misma todos los días laborables de la semana. En base a una muestra aleatoria de cuatro semanas completas de trabajo observó los siguientes datos:

Día de la semana	Núm. de asistencias a la consulta médica
Lunes	49
Martes	35
Miércoles	32
Jueves	39
Viernes	45

Al nivel de significación del 5%, ¿qué conclusión sacará este gerente?

B. (10 puntos, 25 minutos)

Se sabe que el gasto en equipamiento informático que realizan las empresas con menos de 250 empleados es una v.a. X con distribución Normal. Para estimar el gasto medio se toma una m.a.s. de tamaño $n = 15$ y se obtiene un gasto medio de 6000 euros con una desviación típica de 7500 euros.

- i) Deriva, a partir de la distribución de \bar{X} , la expresión teórica del intervalo de confianza $1 - \alpha$ para la media aplicable al caso del enunciado.
- ii) Con los datos del enunciado, calcula el intervalo de confianza 95% para el gasto medio.
- iii) Contrasta $H_0 : m = 10000$ frente a $H_1 : m \neq 10000$ al nivel de significación del 5%.

C. (10 puntos, 25 minutos)

Sea X una v.a. con distribución $\gamma(a, 3)$, es decir, con la siguiente función de densidad:

$$f(x; a) = \frac{a^3}{2} x^2 e^{-ax}, \quad x > 0, \quad a > 0$$

Se quiere contrastar $H_0 : a = \frac{1}{2}$ frente a $H_1 : a = 2$. Para ello se toma una muestra de un sólo elemento, X .

- i) Obtener la forma general de la región crítica más potente para dicho contraste.
- ii) ¿Cuál es la distribución del estadístico X bajo la hipótesis nula?
- iii) Determinar la región crítica concreta a un nivel de significación del 5%.

SOLUCIONES DEL CUESTIONARIO (tipo 0)

1: C	11: D	21: E
2: A	12: C	22: B
3: B	13: A	23: C
4: B	14: D	24: D
5: A	15: D	25: D
6: E	16: C	26: A
7: E	17: D	27: D
8: E	18: C	28: B
9: D	19: E	29: B
10: B	20: E	30: E

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

Problema A

Se trata de un ajuste a una distribución totalmente especificada.

Construimos la tabla:

	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
Lunes	49	0.2	40	+9	2.025
Martes	35	0.2	40	-5	0.625
Miércoles	32	0.2	40	-8	1.600
Jueves	39	0.2	40	-1	0.025
Viernes	45	0.2	40	+5	0.625
	200	1	200	0	$z = 4.9$

Bajo la hipótesis nula de ajuste a una distribución totalmente especificada, el estadístico

$$\sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_{(K-1)}, \text{ donde } K \text{ es el número de categorías en que ha sido dividida la muestra } (K = 5).$$

La regla de decisión es rechazar la hipótesis nula al nivel de significación aproximado del 5% si:

$$z > \chi^2_{(5-1), 0.05} = \chi^2_{4, 0.05}$$

En este caso:

$$z = 4.9 < 9.49 = \chi^2_{4, 0.05}$$

por lo que, a un nivel de significación del 5%, no se rechaza la hipótesis nula de ajuste a la distribución especificada. Es decir, se puede afirmar que en la muestra obtenida la probabilidad de que los empleados asistan al consultorio médico es la misma todos los días laborables de la semana.

Problema B

- i) Se trata de un intervalo de confianza para la media poblacional en el caso de distribución normal y varianza desconocida.

Sea una m.a.s. de tamaño n : X_1, X_2, \dots, X_n , tomada de una distribución $N(m, \sigma^2)$.

Entonces,

$$\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0, 1)$$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi_{n-1}$$

y, además, las distribuciones de estos estadísticos son independientes entre sí. De aquí,

$$\frac{\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right)/(n-1)}} = \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n-1}} \in t_{n-1}$$

$$P\left(-t_{n-1|\alpha/2} < \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < t_{n-1|\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t_{n-1|\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \bar{X} - m < t_{n-1|\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\bar{X} - t_{n-1|\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}} < -m < -\bar{X} + t_{n-1|\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1|\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X} + t_{n-1|\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza $1 - \alpha$ es:

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left(\bar{x} \pm t_{n-1|\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right)$$

- ii) En este caso: $n = 15$, $\bar{x} = 6000$, $t_{n-1|\alpha/2} = t_{14|0.05/2} = 2.14$ y $s = 7500$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} IC_{0.95}(m) &= \left(6000 \pm 2.14 \frac{7500}{\sqrt{14}}\right) = \\ &= (6000 \pm 4289.54) = \\ &= (1710.46, 10289.54) \end{aligned}$$

- iii) Dado que $m = 10\,000$ está incluida en el intervalo de confianza 0.95 para la media, no se rechaza, a un nivel de significación del 5%, la H_0 de que la media es 10 000.

Problema C

Se tiene una v.a. con función de densidad dada por:

$$f(x; a) = \frac{a^3}{2} x^2 e^{-ax}, \quad x > 0, \quad a > 0$$

Queremos contrastar: $H_0 : a = 1/2$ frente a $H_1 : a = 2$.

Para ello se toma una m.a.s. de tamaño $n = 1$.

- i) Para determinar la región crítica (RC) más potente para dicho contraste utilizamos el Teorema de Neyman-Pearson, por lo que RC estará definida por:

$$\begin{aligned} \frac{f(x; a = 1/2)}{f(x; a = 2)} &\leq K \\ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 x^2 e^{-\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2} (2^3) x^2 e^{-2x}} &\leq K \\ e^{-(\frac{1}{2}x - 2x)} &\leq K_1 \\ \frac{3}{2}x &\leq K_2 \\ x &\leq C \\ RC &= (0, C] \end{aligned}$$

La región crítica más potente para este contraste rechazará la hipótesis nula siempre que $X \leq C$, $C > 0$.

- ii) La distribución del estadístico X bajo la hipótesis nula es:

$$X \in \gamma\left(\frac{1}{2}, 3\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{6}{2}\right) \equiv \chi_6^2$$

- iii) Para un nivel de significación $\alpha = 5\%$:

$$\begin{aligned} \alpha = 0.05 &\geq P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0) = \\ &= P(X \leq C \mid X \in \chi_6^2) \\ \Rightarrow C &= \chi_{6, 0.95}^2 = 1.64 \\ \Rightarrow RC &= (0, 1.64] \end{aligned}$$