

Universidad Euskal Herriko  
del País Vasco Unibertsitatea

**Master Oficial en  
BANCA Y FINANZAS CUANTITATIVAS**

**Matemáticas, Probabilidad y Estadística  
Parte I: Optimización**

**María Araceli Garín**

Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas  
Departamento de Economía Aplicada III  
**Bilbao**

Curso 2016-17

# Capítulo 1

## Extremos de funciones reales

En este capítulo abordaremos el problema del cálculo de extremos de una función real en general no lineal de varias variables. Lo haremos desde el punto de vista del cálculo matemático. Introduciremos los conceptos y resultados que fundamentan las técnicas de optimización mediante las que calcularemos analíticamente los máximos o mínimos de este tipo de funciones. Abordaremos en particular el cálculo de extremos cuando se deben satisfacer además condiciones o ligaduras adicionales.

### 1.1. Extremos relativos o locales

#### 1.1.1. Extremos relativos libres

Sea  $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$  una función definida en el abierto  $D$ .

**Definición 1.1** *Se dice que  $f$  tiene un máximo (mínimo) relativo en sentido estricto en un punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  si se verifica que  $f(a) > f(x)$  ( $f(x) > f(a)$ ) para algún entorno reducido del punto  $a$ .*

Si las expresiones anteriores se sustituyen por  $f(a) \geq f(x)$  ( $f(x) \geq f(a)$ ) respectivamente, se dice que el máximo (mínimo) lo son en sentido amplio.

De forma genérica, tanto a los extremos relativos en sentido amplio como en sentido estricto, se les denomina extremos relativos o locales de la función  $f$ .

En la anterior definición, para que  $f$  alcance un extremo relativo en un punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  no se le exige a la función  $f$  ninguna condición de regularidad.  $f$  puede tener un extremo relativo en un punto, sin que sea, ni siquiera, continua en él. Por ejemplo, si consideramos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Esta función tiene un máximo relativo en el punto  $(0,0)$ , pues  $f(0,0) = 1$  y  $f(x,y) < 1 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ . Esto sucede y claramente  $f$  no es continua en  $(0,0)$ .

### Condición necesaria de extremo relativo

**Definición 1.2** Sea el conjunto  $D$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Se llaman puntos críticos o estacionarios de  $f$  a aquellos puntos  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  tales que  $df(a) = 0$ .

**Teorema 1.1** Sea el conjunto  $D$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en un cierto punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ . Si  $f$  tiene un extremo relativo en el punto  $a$ , entonces la diferencial de  $f$  en  $a$  es nula, y por tanto también lo serán todas las derivadas parciales de  $f$  en  $a$ , es decir,  $f_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . En general, el recíproco es falso.

Por lo tanto, una condición necesaria pero no suficiente para que una función diferenciable  $f$  tenga un extremo relativo en el punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  es que  $a$  sea un punto crítico de  $f$ .

**Definición 1.3** Un punto crítico en el que no hay extremo relativo se denomina punto de silla.

**Ejemplo 1.1** La función  $f(x,y) = y^2 - x^2$  posee un punto crítico en  $(0,0)$  en el que no hay extremo relativo. Se trata, por lo tanto, de un punto de silla.

### Condición suficiente de extremo relativo

**Teorema 1.2** Sea el conjunto  $D$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$  (es decir, una función de clase 2), y  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  un punto crítico de  $f$ .

1. Si  $d^2 f(a) > 0, \forall (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow f$  tiene en  $a$  un mínimo relativo.
2. Si  $d^2 f(a) < 0, \forall (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow f$  tiene en  $a$  un máximo relativo.
3. Si  $d^2 f(a)$ , no tiene signo determinado  $\Rightarrow a$  es un punto de silla.

**Nota:**  $d^2 f(a)$  se puede expresar como:

$d^2 f(a) = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) Hf|_{x=a} (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^T$ , donde

$$Hf|_{x=a} = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) & \cdots & f''_{x_1 x_n}(a) \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2 x_2}(a) & \cdots & f''_{x_2 x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_n x_1}(a) & f''_{x_n x_2}(a) & \cdots & f''_{x_n x_n}(a) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

se denomina matriz Hessiana de la función  $f$  en el punto  $a$ . A su determinante se le denomina Hessiano de la función  $f$  en el punto  $a$ .

**Teorema 1.3 (Criterio de Sylvester)** Consideremos  $\Delta_k = \det(f''_{x_i x_j}(a))_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$ , es decir, el determinante del menor principal de orden  $k$ , es decir el que forman los elementos de las  $k$  primeras filas y las  $k$  primeras columnas del Hessiano de la función  $f$  en  $a$ , para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces se verifica que:

1. Si  $d^2 f(a) > 0$ ,  $\forall(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \Delta_k > 0, \forall k = 1, \dots, n$ .
2. Si  $d^2 f(a) < 0$ ,  $\forall(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0) \Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0, \forall k = 1, \dots, n$ .
3. Si  $d^2 f(a) \geq 0$ ,  $\forall(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \Delta_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n$ .
4. Si  $d^2 f(a) \leq 0$ ,  $\forall(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \neq (0, \dots, 0) \Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n$ .

Además, en el caso de dos variables, se puede afirmar que:

Si  $\Delta_2|_{x=a} < 0$ , entonces la función  $f$  presenta un punto de silla en  $a$ .

### 1.1.2. Extremos relativos condicionados

En la sección anterior hemos tratado los extremos relativos de funciones reales de  $n$  variables, donde a esas  $n$  variables no se les ha impuesto ninguna condición. Es decir, no había ninguna ligadura entre ellas, siendo independientes en el dominio de definición. A partir de ahora, sin embargo, veremos cómo calcular extremos relativos de una función, exigiendo además a las variables que satisfagan ciertas ecuaciones (o ligaduras). El problema podría resumirse (a grandes rasgos y en un caso muy particular de  $R^2$ ) como:

Dada una función “suficientemente regular”  $f(x, y)$  definida en un cierto dominio de  $R^2$ , se desean localizar los valores máximos y mínimos relativos que alcanza la función  $f$  cuando los puntos  $(x, y)$  satisfacen una cierta curva  $\phi(x, y) = 0$  (ligadura), del plano  $XY$ .

La resolución de este problema no es trivial y puede dar lugar a alguna curiosidad.

**Ejemplo 1.2** Sea la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Dicha función presenta un mínimo relativo en el punto  $(x, y) = (0, 0)$ . Sin embargo, cuando los puntos  $(x, y)$  se mueven sobre el cilindro  $x^2 + y - 1 = 0$ , la función tiene dos mínimos y un máximo.

En general, para determinarlos analíticamente, el problema a resolver sería el siguiente:

Sea el conjunto  $D$  un abierto de  $R^n$  y  $f : D \subseteq R^n \rightarrow R, f \in C^2$ . Sean las funciones  $\phi_i : D \subseteq R^n \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, m$ .

Llamaremos ligadura al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \phi_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Definimos el conjunto de puntos factibles como el conjunto de puntos del dominio que satisface la ligadura (1.2), i.e.,  $S = \{x \in D : \phi_i(x) = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$  y suponemos que el punto  $a \in D$  es un punto factible, es decir,  $a \in S$ .

Entonces, se dice que  $f$  tiene en el punto  $a$  un extremo relativo en sentido estricto condicionado por la ligadura (1.2), si existe un entorno reducido  $D^*$  de  $a$  tal que se verifica una de las condiciones siguientes:

$$f(a) > f(x) \quad \forall x \in D^* \cap S \quad (\text{en cuyo caso el extremo es un m\u00e1ximo})$$

$$f(a) < f(x) \quad \forall x \in D^* \cap S \quad (\text{en cuyo caso el extremo es un m\u00ednimo})$$

Se puede decir entonces que  $f$  tiene un extremo relativo condicionado por (1.2) si la restricci\u00f3n  $f|_S$  tiene un extremo relativo en  $a$ .

**Ejemplo 1.3** Resolveremos el problema planteado en el Ejemplo 1.2. Se trata de calcular los extremos relativos de la funci\u00f3n  $f(x, y) = x^2 + y^2$  con la condici\u00f3n  $\phi(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$ .

De la ecuaci\u00f3n de ligadura se puede despejar  $y$  en funci\u00f3n de  $x$  en cualquier punto de  $R^2$ , de manera que podemos expresar  $y = 1 - x^2$ . Si sustituimos  $y$  en la ecuaci\u00f3n de la superficie  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , el problema se resolver\u00e1 calculando los extremos libres de una funci\u00f3n de una sola variable:

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x^2)^2 = x^4 - x^2 + 1 = F(x)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & y = 1 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} & y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} & y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se puede comprobar que el primer punto cr\u00edtico es un m\u00e1ximo y los otros dos son m\u00ednimos ( $F''(0) < 0$ , y  $F''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = F''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ ).

Para poder utilizar el m\u00e9todo anal\u00edtico anterior, no s\u00f3lo es necesario que de las ligaduras se puedan “despejar”, de un modo efectivo,  $m$  de las variables en funci\u00f3n de las otras  $n - m$  restantes, cosa que ocurre en muy pocas ocasiones; sino que las expresiones que as\u00ed se obtienen deben definir realmente  $m$  funciones en un entorno de cada uno de los puntos que hayan de ser estudiados. Es decir, el procedimiento del ejemplo anterior no siempre puede ser utilizado y debemos buscar un m\u00e9todo alternativo. Uno de los m\u00e1s utilizados es el desarrollado por Lagrange.

### M\u00e9todo de los multiplicadores de Lagrange (Joseph-Louis Lagrange, Tur\u00edn, 25 Enero 1736- Par\u00eds, 10 Abril 1813)

Sea el conjunto  $D$  un abierto de  $R^n$  y las funciones  $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$  y  $\phi_i : D \subseteq R^n \rightarrow R$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  funciones de clase  $C^2$  en  $D$ . Supongamos  $m < n$  y el Jacobiano

(determinante de la matriz de primeras derivadas)

$$J\phi|_{x=a} = \left| \frac{D(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})} \right|_a \neq 0$$

siendo  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$   $m$  de las  $n$  componentes de  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Para determinar los extremos relativos de  $f$  condicionados por la ligadura (1.2), se procede del siguiente modo:

1. Se considera la función de Lagrange  $L = f - \lambda_1\phi_1 - \lambda_2\phi_2 + \dots - \lambda_m\phi_m$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  se denominan multiplicadores de Lagrange.
2. Se resuelve el sistema de  $n + m$  ecuaciones formado por:

$$dL(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow L'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (n \text{ ecuaciones}) \text{ y}$$

$$\phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (m \text{ ecuaciones}).$$

Es decir se determinan los puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  y  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  para los que se verifica el sistema de  $n + m$  ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \phi_m(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \phi_m(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_2} &= 0 \\ \vdots & \\ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \phi_m(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} &= 0 \\ \phi_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \phi_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots & \\ \phi_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

3. Para que en el punto  $x = a$  haya un extremo relativo condicionado **es necesario** que  $x = (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  sean solución del sistema de ecuaciones (1.3).
4. Para analizar si la función  $f$  tiene en el punto  $a$  (solución del sistema (1.3)) un extremo relativo condicionado la ligadura (1.2), se analiza el signo de  $d^2L(a)$  restringida por el sistema

$$\begin{cases} d\phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ d\phi_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ d\phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

(ver la resolución detallada del Ejercicios 2 en la siguiente sección). Entonces,

- a) Si  $d^2L(a)|R > 0 \Rightarrow f$  presenta en  $a$  un mínimo condicionado.
- b) Si  $d^2L(a)|R < 0 \Rightarrow f$  presenta en  $a$  un máximo condicionado.
- c) Si  $d^2L(a)|R$  no tiene signo determinado, entonces  $f$  tiene en  $a$  un punto de silla condicionado.

## 1.2. Extremos absolutos

**Definición 1.4** Sea  $f$  una función real definida en un dominio  $D \subseteq R^n$ . Se dice que  $f$  tiene un máximo (mínimo) absoluto en un punto  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$  si se verifica que  $f(a) \geq f(x)$  ( $f(x) \geq f(a)$ )  $\forall x \in D$

A estos puntos los denominamos extremos absolutos. El siguiente resultado hace referencia a la existencia de extremos absolutos.

**Teorema 1.4 (Teorema de Weierstrass)** Toda función continua en un conjunto cerrado y acotado alcanza en él, al menos una vez sus valores máximo y mínimo absolutos.

**Reseña:** Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, Provincia de Westphalia, Alemania, 31 Octubre 1815 Berlín, 19 Febrero 1897).

**Nota:** Se dice que un conjunto es cerrado si su complementario es abierto.

Observa que el Teorema 1.4 garantiza la existencia de los valores máximo y mínimo, pero no los identifica. El análisis que se realiza es la búsqueda de puntos críticos que satisfacen las condiciones de extremo relativo.

## 1.3. Ejercicios

1. Calcular los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$$

**Solución:**

$P_1(0, 0)$  punto de silla.  $P_2(-3, -3)$  máximo relativo.

2. Utilizar el método de Lagrange para calcular los extremos relativos de la función  $f(x, y, z) = xyz$  con la condición  $x + y + z = 9$ .

**Resolución:**

$$L = f(x, y, z) + \lambda(9 - x + y + z) = xyz + \lambda(9 - x + y + z)$$

$$L'_x = 0 : yz - \lambda = 0$$

$$L'_y = 0 : xz - \lambda = 0$$

$$L'_z = 0 : xy - \lambda = 0, \text{ de donde: } \lambda = zy = zx = xy.$$

Además:  $x + y + z = 9$ .

**Caso  $zy = zx$ :**

- a) Si  $z = 0$ , entonces  $\lambda = 0$  y  $xy = 0$ , de donde  $x = 0$  ó  $y = 0$ . Luego, aparecen las soluciones:

$$x = 0, y = 9, z = 0, \lambda = 0$$

$$x = 9, y = 0, z = 0, \lambda = 0$$

- b) Si  $z \neq 0$ , entonces  $x = y \neq 0$ ,  $y = z = x$ , de donde  $3x = 9$ . Aparece la solución:

$$x = 3, y = 3, z = 3, \lambda = 9$$

**Caso  $zx = xy$ :**

- a) Si  $x = 0$ , entonces  $zy = 0$ , de donde  $z = 0$  ó  $y = 0$ . Luego, aparecen las soluciones:

$$x = 0, y = 9, z = 0, \lambda = 0$$

$$x = 0, y = 0, z = 9, \lambda = 0$$

- b) Si  $x \neq 0$ , entonces  $z = y \neq 0$ ,  $y = z = x$ , de donde  $3x = 9$ . Aparece la solución:

$$x = 3, y = 3, z = 3, \lambda = 9$$

Se obtienen los puntos críticos:

$$(9, 0, 0); (0, 9, 0); (0, 0, 9); (3, 3, 3) .$$

Ahora analizamos el signo de  $d^2L(a)_R$ :

$$d^2L(a)_R = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{yz}dydz + 2L''_{xz}dxdz$$

Si calculamos las segundas derivadas:

$$L''_{xx} = 0; \quad L''_{xy} = z = L''_{yx}$$

$$L''_{yy} = 0; \quad L''_{xz} = y = L''_{zx}$$

$$L''_{zz} = 0; \quad L''_{yz} = x = L''_{zy}$$

Sustituyendo en la segunda diferencial:

$$d^2L(a)_R = 2zdx dy + 2xdy dz + 2ydx dz$$

Además, de 1.4,  $d\phi = dx + dy + dz = 0$ , de donde  $dx = -dy - dz$ .

Sustituyendo ésta expresión en la segunda diferencial:

$$d^2L(a)_R = -2zdy^2 - (2z - 2x + 2y)dydz - 2ydz^2.$$

Es decir, la matriz Hessiana en el punto  $(x, y, z)$ , es:

$$Hf|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -2z & -(z-x+y) \\ -(z-x+y) & -2y \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

En  $(9, 0, 0)$ :  $Hf|_{(9,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 < 0$ , luego es un punto de silla.

En  $(0, 9, 0)$ :  $Hf|_{(0,9,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & -18 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 < 0$ , luego es un punto de silla.

En  $(0, 0, 9)$ :  $Hf|_{(0,0,9)} = \begin{pmatrix} -18 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 < 0$ , luego es un punto de silla.

En  $(3, 3, 3)$ :  $Hf|_{(3,3,3)} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , luego  $Hf|_{(3,3,3)}$  es definida negativa y este punto es un máximo relativo condicionado.

**Solución:**

$P_1(3, 3, 3)$ ,  $\lambda = 9$ , máximo relativo.

$P_2(9, 0, 0)$ ,  $\lambda = 0$ , punto de silla.

$P_3(0, 9, 0)$ ,  $\lambda = 0$ , punto de silla.

$P_4(0, 0, 9)$ ,  $\lambda = 0$ , punto de silla.

3. Calcular los extremos relativos de la función  $f(x, y, z) = x + y + 2z$  con las condiciones:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

**Solución:**

$P_1(1, 3, -2)$ ,  $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = -2$  mínimo relativo.

$P_1(-1, 3, 6)$ ,  $\lambda_1 = \frac{-1}{6}$ ,  $\lambda_2 = -2$  máximo relativo.

4. Calcular (en unidades al cuadrado) el área del rectángulo de área máxima inscrito en la elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  con los lados paralelos a los ejes de la elipse.

**Solución:**

$A = 4u^2$ .

5. Dado el elipsoide de ecuación  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 12$ , calcular las dimensiones de un ortoedro (paralelepípedo rectangular con las caras paralelas a los planos de referencia) inscrito en el elipsoide de forma que su volumen sea máximo.

**Solución:**

$$x = 2, y = 1, z = 2, V = 32u^3.$$

6. Determinar un triángulo isósceles inscrito en la elipse  $x^2 + 3y^2 = 12$ , siendo el punto  $(0, -2)$  uno de los vértices, el lado desigual paralelo al eje  $OX$  y de tal forma que su área sea máxima.

**Solución:**

$$\text{Vértices: } (0, -2), (3, 1), (-3, 1); \text{ área} = 9u^2.$$

7. Determinar los extremos absolutos de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en el círculo  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 8$ .

**Resolución:**

$$L = f(x, y) + \lambda(8 - (x - 1)^2 + (y - 1)^2) = x^2 + y^2 + \lambda(8 - (x - 1)^2 + (y - 1)^2).$$

$$L'_x = 0 : 2x - 2\lambda(x - 1) = 0$$

$$L'_y = 0 : 2y - 2\lambda(y - 1) = 0$$

De donde:  $\lambda = \frac{2x}{2(x-1)} = \frac{2y}{2(y-1)}$ , o equivalentemente:  $x(y - 1) = y(x - 1) \Rightarrow x = y$ .

Además:  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 8$ . Luego,  $(x - 1)^2 + (x - 1)^2 \leq 8 \Rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2$ .

El conjunto de puntos críticos es el compacto  $R = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 3; x = y\}$ . Por el teorema de Weierstrass,  $f$  continua en un compacto, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en él.

Analizando  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en  $R$ , vemos que  $f(0, 0) = 0$ , luego  $(0, 0)$  es un mínimo absoluto y  $f(3, 3) = 18$ , luego  $(3, 3)$  es un máximo absoluto.

**Solución:**

Mínimo absoluto:  $f(0, 0) = 0$ .

Máximo absoluto:  $f(3, 3) = 18$ .

8. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una piscina abierta, paralelepípedo rectangular, de una capacidad de  $V = 4000 \text{ m}^3$ , para que la superficie a embaldosar en la construcción de dicha piscina sea mínima?

**Solución:**

Largo:  $x = 20m$ , ancho:  $y = 20m$ , profundidad:  $z = 10m$ . Superficie:  $1200m^2$ .

9. Se desea recubrir con un aislante la superficie exterior en contacto con el aire de un depósito de  $(8000/3)\pi \text{ m}^3$  de capacidad. El depósito, apoyado en el suelo,

está formado por una parte cilíndrica y una bóveda semiesférica. El material para aislar la superficie lateral cilíndrica tiene un precio en el mercado de 10 euros/ $m^2$  y el precio correspondiente para la superficie esférica es de 20 euro/ $m^2$ .

Dimensionar el depósito de forma que el coste del aislamiento sea mínimo y calcular el precio total del aislante, sabiendo que el mínimo existe.

Nota: Fórmula del área de la superficie de una esfera  $4\pi r^2$ , siendo  $r$  el radio de la esfera. Fórmula del volumen de una esfera:  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , siendo  $r$  el radio de la esfera.

**Solución:**

Dimensiones del cilindro: radio  $10m$ , altura  $20m$ .

Coste del recubrimiento:  $8000\pi$  euros.

10. El reglamento postal de algunos países estipula que una caja paralelepípeda pueda enviarse por correo si la longitud más el fleje es igual a  $90cm$ . ¿Cuál es el máximo volumen que puede enviarse?

Nota: El fleje es el perímetro de la sección de la caja perpendicular al lado más largo. Entiéndase por longitud de la caja a la medida del lado más largo.

**Solución:**

Dimensiones de la caja: largo  $x = 30u$ , ancho  $y = 15u$ , alto  $z = 15u$ .

Volumen:  $V = 6750u^3$ .

11. Desde el vértice de un cono recto de sección circular de radio  $R$  y altura  $H$ , se deja caer una bola, a lo largo de la generatriz, con velocidad constante  $v$  que viene dada por la ecuación  $v = G^2$ , siendo  $G$  la longitud de la generatriz. Calcular, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, las dimensiones del cono para que la velocidad de caída sea mínima, sabiendo que el mínimo existe y que el volumen del cono es  $\frac{2000\pi}{3}$ .

Nota: La fórmula del volumen de un cono de sección circular es:  $v = \frac{\pi R^2 H}{3}$ , donde  $R$  es el radio y  $H$  es la altura del cono.

**Solución:**

Dimensiones del cono: Radio  $R = 10\sqrt{2}$ , altura  $H = 10$ .

Velocidad de la caída:  $V = 300$ .

12. Calcular los puntos donde la función  $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8$  alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en el conjunto  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, y \geq -2, x - y + 2 \geq 0\}$ .

**Solución:**

Mínimo absoluto:  $f(-4, -2) = -32$ .

Máximo absoluto:  $f(1, 3) = 18$ .

13. Hallar los extremos absolutos de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  en el recinto limitado por

$$\begin{cases} x + y \geq -3 \\ x \leq y \\ y \leq 0 \end{cases}$$

**Solución:**

Máximo absoluto:  $f(-3, 0) = 6$ .

Mínimo absoluto:  $f(-1, -1) = -1$ .

#### 1.4. Tarea de aprendizaje

A la vista del número de alumnos en el grupo, repartir los ejercicios de la sección anterior, salvo el 2 y el 7, entre el grupo de estudiantes, de manera que cada grupo trabaje un conjunto de ejercicios y presente la resolución completa ante sus compañeros.

## Capítulo 2

# Optimización no lineal

En este capítulo seguiremos estudiando el problema de la optimización de una función real en general no lineal de varias variables, condicionadas por la satisfacción de una serie de condiciones o ligaduras adicionales. Lo haremos desde el punto de vista de la Optimización Matemática y para ello estudiaremos la formulación de un problema de programación (optimización) no lineal (PNL) en formato estándar.

La diferencia fundamental con las técnicas mostradas en el capítulo anterior, es que en lugar de estar basadas en cálculo analítico (derivadas y diferenciales), ahora encontraremos la forma de implementar los pasos fundamentales de estas técnicas para resolver los problemas mediante el uso de software de optimización ejecutado en un ordenador.

La técnica de resolución más habitual de este tipo de problemas es el método de Lagrange, introducida en el capítulo anterior. Profundizaremos en el empleo analítico de esta técnica y analizaremos algunos de los inconvenientes más habituales en el carácter de la solución encontrada. Mostraremos las interpretaciones económicas de los multiplicadores de Kuhn-Tucker. Para finalizar el capítulo, describiremos el manejo de una herramienta de resolución de problemas de programación matemática con ordenador: el programa GAMS, *General Algebraic Modelling System*

Parte de las afirmaciones que se hacen en este capítulo y en los posteriores, tienen su base en el Teorema de Weierstrass (Teorema 1.4), introducido también en el capítulo anterior.

Es importante recordar que este resultado garantiza la existencia de un óptimo, pero no lo identifica. El análisis que se realiza es la búsqueda de puntos críticos  $x_0$ , que satisfacen las condiciones de óptimo relativa o localmente. Estos valores se denominan óptimos relativos o locales. El siguiente resultado nos indica cuándo podemos garantizar que el óptimo local (relativo) encontrado es un óptimo global (absoluto).

**Teorema 2.1 (Teorema local-global)** *Dado un problema de programación matemática, donde el conjunto que define la región factible,  $S \subset \mathbb{R}^n$ , es convexo y*

no vacío,  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y denotamos por  $f(x), x \in S$  a la función a optimizar, entonces se verifica:

1. Si  $f(x)$  es convexa en  $S$  y tiene un mínimo local en  $x_0 \in S$ , entonces tiene un mínimo global en  $x_0$ .
2. Si  $f(x)$  es estrictamente convexa en  $S$  y tiene un mínimo local en  $x_0 \in S$ , entonces tiene un mínimo global estricto en  $x_0$ .
3. Si  $f(x)$  es cóncava en  $S$  y tiene un máximo local en  $x_0 \in S$ , entonces tiene un máximo global en  $x_0$ .
4. Si  $f(x)$  es estrictamente cóncava en  $S$  y tiene un máximo local en  $x_0 \in S$ , entonces tiene un máximo global estricto en  $x_0$ .

Demostraremos el apartado 3. del teorema anterior y lo haremos por reducción al absurdo, es decir partiremos de que no se verifica y veremos que se llega a una contradicción, luego el resultado ha de ser cierto. Lo haremos para el caso particular de  $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sea  $f(x)$  una función cóncava en  $S \subset \mathbb{R}$  con un máximo local en  $x_0$  y supongamos que  $x_0$  no es máximo global. Es decir, existe otro valor  $x' \in S$  tal que  $f(x') > f(x_0)$ . Si  $f(x)$  es cóncava en  $S$ , se cumple:

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda)x_0) \geq \lambda f(x') + (1 - \lambda)f(x_0), \forall \lambda \in [0, 1]$$

Como  $f(x') > f(x_0)$ ,  $f(\lambda x' + (1 - \lambda)x_0) > \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_0) = f(x_0)$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ . Luego con un valor de  $\lambda$  suficientemente pequeño, existe un nuevo valor  $x'' = \lambda x' + (1 - \lambda)x_0$  cerca de  $x_0$ , tal que  $f(x'') > f(x_0)$ . Se deduce entonces que  $x_0$  no es un máximo local. Llegamos, por tanto a una contradicción, al negar la hipótesis de partida, luego ésta debe ser cierta.

De ahora en adelante a la función real a optimizar,  $f$ , la denominaremos función objetivo (f.o.) y a la región  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  que define el sistema de ligaduras la denominaremos región factible del problema.

A modo de resumen, observar que:

**Definición 2.1** Un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es compacto si es cerrado y acotado.

En particular, las regiones factibles definidas por la intersección de hiperplanos definidos por desigualdades  $\leq$ ,  $\geq$ , ó  $=$ , son cerrados. Además  $S$  es acotado, si en él todas las variables están acotadas superior o inferiormente.

**Definición 2.2** Diremos que la función  $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es cóncava en  $S$ , si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$$

$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x \in S$ . Si la desigualdad es estricta la función se dice estrictamente cóncava. Diremos que la función  $f(x)$  es convexa en  $S$ , si no es cóncava.

Cuando trabajamos con funciones reales de varias variables, es decir  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que la función  $f$  es cóncava, cuando su matriz Hessiana asociada (matriz de segundas derivadas parciales introducida en (1.1)) es semidefinida negativa (i.e.,  $d^2f \leq 0$ ). Si dicha matriz es definida negativa, la función  $f$  se dice estrictamente cóncava. Análogamente, si la matriz Hessiana asociada es semidefinida (definida) positiva,  $f$  se dice (estrictamente) convexa.

Recordar además el Criterio de Sylvester (Teorema 1.3) aplicado en este caso a una matriz cuadrada (de orden  $n$ ) simétrica (por ser una forma cuadrática)  $A$ , según el cual:

1. Si  $|A| \neq 0$  y el determinante de todos sus menores principales ( $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ ) es positivo, entonces  $A$  es definida positiva.
2. Si  $|A| \neq 0$  y el determinante de todos sus menores principales de orden impar es negativo y el de los de orden par, positivo, es decir  $((-1)^k \Delta_k, k = 1, \dots, n)$  es positivo, entonces  $A$  es definida negativa.
3. Si el determinante de todos sus menores principales ( $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ ) es positivo o cero, entonces  $A$  es semidefinida positiva.
4. Si el determinante de todos sus menores principales de orden impar es negativo o cero y el de los de orden par, positivo o cero, es decir  $((-1)^k \Delta_k, k = 1, \dots, n)$  es positivo o cero, entonces  $A$  es semidefinida negativa.
5. Si  $|A| \neq 0$  y no se cumple ni 1. ni 2. o si no se cumple ni 3. ni 4., entonces  $A$  es indefinida.

Las regiones factibles definidas como intersección de hiperplanos definidos por ecuaciones lineales son polítopos y por lo tanto conjuntos convexos. De acuerdo con la definición de función cóncava y convexa, las funciones lineales son cóncavas y convexas a la vez.

A los problemas de programación no lineal que satisfacen las condiciones del Teorema local-global (2.1), se les denomina problemas convexos.

## 2.1. Problemas no lineales en formato estándar

Comenzaremos por definir qué se entiende por formato estándar de un problema de optimización no lineal. Si es un problema de maximización, la forma estándar es:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{s.a} & \\ & \phi_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i \end{array}$$

$$i = 1, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n$$

Alternativamente, si es de minimización:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x_1, \dots, x_n) \\ &\text{s.a} && \\ &&& \phi_i(x_1, \dots, x_n) \geq b_i \\ &&& i = 1, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde las funciones  $f$  y  $\phi$  son de clase  $C^2$  es decir continuas y diferenciables hasta el segundo orden. Así pues el formato estándar de un PNL es de maximizar con condiciones de ligadura que se satisfacen con desigualdad  $\leq$  o minimizar con condiciones de ligadura que se satisfacen con desigualdad  $\geq$ .

Estableceremos a continuación las condiciones que debe de cumplir un punto para ser punto crítico en un PNL en fomato estándar y enunciaremos las condiciones necesarias y suficientes de óptimo global.

**Definición 2.3 (Función Lagrangeana)** *Dado un PNL en formato estándar, recordamos que definimos como función lagrangeana del problema a la función:*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^{n+m} &\implies \mathbb{R} \\ L(x, \lambda) &= f(x) + \lambda_1(b_1 - \phi_1(x)) + \dots + \lambda_m(b_m - \phi_m(x)) \\ \lambda_i &\geq 0, \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Entonces, en problemas de **maximización en formato no estándar**, los multiplicadores asociados a restricciones de igualdad o desigualdad de mayor o igual, podrán ser respectivamente sin signo o negativos ( $\leq 0$ ). En problemas de **minimización en formato no estándar**, los multiplicadores asociados a restricciones de igualdad o desigualdad de menor o igual, podrán ser respectivamente sin signo o negativos ( $\leq 0$ ).

**Definición 2.4 (Puntos de Kuhn-Tucker)** *Dado un PNL en formato estándar, un punto  $(x^*, \lambda^*)$  se dice de K-T si cumple las siguientes condiciones:*

1.  $\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, \dots, n$  (punto crítico)
2.  $\lambda_j^*(b_j - \phi_j(x^*)) = 0, \forall j = 1, \dots, m$  (holgura complementaria)
3.  $\lambda_j^* \geq 0, \forall j = 1, \dots, m$  (signo)
4.  $\phi_j(x^*) \leq b_j, \forall j = 1, \dots, m$  ( $\geq$ , si es el caso) (factibilidad)

A los valores de  $\lambda_j^*$  (multiplicadores de Lagrange) utilizados en este tipo particular de problemas de optimización no lineal se les llama multiplicadores de Kuhn-Tucker.

Es decir los puntos de Kuhn-Tucker, son las soluciones del sistema correspondiente al definido en (1.3). En la práctica conviene seguir el orden de comprobación: (factibilidad), (holgura-complementaria), (punto crítico) y (signo).

**Definición 2.5 (Cualificaciones de restricciones)** *Se denominan a las siguientes:*

1. *No hay restricciones*
2. *Las restricciones son lineales*
3. *Satisfacen las siguientes condiciones de regularidad: Todo punto  $x^*$  factible del PNL es regular, esto es: es factible interior o los gradientes de las restricciones activas en  $x^*$ , forman un conjunto de vectores linealmente independientes.*

**Proposición 2.1 (Condición necesaria K-T)** *Consideremos un problema de programación no lineal en el que tanto la función objetivo como las restricciones sean de clase  $C^2$  y se cumpla una cualificación de restricciones. Entonces, para todo óptimo local  $x^*$  del problema, existe un vector de multiplicadores  $\lambda^*$ , tal que  $(x^*, \lambda^*)$  es un punto de K-T.*

**Proposición 2.2 (Condición suficiente K-T)** *Consideremos un problema de programación no lineal en el que tanto la función objetivo como las restricciones sean de clase  $C^2$ , con región factible convexa. Se verifica que:*

1. *Si la f.o. es (estrictamente) convexa y el problema es de minimización, entonces todo punto de K-T es un mínimo global (estricto).*
2. *Si la f.o. es (estrictamente) cóncava y el problema es de maximizar, entonces todo punto de K-T es un máximo global (estricto).*

Si todos los puntos factibles satisfacen una cualificación de restricción, entonces los puntos de K-T recogen a todos los candidatos a óptimo global, aunque éste puede no existir.

En general, no podemos afirmar que todo punto de K-T sea una solución óptima. Puede suceder que un punto de K-T no sea óptimo global o incluso local del problema.

Para que se cumpla la condición suficiente de K-T no se requiere una cualificación de restricciones.

En el capítulo anterior vimos cómo combinando la condición necesaria de K-T, es decir una vez encontradas las soluciones del sistema (1.3), y el Teorema de Weierstrass, obtuvimos un procedimiento para obtener óptimos globales en problemas no convexos con regiones factible compactas.

El razonamiento es el mismo que se emplea ahora: por el Teorema de Weierstrass, sabemos que un PNL en forma estándar con región factible no vacía y acotada (compacta) tiene garantizada la existencia de óptimo global. Si además se cumple alguna cualificación de restricciones, ese óptimo global, por la condición necesaria será un punto de K-T. Así pues, nuestro procedimiento consistirá en: a) calcular todos los puntos de K-T, b) evaluar en ellos la f.o. y, c) quedarnos con el que nos proporcione el óptimo.

**Ejemplo 2.1** *Analícemos ahora el problema (pág. 51 de B. Font(2006)) :*

$$\begin{aligned} \text{Opt} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a} \quad & x + y \leq 5 \\ & x - y \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Lo primero que observamos en el problema es:

1. La f.o. es convexa. La matriz hessiana es una matriz diagonal  $(2, 2)$  con determinante positivo, luego es una matriz definida positiva. A su vez la región factible es un polítopo, luego es una región convexa.
2. El problema de minimización es un problema convexo y se puede aplicar la condición suficiente de mínimo global.
3. El problema de maximización no es un problema convexo, pues para ello, la f.o. debería ser cóncava, y por lo tanto no se puede aplicar la condición suficiente de máximo global.
4. La región factible es no vacía, cerrada y acotada, y la f.o. es continua en  $S$ , por ser un polinomio. Luego estamos en las condiciones del teorema de Weierstrass y la función tiene un máximo y un mínimo global en  $S$ .
5. El problema se puede representar y resolver gráficamente en el plano, obteniéndose el mínimo global en  $(0, 0)$  y el máximo global en  $(0, 5)$ .

Analíticamente podemos llegar al mismo resultado, ver Ejercicio 3.

## 2.2. Interpretación de los multiplicadores K-T

En muchos problemas reales, los coeficientes de la f.o. y/o restricciones del modelo no son conocidos con exactitud o pueden variar. El teorema de la envolvente que veremos a continuación, nos indica cómo varía la función objetivo en el óptimo para variaciones pequeñas en uno o varios elementos del problema. Analizamos a continuación el problema de maximización, aunque los resultados son igualmente válidos para un problema de minimización.

**Definición 2.6 (Función valor)** *Se considera el PNL:*

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k) & (2.1) \\ \text{s. a} \quad & \\ & \phi_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \leq 0 \\ & i = 1, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde  $f, \phi_1, \dots, \phi_m$  son funciones de clase  $C^2$ , siendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  el vector de variables de decisión y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  el vector de parámetros, (pueden ser coeficientes de la f.o, coeficientes de las restricciones o términos independientes de las mismas) del modelo. Es decir,  $k = n + n \cdot m + m$ .

Sea  $A \subset \mathbb{R}^k$  un conjunto abierto y supongamos que existe  $\forall \alpha \in A$   $x^*(\alpha) = (x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha))$  solución óptima del problema (2.1), en la que se verifican las condiciones de K-T con multiplicadores de Lagrange asociados:

$$\lambda^* = (\lambda_1^*(\alpha), \dots, \lambda_m^*(\alpha))$$

Entonces la función lagrangeana asociada al problema (2.1), es:

$$\begin{aligned} L(\lambda, x, \alpha) &= f(x, \alpha) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(0 - \phi_i(x, \alpha)) = \\ &= f(x, \alpha) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i(x, \alpha) \end{aligned}$$

siendo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

Se define además la función valor, o función objetivo indirecta como:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= f((x_1^*(\alpha), \dots, x_n^*(\alpha), \alpha)) = & (2.2) \\ &= L(\lambda^*, x^*, \alpha) \end{aligned}$$

**Teorema 2.2 (Teorema de la envolvente)** *Dado el problema (2.1) y las condiciones de la Definición 2.6, siendo (2.2) la función valor del problema, entonces se verifica,  $\forall \alpha_j, j = 1, \dots, k$ :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial L(\lambda^*(\alpha), x^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha_j} = \\ &= \frac{\partial f(x^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i(\alpha) \frac{\partial \phi_i(x^*(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha_j} \end{aligned}$$

Un caso particular del teorema anterior resulta al estudiar cómo varía la f.o. de un problema ante pequeños cambios en los términos independientes de las restricciones.

Para obtener el resultado basta con considerar  $f(x, \alpha = b_i)$  como  $f(x)$ , de donde  $\frac{\partial f(x^*, b_i)}{\partial b_i} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial b_i} = 0$ ; siendo  $\phi_i(x, \alpha = b_i) = \phi_i - b_i, \forall i = 1, \dots, m$ . En este caso, si  $x^*$  representa un óptimo del PNL diferenciable con multiplicador de K-T asociado  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , se cumple por el Teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial V(b)}{\partial b_i} = -\lambda_i(-1) = \lambda_i$$

Es decir, el multiplicador nos da la tasa marginal de variación en la f.o. ante una pequeña variación del correspondiente término independiente. O lo que es lo mismo:

$$\Delta V = \Delta f \quad \approx \quad \lambda_i \Delta b_i$$

Si la  $i$ -ésima restricción, no está saturada, i.e. no se alcanza con igualdad en el óptimo, entonces la condición de holgura complementaria implica que  $\lambda_i = 0$ , y por lo tanto una variación del término independiente correspondiente,  $b_i$ , no altera el valor de la f.o. en el óptimo. Si la  $i$ -ésima restricción, está saturada, i.e. se alcanza con igualdad en el óptimo y  $\lambda_i \neq 0$ , no tenemos información sobre el comportamiento de la f.o. en el óptimo al variar ligeramente el término independiente  $b_i$ .

**Ejemplo 2.2** *Considera el problema del consumidor definido en pág. 17 de B. Font(2006): Las preferencias de un consumidor respecto al consumo de dos bienes  $x$  e  $y$  se pueden representar mediante la función de utilidad  $U_1$ . Sabiendo que los precios unitarios de estos bienes son 1 y 2 u.m. respectivamente y la renta disponible es de 10 u.m. Determina la cantidad que debe adquirir este consumidor para maximizar su utilidad. El problema se formula como un modelo no lineal,*

$$\begin{aligned} \text{máx } U_1 &= x + 4\sqrt{y} & (2.3) \\ \text{s. a} & & \\ & x + 2y \leq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

*Observar que el máximo global del problema es  $(x^*, y^*) = (8, 1)$ , con una utilidad máxima de  $U_1^* = 12$ , y  $\lambda = 1$ .*

*Analícemos cuál es la utilidad máxima aproximada si el precio del primer bien,  $p_1$  aumenta en 0.1 u.m.*

Construimos la función lagrangeana:

$$L(\lambda, x, y, p_1) = x + 4\sqrt{y} + \lambda(10 - p_1 x - 2y)$$

Aplicando el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial V(p_1)}{\partial p_1} = -\lambda x^* = -1 \cdot 8 = -8$$

es decir  $\Delta V = \Delta U_1 \approx -8\Delta p_1$ . Si  $\Delta p_1 = 0,1$ ,  $\Delta U_1 = -0,8$ . La variación será de disminución en 0.8 u.m. Por lo tanto la nueva f.o. será de  $U^* = 11,2$ .

**Ejemplo 2.3** *Consideremos ahora, en el problema del consumidor del ejemplo anterior, la función de utilidad  $U_2 = 4x + y^2$ . Vamos a ver qué efecto tiene sobre la utilidad el aumento de 0.1 u.m. del precio del segundo bien.*

El máximo global del problema es  $(x^*, y^*) = (10, 0)$ ,  $U_2^* = 40$ , y  $\lambda = 4$ .

Construimos la función lagrangeana:

$$L(\lambda, x, y, p_2) = 4x + y^2 + \lambda(10 - p_1x - p_2y)$$

Aplicando el teorema de la envolvente:

$$\frac{\partial V(p_2)}{\partial p_2} = -\lambda^* y^* = -4 \cdot 0 = 0$$

es decir  $\Delta V = \Delta U_2 \approx 0$ . La variación será despreciable si se incrementa el precio del segundo bien.

**Ejemplo 2.4** *Por último vamos a analizar qué efecto tendría sobre la función de utilidad  $U_2$ , una disminución simultánea de los precios de los dos bienes en 0.1 u.m.*

Recordemos que el máximo global del problema es  $(x^*, y^*) = (10, 0)$ ,  $U_2^* = 40$ , y  $\lambda = 4$ . Aplicando el teorema de la envolvente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(p_1)}{\partial p_1} &= -\lambda^* x^* = -4 \cdot 10 = -40 \\ \frac{\partial V(p_2)}{\partial p_2} &= -\lambda^* y^* = -4 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $dV = \frac{\partial V(p_1)}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial V(p_2)}{\partial p_2} dp_2$ , el efecto conjunto de una disminución del precio de 0.1 u.m. de ambos bienes, supondría  $\Delta V = \Delta U_2 \approx -40 \cdot (-0,1) + 0 \cdot (-0,1) = 4$ , i.e., un incremento de cuatro unidades en la utilidad.

## 2.3. Resolución numérica de problemas de programación no lineal

Como hemos dicho al comienzo de la materia, utilizaremos el programa GAMS para la resolución de problemas de programación matemática, tanto no lineal como lineal.

Este programa, desarrollado inicialmente por técnicos del Banco Mundial para evaluar los modelos de crecimiento de países en vías de desarrollo, ha sido ampliado para resolver un gran número de problemas y dispone de una versión demo gratuita.

Para poder descargarte esta versión, debes conectarte a la dirección:

<http://www.gams.com/download>

y bajarte la versión adecuada a tu ordenador. Actualmente está disponible la versión 23.5.2 para Windows. El proceso de descarga dura unos minutos, y al final el fichero ejecutable `windows_x86_32.exe`, es guardado en tu máquina. Si clicas dos veces sobre dicho nombre, se produce la instalación automáticamente en el lugar adecuado, y es visible un icono en tu escritorio.

Para que GAMS funcione correctamente, debemos crear un proyecto. El proyecto es un archivo de extensión `.qpr` que establece un enlace con el directorio de trabajo. Para crear un proyecto, clicar en el icono de GAMS, y acto seguido `File->Project->New Project`. Al proyecto hay que darle un nombre. En nuestro caso y a la vista del ejemplo de ensayo, el nombre de proyecto elegido es *horno*.

Una vez creado el proyecto, debemos generar un fichero con los datos del problema. Debe ser un fichero con extensión `.gms` y con una estructura particular. Este fichero debe estar situado en nuestro directorio de trabajo. Nosotros utilizaremos uno ya creado, `horno.gms`. Para crear este fichero, `File->Open`, ir al directorio de trabajo y abrir ahí el fichero. Guardar antes de salir.

El programa GAMS tiene implementados distintos solvers, o algoritmos de resolución. Cuando se ejecuta GAMS por primera vez, el programa pide seleccionar de una tabla cuáles van a ser los solvers por defecto a utilizar en la solución de cada problema tipo.

Para ejecutar el programa GAMS y resolver el problema, desde el fichero `.gms`, seleccionar `File->Run`. Esto, genera un fichero `.lst`, con la solución del problema.

Vamos a ver el proceso completo en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.5** *Un horno-cafetería ofrece a sus clientes tres tipos de bollería: galletas, madalenas y panquemados que elabora artesanalmente en su obrador. En la elaboración de estos productos se emplean harina, azúcar y aceite en las siguientes proporciones:*

	<i>Harina</i>	<i>Azúcar</i>	<i>Aceite</i>
<i>Galletas</i>	<i>6</i>	<i>2</i>	<i>1</i>
<i>Madalenas</i>	<i>4</i>	<i>8</i>	<i>2</i>
<i>Panquemado</i>	<i>8</i>	<i>3</i>	<i>1</i>

*Además junto al agua y levadura necesarias en el proceso de amasado y fermentación, respectivamente de la masa, se añaden 1 huevo y 130 ml. de leche (aproximadamente medio vaso) por kg. de masa de galletas, 2 huevos por kg. de masa de madalenas y 3 huevos por kg. de masa de panquemados.*

*Para la producción semanal disponemos de 125kg. de harina, 60kg. de azúcar, 20 litros de aceite (la densidad del aceite es de 0.92 kg./l.), 12 litros de leche y 8 docenas de huevos.*

*La empresa es conocida por sus panquemados que representan al menos el 40% de su producción de bollería, mientras que los otros productos representan al menos el 10%*

del total.

Sabemos que la función de ingresos semanales de la empresa es  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz$  donde  $x, y, z$  son las cantidades producidas en kg. de galletas, madalenas y panquemados, respectivamente y los costes de producción por kg. son de 1.5 euros por kg. de galleta, 1.8 euros por kg. de madalena y 1.4 euros por kg. de panquemado.

Si el objetivo de la empresa es maximizar el beneficio semanal, ¿qué cantidad debe fabricar semanalmente la empresa de cada producto?

A partir del enunciado del problema, el planteamiento matemático del mismo es:

$$\text{máx } B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4yz - (1,5x + 1,8y + 1,4z) \quad (2.4)$$

$$\text{s.a.} \quad : \quad \left(\frac{6}{9}\right)x + \left(\frac{4}{14}\right)y + \left(\frac{8}{12}\right)z \leq 125 \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)x + \left(\frac{8}{14}\right)y + \left(\frac{3}{12}\right)z \leq 60 \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)x + \left(\frac{2}{14}\right)y + \left(\frac{1}{12}\right)z \leq 20 \cdot 0,92 \quad (2.7)$$

$$z - 0,4(x + y + z) \geq 0 \quad (2.8)$$

$$(x + y) - 0,1(x + y + z) \geq 0 \quad (2.9)$$

$$x, y, z \geq 0 \quad (2.10)$$

Donde  $x, y, z$  son los kg. elaborados semanalmente por el horno de galletas, madalenas y panquemados, respectivamente. Las variables del problema son todas continuas positivas, las restricciones lineales y la f.o. no lineal. Es un problema de programación no-lineal.

Atendiendo a las necesidades de GAMS, debemos editar un fichero con el código de descripción del problema, horno.gms. En él, hemos de especificar en el Bloque de variables, las que aparecen en el problema,

VARIABLES X,Y,Z,B ;

y el tipo de variable. Por defecto, se consideran continuas y libres,

POSITIVE VARIABLES X, Y, Z;

y las cotas, si fuese necesario, con las sentencias  $X.LO = 2$  (para escribir  $x \geq 2$ ) o  $Y.UP = 5$  (para escribir  $y \leq 5$ ).

También en este bloque, se puede introducir el punto inicial de arranque del algoritmo. Por defecto toma el (0,0,0). Nosotros le daremos el (10,0,10).

X.L= 10; Y.L=0; Z.L= 10;

En el Bloque de ecuaciones, recuerda que si quieres introducir una potencia entera y no está claro que la potencia sea positiva, debe usarse la función: POWER(base, potencia).

En nuestro ejemplo hay 5 ecuaciones:

EQUATIONS BENEF, HARINA, ACEITE, ESTR1, ESTR2;

Se describen a continuación cada una de ellas:

BENEF.. B =e= POWER(X,2)+2\*POWER(Y,2)+3\*POWER(Z,2)-4\*Y\*Z-1.5\*X-1.8\*Y-1.4\*Z ;

HARINA.. (6/9)\*X+ (4/14)\*Y +(8/12)\*Z =l= 125;

AZUCAR.. (2/9)\*X+ (8/14)\*Y +(3/12)\*Z =l= 60;

ACEITE.. (1/9)\*X+ (2/14)\*Y +(1/12)\*Z =l= 20\*0.92;

ESTR1.. Z-0.40\*(X+Y+Z) =g= 0;

ESTR2.. (X+Y)-0.10\*(X+Y+Z) =g= 0;

Posteriormente se nombra el modelo

MODEL HORNO /ALL/ ;

Y se describe el tipo de optimización necesaria:

SOLVE HORNO USING NLP MAXMIZING B ;

Todo ello, debe ser editado en el fichero horno.gms.

Variables x, y, z, b;

Positive Variables x, y,z ;

Equations Benef, harina, azucar, aceite, estr1, estr2;

BENEF.. B =e= POWER(X,2)+2\*POWER(Y,2)+3\*POWER(Z,2)

-4\*Y\*Z-1.5\*X-1.8\*Y-1.4\*Z ;

HARINA.. (6/9)\*X+ (4/14)\*Y +(8/12)\*Z =l= 125 ;

AZUCAR.. (2/9)\*X+ (8/14)\*Y +(3/12)\*Z =l= 60 ;

ACEITE.. (1/9)\*X+ (2/14)\*Y +(1/12)\*Z =l= 20\*0.92 ;

ESTR1.. Z-0.40\*(X+Y+Z) =g= 0 ;

ESTR2.. (X+Y)-0.10\*(X+Y+Z) =g= 0 ;

MODEL HORNO /ALL/ ;

SOLVE HORNO USING NLP MAXMIZING B ;

Observa que GAMS no diferencia entre mayúsculas y minúsculas, por lo que puedes emplear cualquiera de las dos posibilidades o mezclarlas.

Cuando se corre GAMS, sobre el código anterior, se genera el fichero horno.lst. Si probamos con distintos puntos de arranque, obtenemos los resultados que aparecen en la siguiente tabla:

	P. de arranque	Sumario Solver	Óptimo
[1]	(0, 10, 0)	Loc. optimal	$x = y = z = 0, b = 0$
[2]	(10, 0, 10)	Loc. optimal	$x = 18,75, y = 0, z = 168,45, b = 85516,875$
[3]	(0, 0, 10)	Loc. optimal	$x = y = z = 0, b = 0$
[4]	(10, 10, 10)	Loc. optimal	$x = 18,75, y = 0, z = 168,45, b = 85516,875$
[5]	(0, 100, 0)	Loc. optimal	$x = y = z = 0, b = 0$
[6]	(0, 100, 100)	Loc. optimal	$x = 18,75, y = 0, z = 168,45, b = 85516,875$
[7]	(100, 100, 0)	Loc. optimal	$x = y = z = 0, b = 0$
[8]	(100, 100, 100)	Loc. optimal	$x = 18,75, y = 0, z = 168,45, b = 85516,875$

A la vista de los resultados, hemos obtenido dos óptimos locales. El mejor de los dos, consiste en fabricar 18.75 kg. de galletas y 168.75 kg. de panquemados y no fabricar madalenas. El beneficio semanal será de 88516.875 euros. En la práctica, dicha solución supone consumir toda la harina disponible, sobrando 13.646 kg. de azúcar y 2.45 litros de aceite (2.254 kg.).

Galletas y madalenas suponen exáctamente el 10 % de la producción.

En cuanto a la solución óptima del problema, la región factible es convexa, pero la función objetivo no es cóncava (es estrictamente convexa en  $\mathbb{R}^3$ ).

$$\begin{aligned} \nabla B(x, y, z) &= (2x - 1,5, 4y - 4z - 1,8, 6z - 4y - 1,4) \\ HB(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia no se puede aplicar el teorema de local-global y no se puede garantizar que el óptimo local sea global. Lo único que se puede concluir, aplicando el teorema de Weierstrass, es que el problema es acotado. Efectivamente, la región factible es cerrada, acotada y la función de beneficios continua en ella. Por lo tanto la función B, alcanza un máximo (y un mínimo global en ella).

Por último, analizamos la siguiente cuestión: Imagina que la empresa puede comprar al mismo precio un kilo más de materia prima, ¿qué debería comprar?

Analizando los multiplicadores de Kuhn-Tucker, de la mejor solución encontrada:

$$\lambda_{\text{harina}} = 1370,385, \lambda_{\text{azúcar}} = \lambda_{\text{aceite}} = \lambda_{e1} = 0, \lambda_{e2} = -975,1$$

De acuerdo con ellos, ceteris paribus, un kilo más de harina representa aproximadamente un aumento de 1370.38 euros de beneficio. Sin embargo aumentar las compras de azúcar o aceite no modificaría el beneficio. Conclusión, comprar más harina.

Por último, ¿qué efecto tendría sobre el beneficio aumentar un 5% la producción mínima de galletas y madalenas?

Para responder a esta pregunta deberíamos introducir las restricciones de producción en términos de porcentajes:

$$\text{ESTR1.. } Z/(X+Y+Z) = g = 0.4;$$

$$\text{ESTR1.. } (X+Y)/(X+Y+Z) = g = 0.1;$$

y resolver de nuevo el problema para el mismo punto de arranque de la solución óptima anterior.

Obtendremos los multiplicadores:

$$\lambda_{\text{harina}} = 1370,385, \lambda_{\text{azucar}} = \lambda_{\text{aceite}} = \lambda_{e1} = 0, \lambda_{e2} = -1,828 \cdot 10^5$$

Así un aumento del 5% en la producción mínima de ambos productos, nos llevaría a  $\Delta b_{e2} = -1,828 \cdot 10^5 \cdot 0,05 = -9140$  euros de disminución en los beneficios.

## 2.4. Ejercicios

1. Resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 \leq 4 \end{array}$$

**Solución:**

$(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  es máximo global.

2. Resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & x + y \\ \text{s.a} & x^2 + y^2 = 4 \end{array}$$

**Solución:**

$(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$  es máximo global.

3. Resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Opt} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a} & x + y \leq 5 \\ & x - y \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**Resolución:**

Problema de Maximización:

$$L = x^2 + y^2 + \lambda_1(5 - x - y) + \lambda_2(-x + y) + \lambda_3x$$

El sistema a satisfacer, será:

$$L'_x = 0 : 2x - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$L'_y = 0 : 2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(5 - x - y) = 0$$

$$\lambda_2(-x + y) = 0$$

$$\lambda_3 x = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$x + y \leq 5$$

$$x - y \leq 0$$

$$x \geq 0$$

a) Si  $x = 0$ , entonces  $\lambda_2 y = 0$ ,  $y - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Además  $0 \leq y \leq 5$ .

1) Si  $y = 0$ , entonces  $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ,  $-2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$  y  $5\lambda_1 = 0$ ; de donde:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = 2\lambda_1 \text{ y } \lambda_1 = 0.$$

El punto  $(0, 0, 0, 0, 0)$  es K-T.

2) Si  $y \neq 0$ , entonces  $\lambda_2 = 0$ ,  $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$  y  $2y - \lambda_1 = 0$ ; de donde:  $\lambda_3 = \lambda_1$  e  $y = \frac{1}{2}\lambda_1 \neq 0$ . Por tanto, si  $\lambda_1(5 - y) = 0$ ,  $5 = \frac{1}{2}\lambda_1$  y  $\lambda_1 = 10$ .

El punto  $(0, 5, 10, 0, 10)$  es K-T.

b) Si  $x \neq 0$ , entonces,  $\lambda_3 = 0$ ,  $2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$  y  $2y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$  de donde:  $\lambda_1 = x + y \neq 0$ . Además, si  $\lambda_1(5 - x - y) = 0$ , y  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $x + y = 5 = \lambda_1$ .

Si  $\lambda_2(-x + y) = 0$ , y  $x = 5 - y$ ,  $\lambda_2(2y - 5) = 0$ .

1) Si  $\lambda_2 = 0$ , de  $2y - 5 + \lambda_2 = 0$ ,  $y = \frac{5}{2}$ .

2) Si  $\lambda_2 \neq 0$ , entonces  $2y - 5 = 0$ ,  $y = \frac{5}{2}$  y  $\lambda_2 = 0$ . Luego esta situación es imposible.

El punto  $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 5, 0, 0)$  es K-T.

En el problema de maximización la f.o. no es cóncava, pero es continua con región factible compacta. Además como las condiciones son lineales, se cumple la cualificación de restricción. Por el teorema de Weierstrass, el máximo será aquél valor K-T, en el que la f.o. alcance el valor más elevado, es decir, el punto  $(0, 5)$  es un máximo global del problema.

Problema de Minimización:

$$L = x^2 + y^2 - \lambda_1(5 - x - y) - \lambda_2(-x + y) - \lambda_3 x$$

El sistema a satisfacer, será:

$$L'_x = 0 : 2x + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$L'_y = 0 : 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(5 - x - y) = 0$$

$$\lambda_2(-x + y) = 0$$

$$\lambda_3x = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$x + y \leq 5$$

$$x - y \leq 0$$

$$x \geq 0$$

a) Si  $x = 0$ , entonces  $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_1(5 - y) = 0$  y  $\lambda_2y = 0$ . Además  $0 \leq y \leq 5$ .

1) Si  $y = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

El punto  $(0, 0, 0, 0, 0)$  es K-T.

2) Si  $y \neq 0$ , entonces  $\lambda_2 = 0$ ,  $2y + \lambda_1 = 0$ . Absurdos, puesto que  $y$  y  $\lambda_1 \geq 0$ .

b) Si  $x \neq 0$ , entonces  $\lambda_3 = 0$ .

1) Si  $y = 0$ , entonces  $\lambda_2 = 0$  y  $2x + \lambda_1 = 0$ . Absurdos, puesto que  $x$  y  $\lambda_1 \geq 0$ .

2) Si  $y \neq 0$ , entonces  $2x + 2y + 2\lambda_1 = 0$ . Absurdo, puesto que  $x, y$  y  $\lambda_1 \geq 0$ .

Se trata de un problema convexo; luego el único punto de K-T,  $(0, 0, 0, 0, 0)$ , es el mínimo global del problema.

**Solución:**

$(x_1, y_1) = (0, 5)$  es el máximo global del problema.

$(x_2, y_2) = (0, 0)$  es el mínimo global del problema.

4. Dado el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín}(x + 3y)(y - x) + z^2 \\ \text{s.a. } 2x + 3y + z &\leq 12 \\ -y + z &= 4 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Escribe las condiciones de K-T de este problema.

b) Demuestra que los puntos  $(0, 0, 4)$  y  $(4, 0, 4)$  son puntos de K-T del problema.

c) ¿Puedes utilizar la condición suficiente de K-T para concluir que son mínimos globales del problema? ¿Pueden ser los dos puntos mínimos globales del problema?

d) Demuestra que el punto  $(4, 0, 4)$  es un mínimo global estricto del problema.

**Solución:**  $(4, 0, 4)$  es un mínimo global estricto del problema.

5. Dado el siguiente problema de programación:

$$\begin{aligned} \text{máx } & 4x - 4y + 4z - 40 \\ \text{s.a. } & x^2 + y^2 + z^2 = 20 \end{aligned}$$

- Aplica el Teorema de Weierstrass.
- Obtén los puntos de K-T de este problema.
- ¿Puedes utilizar la condición suficiente de K-T para concluir que son mínimos globales del problema? ¿Porqué?
- Utilizando los apartados anteriores, ¿qué se sabe de la solución de este problema?

**Solución:**  $(\sqrt{\frac{20}{3}}, -\sqrt{\frac{20}{3}}, \sqrt{\frac{20}{3}})$  es un máximo global del problema.

6. Considera el siguiente problema de programación:

$$\begin{aligned} \text{Opt } & x^2 + y^2 \\ \text{s.a. } & x^2 + y^2 \leq 20 \\ & x^2 - y \geq 0 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

- Escribe el conjunto que representa la región factible del problema y propón una solución factible interior, una solución factible frontera y una solución infactible.
- Estudia si el conjunto de soluciones factibles,  $S$ , es compacto y/o convexo.
- Estudia si los puntos  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  y  $(2, 4)$  son regulares.
- Resuelve gráfica y analíticamente los problemas de maximizar y minimizar y clasifícalos atendiendo a su estructura y solución.

**Solución:**

$(0, 0)$  es el mínimo global de problema. Hay un máximo global múltiple en el conjunto de puntos:  $x^2 + y^2 = 20, x^2 \geq y, y \geq 0$ .

7. Dado el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } & x^2 + y^2 \\ \text{s.a. } & x \leq 1 \\ & x + y \geq 0 \\ & y \leq 0 \end{aligned}$$

- a) Escribe las condiciones de K-T de este problema.
- b) Estudia si los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(1,0)$  son puntos de K-T del problema.
- c) Razona si estos son o no óptimos globales del problema.

**Solución:**

$(0,0)$  es el mínimo global de problema.

8. Un agencia de viajes que gestiona tres modelos de viajes por Europa: Francia, Centro Europa e Italia, se plantea determinar la cantidad óptima de viajes a ofertar este año con el fin de minimizar costes y satisfacer la demanda prevista. Si denotamos por  $F$ ,  $CE$  e  $I$ , al número de plazas de viajes ofertados a los distintos destinos, se sabe que los costes son:

Coste fijo total: 4000 euros

Coste variable por viajar a Francia:  $10 \cdot F + CE$  euros

Coste variable por viajar a centro Europa:  $2 \cdot F + 10 \cdot CE$  euros

Coste variable por viajar a Italia:  $8 \cdot I$  euros

Después de un estudio de mercado, la agencia ha llegado a la conclusión de que este año se deben ofertar al menos 2500 viajes, la oferta mínima para Centro Europa ha de ser de 1500 viajes y que se venderán menos de 300 viajes a Italia.

- a) Plantea y resuelve el problema con GAMS. Ejecuta el programa con distintos puntos de arranque y escribe la solución obtenida: valor de la f.o., de las variables y de los multiplicadores.
- b) ¿Qué efecto aproximado tendría sobre el coste un reducción de la demanda en 100 viajes?

**Solución:**

El mínimo global del problema se alcanza en:  $F = 700$ ,  $CE = 1500$ ,  $I = 300$ , con un valor (coste) de 31.274000 euros en la f.o. Los multiplicadores son:  $\lambda_1 = 18500$ ,  $\lambda_2 = 13600$ ,  $\lambda_3 = -13700$ . La reducción de la demanda en 100 viajes produce una disminución del coste de 1.850.000 euros.

9. Un inversor dispone de 2000 euros para invertir. Tiene información sobre tres activos financieros. Sea  $R_i$  la variable aleatoria que representa el rendimiento anual de un euro invertido en el activo  $i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Los valores rendimientos medios son:

$$E(R_1) = 0,35, E(R_2) = 0,12, E(R_3) = 0,22$$

Y las varianzas y covarianzas, vienen dadas por:

$$V(R_1) = 0,40, V(R_2) = 0,10, V(R_3) = 0,20$$

$$Cov(R_1, R_2) = 0,02, Cov(R_1, R_3) = 0,05, Cov(R_2, R_3) = 0,07$$

- a) Determinar la cartera óptima en la que minimiza la varianza del rendimiento anual, consiguiendo al menos un rendimiento medio del 20%.
- b) ¿Qué efecto tiene sobre la varianza un aumento del 5% de la rentabilidad esperada del segundo activo?

**Solución:**

El mínimo global del problema se alcanza en  $X_1 = 0,310$ ,  $X_2 = 0,223$ ,  $X_3 = 0,295$ , con un valor de la f.o. (riesgo o varianza de la cartera) de 0.082.  $\lambda_1 = 0,818$ ,  $\lambda_2 = 0$ . El aumento en un 5% de la rentabilidad esperada del segundo activo, produce una disminución en 0.00912 del riesgo de la cartera, que pasa a ser de 0.0728.

10. Una pequeña cooperativa de agricultores dispone de una nave en la que almacena su cosecha para gestionar su venta al mejor precio posible en los mercados mayoristas. Estamos en Setiembre y la directiva está muy preocupada por la gestión de su cosecha de calabacín, la cosecha promete ser buena pero se sabe que los precios suelen oscilar bastante y se teme vender mal. Este año, la cooperativa va a organizarse, se dedicarán los días 1 a 10 de los meses de Octubre, Noviembre, Diciembre y Enero a almacenar las cosechas de los distintos campos y los días restantes de estos meses a la venta del producto. El 1 de Febrero se dará por terminada la campaña. El objetivo es maximizar los ingresos netos de la venta de la cosecha descontando los costes de gestión del almacén.

A partir de la experiencia de cosechas anteriores de calabacín, sabemos que el precio por kg. por cantidad ofrecida ( $X$ ) oscila según el siguiente cuadro en el que también se indican las cantidades promedios llevadas por los agricultores al almacén:

	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero
Precio (kg.)	$-0,0003X + 0,65$	$0,00012X + 0,30$	1,20	$0,00006X + 1,20$
Entradas (kg.)	4500	12000	8000	0

Los costes de almacenamiento y procesado son de 0.10 euros por kg. y mes sobre lo almacenado y se estima que se estropea al mes un 2% de lo almacenado que no se puede vender. Además, hay que tener en cuenta que la capacidad del almacén es de 15 toneladas y que sólo se pueden procesar para su venta un máximo de 7500 kg. al mes. Los costes y los máximos de capacidad se valoran sobre lo almacenado el último día de mes antes de descontar mermas y ventas del mes en curso.

- a) Plantea y resuelve el problema con GAMS. Ejecuta el programa con distintos puntos de arranque y escribe la solución obtenida: valor de la f.o., de las variables y de los multiplicadores.
- b) Si fuera posible aumentar en 50 kg. la cantidad de producto procesable para su venta un mes concreto ¿qué mes elegirías y qué costes adicionales máximos estarías dispuesto a asumir?

- c) ¿Qué puedes decir sobre la solución óptima del problema de la cooperativa si durante el mes de octubre sólo se puede procesar para su venta un máximo de 2000kg.?
- d) ¿Qué efecto aproximado tendría sobre los ingresos de la cooperativa si se deteriora un 2,5% de producto almacenado?

**Solución:**

- a) Hay un máximo local en:  $x_{vo} = 1614,082$ ,  $x_{vn} = 7500$ ,  $x_{vd} = 7046,939$ ,  $x_{ve} = 7500$ ,  $x_{ao} = 4500$ ,  $x_{an} = 14795,918$ ,  $x_{ad} = 15000$ ,  $x_{ae} = 7653,061$ . El valor de la f.o. es 25904,004 y los multiplicadores son:  $\lambda_1 = -0,412$ ,  $-0,318$ ,  $-0,223$ ,  $1,2$ ,  $0$ ,  $0$ ,  $0$  y  $\lambda_8 = -1,327$ . No tenemos garantía de óptimo global.
- b) Es preferible aumentar la capacidad de proceso (en 50 kg.) en el mes de noviembre, incrementándose en ese caso el beneficio en 116,15 euros.
- c) La solución dada sigue siendo factible, por lo tanto es óptima con el mismo valor de la f.o.
- d) El beneficio disminuiría pasando a ser 25830.96 euros.

## 2.5. Tarea de aprendizaje

A la vista del número de alumnos en el grupo, repartir los ejercicios de la sección anterior, salvo el 3, entre el grupo de estudiantes, de manera que cada grupo trabaje un conjunto de ejercicios y presente la resolución completa ante sus compañeros.

## Capítulo 3

# Trabajo en grupo 1

### 3.1. Contexto. El problema de selección de carteras

El origen de la mayoría de los modelos de selección de carteras es el modelo de Markowitz dado a conocer a mediados del siglo pasado, en parte en 1952 y de una manera más completa en 1959.

Dicho modelo produce la diversificación de un capital en un conjunto de categorías de inversión. El reparto del capital inicial entre las distintas categorías de inversión será expresado en términos de fracciones de ese capital. Estas fracciones necesitan ser determinadas, y constituyen las variables de decisión. Cada fracción de capital será asociada con una categoría de inversión distinta y es definida como la cantidad invertida en dicha categoría entre el total del capital.

En su trabajo de 1952, Markowitz introduce la varianza del beneficio total de la cartera como una medida de riesgo. Así, el objetivo será minimizar el riesgo de la cartera.

Por otra parte, cada categoría tiene un nivel medio de beneficio esperado. Estos niveles junto con las fracciones de capital que hay invertidas en cada categoría permiten obtener el nivel medio de beneficio de la cartera.

El inversor demandará un nivel mínimo de beneficio para la cartera completa. Este requisito forma la restricción principal en el modelo de carteras.

La descripción matemática del modelo es como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \text{Var}\left[\sum_j R_j x_j\right] & (3.1) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_j m_j x_j \geq M \\ & \sum_j x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \forall j \end{aligned}$$

donde,

$j \in J$ , indexa el conjunto de categorías de inversión (p.e., acciones, bonos, activos inmobiliarios, etc.).

$x_j$ , corresponde a la fracción o proporción del capital total a invertir en la categoría  $j$ . Son las variables de decisión del modelo.

$R_j$ , denota el rendimiento unitario de una unidad invertida en la categoría  $j$ , (v.a.).

$Cov(R_j, R_k)$ , denota la covarianza entre las v.a.  $R_j$  y  $R_k$ .

$m_j$ , es el valor esperado de la v.a.  $R_j$  (rendimientos esperados).

$M$ , es el rendimiento medio o esperado de la cartera.

Se trata por lo tanto de un modelo cuadrático paramétrico.

Se puede comprobar fácilmente que minimizar esta función objetivo es equivalente a minimizar la suma de las covarianzas:

$$Var[\sum_j R_j x_j] = \sum_{jk} x_j Cov(R_j, R_k) x_k$$

La f.o. será una función convexa si y sólo si su matriz de segundas derivadas ( $H_f$ ) es semidefinida positiva. Observar que la matriz de segundas derivadas es precisamente la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos  $Cov(R_j, R_k)$ . Dichas matriz es semidefinida positiva si y sólo si

$$\sum_{jk} x_j Cov(R_j, R_k) x_k \geq 0, \forall x_j, x_k \in R$$

Esta última condición es equivalente a que  $Var[\sum_j R_j x_j] \geq 0$ , que es cierta por definición.

Por lo tanto se trata de un problema convexo, y cualquier solución local es global.

### 3.1.1. Enunciado 1. Modelo De Markowitz

Consideremos tres categorías de inversión ( $|J| = 3$ ): acciones, bonos y activos inmobiliarios. Las correspondientes tres variables, serán denotadas por  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

El rendimiento mínimo esperado será de  $M = 9$ . Los valores de los rendimientos medios junto con la matriz de covarianzas aparece en la siguiente tabla:

$i$	$m_i$	$c_{i,j}$	$i, j = 1, 2, 3$
1	10,800	2.250	-0.120 0.450
2	7,600	-0.120	0.640 0.336
3	9,500	0.450	0.336 1.440

Resuelve el modelo (3.1) en este caso y responde a las siguientes cuestiones:

- 1.Cuál es la política de decisión óptima y qué interpretación puedes hacer en términos del riesgo de la cartera y el riesgo de los distintos activos.

2. Si planteamos como objetivo maximizar la utilidad del inversor, qué diferencia hay entre:
  - a) Maximizar la rentabilidad esperada de la cartera para un nivel de riesgo dado, o
  - b) Minimizar el riesgo de la cartera para una rentabilidad esperada dada.
3. Si analizamos la solución obtenida, qué sucedería si se produjeran ligeros cambios en las rentabilidades esperadas. Comprueba si se generarían modificaciones importantes en la cartera señalada como óptima.

### 3.2. Modelo táctico de inversión

En el nivel táctico se decide la cantidad a invertir en los distintos activos de una categoría en particular, dependiendo de su comportamiento o evolución histórica.

Imaginemos que la solución del modelo estratégico de la sección anterior sugiriera invertir aproximadamente el 32 % del capital total en acciones.

Tal decisión se ha tomado en virtud de características globales en cuanto al comportamiento medio de la categoría y no en cuanto a la evolución de los distintos tipos de acciones en particular.

A la vista del comportamiento de las distintas acciones, en un modelo táctico, nos plantearemos cómo repartir este 32 % entre las distintas acciones.

Consideraremos los precios de las acciones observados en distintos periodos de tiempo. Como datos, obtendremos un vector de rentabilidades, y tendremos tantos de estos vectores como número de activos individuales en cada categoría. A partir de estas observaciones y considerando dos periodos consecutivos, es posible calcular la correspondiente tabla de tasas de rendimiento. En este caso y con la fórmula siguiente, pasaremos de  $T + 1$  observaciones (precios que van de 0 a  $T$ ) a  $T$  (tasa de rendimiento que van de 1 a  $T$ ).

La tasa porcentual de rendimiento o abreviadamente tasa de rendimiento, se define como:

$$100 \cdot \frac{\text{precio hoy} - \text{precio ayer}}{\text{precio ayer}}$$

Fijo el valor de  $t$ , el vector correspondiente  $r_t = (r_{tj}, j \in J)$  define un determinado *escenario*.

Consideremos un vector de variables aleatorias  $R = (R_j, j \in J)$ , donde para cada categoría  $j$ ,  $R_j$  denota la v.a. tasa de rendimiento correspondiente a dicha categoría. Las realizaciones muestrales de dicha variable son  $r_{tj}$  con  $t \in T$ , donde  $T$  es el número (finito) de escenarios.

Además,  $0 \leq p(r_t) \leq 1$ , representa la probabilidad de ocurrencia del escenario  $t$  (vector  $r_t = (r_{tj}, j \in J)$ ), tal que  $\sum_{t \in T} p(r_t) = 1$ .

El modelo táctico a resolver será:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_t p(r_t) y_t^2 & (3.2) \\
\text{s.a.} \quad & \sum_j d_{tj} x_j = y_t, \forall t \\
& \sum_j m_j x_j \geq M \\
& \sum_j x_j = 1 \\
& x_j \geq 0, \forall j
\end{aligned}$$

donde las variables son:

$x_j$ , fracción o proporción del capital total a invertir en el activo  $j$ .

$y_t = \sum_j x_j (r_{tj} - E(R_j))$ ,  $\forall t$ , suma para los distintos activos de las desviaciones entre los rendimientos de cada activo en el escenario  $t$  y su rendimiento esperado.

Donde  $Var[\sum_j R_j x_j] = \sum_t p(r_t) y_t^2$  y las nuevas variables  $y_t$  y su definición pueden son añadidas al modelo como restricciones.

Además,  $t \in T$ , denota el conjunto de escenarios;  $r_t$ , es vector (v.a.) de tasas de rendimiento bajo el escenario  $t$ ;  $p(r_t)$ , denota la probabilidad del escenario  $t$ ;  $r_{tj}$ , es la tasa de rendimiento del activo  $j$ , bajo el escenario  $t$  (es decir, son las realizaciones muestrales de la v.a.  $R_j$  bajo los distintos escenarios);  $m_j = E[R_j]$ , es el valor esperado del rendimiento del activo  $j$  y  $d_{tj} = (r_{tj} - m_j)$ , representa la desviación entre el rendimiento de un activo en el escenario  $t$  y su valor esperado.

Por su parte, la evaluación de la función objetivo y sus derivadas, necesaria en un proceso de solución de programación no lineal será más eficiente con esta formulación que con la dada en el modelo estratégico. Esto es debido a que en el modelo táctico,  $|T|$  (número de escenarios), será en general mucho más pequeño que  $|J|$  (número de activos individuales). Además el número de términos no lineales  $y_t^2$  es significativamente más pequeño que el número de elementos  $x_j x_k$ .

Las propiedades de este modelo son las mismas que las del modelo estratégico, puesto que éste es una reformulación del anterior. Aunque dichas propiedades podrían haberse deducido directamente de éste. Por ejemplo, la verificación de que la función objetivo es convexa, pasa por demostrar que la matriz de segundas derivadas es una matriz  $|T| \times |T|$  diagonal con elementos  $2p(r_t) \geq 0$ , en su diagonal principal. Dicha matriz es siempre semidefinida positiva.

### 3.2.1. Enunciado 2. Análisis de escenarios

Trataremos con 5 tipos acciones de los que tenemos 51 observaciones (precios). Sus abreviaturas son: RD (Royal Dutch), AKZ (Akzo Nobel), KLM (Royal Dutch Airline

Company), PHI (Philips) y UN (Unilever). Estos datos históricos son datos semanales, desde Agosto de 1997 a 1998. Las correspondientes tasas de rendimiento semanales pueden ser calculadas a partir de los datos en la tabla y aparecen todas con la misma probabilidad.

También se puede comprobar que los valores esperados del rendimiento para las distintas acciones son:  $m_1 = E(RD) = -0,28$ ,  $m_2 = E(AKZ) = 0,33$ ,  $m_3 = E(KLM) = 0,4$ ,  $m_4 = E(PHI) = 0,30$  y  $m_5 = E(UN) = 0,55$ .

Los precios de las acciones en una serie histórica de 51 observaciones aparecen en la siguiente tabla:

t	RD	AKZ	KLM	PHI	UN	t	RD	AKZ	KLM	PHI	UN
t-0	111.0	82.5	70.0	154.6	110.8	t-26	112.8	107.0	76.3	155.9	134.2
t-1	108.1	81.6	73.7	152.4	108.0	t-27	109.7	110.4	86.0	155.0	140.9
t-2	107.9	80.1	72.3	146.1	103.7	t-28	111.7	109.7	88.9	149.9	138.2
t-3	108.5	83.1	69.7	157.5	106.6	t-29	120.4	105.9	83.5	153.5	141.6
t-4	111.4	85.0	69.5	168.4	107.3	t-30	118.0	105.9	83.4	153.0	140.6
t-5	115.5	92.6	74.8	166.9	109.5	t-31	119.7	103.0	84.9	149.9	158.2
t-6	113.2	91.6	73.8	164.1	108.7	t-32	116.7	102.4	84.9	153.7	149.6
t-7	111.9	88.3	70.2	169.0	111.1	t-33	115.8	107.2	86.1	167.0	152.8
t-8	99.7	80.8	64.3	143.8	101.0	t-34	113.7	104.5	78.9	181.0	144.3
t-9	105.1	86.1	71.8	151.3	105.4	t-35	115.7	105.8	79.5	189.4	155.5
t-10	100.9	81.8	71.7	148.3	109.6	t-36	114.4	104.8	79.1	197.9	154.2
t-11	105.0	85.6	69.5	140.6	112.8	t-37	113.8	103.8	79.9	201.7	154.5
t-12	105.2	84.6	70.5	131.5	113.6	t-38	114.0	107.0	82.0	196.3	158.0
t-13	107.0	90.3	74.9	138.0	117.4	t-39	114.1	107.4	77.2	188.0	163.8
t-14	109.0	88.3	78.5	135.4	123.1	t-40	111.5	112.0	78.5	189.9	164.3
t-15	111.4	85.6	73.0	114.0	124.5	t-41	109.2	106.8	77.1	172.1	163.9
t-16	107.2	81.6	74.5	116.1	118.7	t-42	110.1	105.3	76.1	178.0	165.6
t-17	111.3	87.4	75.0	121.6	125.0	t-43	112.8	113.1	82.6	171.0	161.4
t-18	108.6	87.5	77.0	127.6	127.7	t-44	111.0	116.6	91.4	179.5	165.4
t-19	105.6	86.6	72.4	116.2	121.2	t-45	105.6	126.7	94.5	180.6	160.9
t-20	105.9	90.0	71.4	128.6	125.1	t-46	107.3	123.1	90.0	173.5	162.0
t-21	104.7	91.4	68.9	129.4	119.9	t-47	103.2	112.3	88.5	164.4	153.0
t-22	107.7	95.3	69.7	137.1	117.9	t-48	102.8	103.1	81.8	164.2	141.2
t-23	107.4	92.9	68.6	134.5	124.6	t-49	93.9	95.0	80.7	153.0	133.4
t-24	108.0	97.0	70.2	156.0	124.3	t-50	93.6	92.7	80.5	164.0	139.3
t-25	104.7	102.6	74.3	159.5	128.8						

Resuelve el modelo (3.2) para un valor de  $M = 0,2$  y responde a las siguientes cuestiones:

1. Cuál es la política de decisión óptima y el riesgo de la cartera que conlleva.

Un serio inconveniente de utilizar la varianza como medida del riesgo de la cartera es que penaliza los beneficios lejanos a la media, ya sea por altos o por bajos. En este sentido no recoge las preferencias del inversor sobre los beneficios por encima de la media. El concepto de varianza a un lado es similar al concepto de varianza pero restringiéndose a aquellas observaciones que quedan por debajo, *downvar*.

Así, el problema de optimización puede ser reformulado y expresado como:

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_t p(r_t)q_t^2 \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_j r_{jt}x_j + q_t \geq M, \forall t \\
 & \sum_j m_jx_j \geq M \\
 & \sum_j x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0, \forall j \\
 & q_t \geq 0, \forall t
 \end{aligned}$$

2. Resuelve este segundo modelo táctico y compara la política de decisión que se obtiene así como el riesgo total de la cartera con el obtenido en el apartado anterior.

**Ahora que ya lo sabes hacer... Lee y recuerda.**

1. Hoy en día, el modelo de Markowitz sigue siendo la base de los modelos de selección de carteras, aunque su utilización en la práctica se ve frecuentemente criticada. Uno de los motivos tiene que ver con sus dificultades de cálculo, la inestabilidad de las soluciones que proporciona, los problemas para incluir opiniones de los expertos y la rigidez de la función de riesgo considerada.
2. La utilización de dicho modelo con muchos activos financieros tiene el grave inconveniente de que es necesario calcular un gran número de covarianzas (para 100 activos es necesario calcular cerca de 5.000 covarianzas).
3. En ocasiones este tipo de modelos se emplea en una primera fase de decisiones estratégicas, tomadas a la hora de diversificar la inversión de un capital en un conjunto de categorías. Una vez hecha esta selección un segundo conjunto de decisiones tácticas, nos dirán cuánto invertir en cada activo de cada categoría. Tal proceso de decisión jerárquico, en dos fases, es frecuente en las grandes instituciones financieras.
4. Cualquiera de los modelos analizados en esta segunda sección, engloban las fases estratégica y táctica y son casos particulares de modelos de optimización estocástica o basada en análisis de escenarios. Modelos de este estilo serán estudiados en el Capítulo 5

## Capítulo 4

# Programación lineal

Después de presentar las características generales de los problemas de programación lineal, (PL), describiremos el procedimiento de solución más eficiente, que es el método **simplex**.

Para finalizar el capítulo, describiremos el manejo de GAMS, en la resolución este tipo de problemas.

En un problema de programación lineal (PL) tanto la f.o. como las restricciones son funciones lineales. Vamos a comenzar definiendo la forma estándar y la forma aumentada de un problema lineal.

**Definición 4.1** *Se denomina forma estándar de un modelo de PL, a aquella en la que se define un problema de maximización con restricciones de menor o igual y no negatividad en las variables o bien, un problema de minimización con restricciones de mayor o igual y no negatividad en las variables. Es decir:*

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. a.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ & i = 1, \dots, m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. a.} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \\ & i = 1, \dots, m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

**Definición 4.2** *Se denomina forma aumentada de un modelo de PL, a aquella en la que se define un problema de maximización o minimización y se escriben todas las restricciones con igualdad, añadiendo las variables de holgura necesarias. Existen además*

condiciones de no negatividad en todas las variables. En forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \text{máx | mín} \quad & c^t x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\
 \text{s. a.} \quad & Ax = b \\
 \text{donde} \quad & x = (x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m) \\
 & x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m \geq 0 \\
 & b^t = (b_1, \dots, b_m) \\
 & c^t = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

y la matriz de coeficientes aumentada:

$$A = \left( \begin{array}{c|cccc} & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ a_{ij} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

En algunas ocasiones expresar un PL en su forma aumentada es un paso previo a la aplicación de los algoritmos de resolución del problema.

Por otra parte y en relación con el tema anterior, observar que los PL son problemas convexos. La f.o. es lineal y por lo tanto es cóncava y convexa a la vez. La región factible es un polítopo y por lo tanto un conjunto convexo. Aplicando el hecho de que es cóncava en un problema de maximización y convexa en uno de minimización, deducimos que en ambos casos se trata de problemas convexos. Por el teorema local-global, todo óptimo local será un óptimo global del problema.

Además si la región factible es no vacía y acotada, como la f.o. es lineal y por lo tanto continua, aplicando el teorema de Weierstrass, el problema tiene máximo y mínimo global.

Por último las restricciones cumplen la cualificación de linealidad, y por lo tanto todo óptimo del problema ha de ser un punto de K-T. Por otra parte como la f.o. de estos problemas es lineal y por lo tanto cóncava y convexa sobre una región factible convexa, se cumplen también las hipótesis de condición suficiente. Resumiendo, en PL, óptimo y punto de K-T son conceptos equivalentes. Sin embargo, aunque la teoría y los métodos de solución estudiados en los temas anteriores son perfectamente aplicables a PL, no aprovechan las consecuencias que derivan de la linealidad de la f.o. y restricciones en el caso de un problema de este tipo, y por lo tanto no son las mejores técnicas para resolver este tipo de problemas.

**Ejemplo 4.1** *Estudiemos el siguiente PL:*

$$\text{máx} \quad x + 2y$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & x + y \leq 4 \\
& 2x + y \leq 6 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Como se ve gráficamente, este problema tiene una solución óptima única en el punto  $(0, 4)$ , y el valor de la función objetivo es  $f^* = 8$ .

**Ejemplo 4.2** *Estudiemos el PL:*

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & -x + y \\
s.a. \quad & -x + y \leq 2 \\
& y \leq 4 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Como se ve también gráficamente, este problema tiene solución óptima múltiple, en este caso infinitas soluciones en el hiperplano  $y = 2 + x$ ,  $x \in [0, 2]$ , y el valor de la función objetivo es  $f^* = 2$ .

**Definición 4.3** *Se denomina solución factible a todo vector  $x$ , que satisface tanto el conjunto de restricciones lineales como las condiciones de no negatividad.*

**Definición 4.4** *Se denomina solución básica factible a todo vector  $x$ , que satisface el conjunto de restricciones  $Ax = b$ , con a lo sumo  $m$  (número de restricciones) componentes no nulas. Además la submatriz  $B$  asociada a dichas componentes no nulas tiene determinante distinto de cero. A las  $m$  componentes distintas de cero, se les denomina variables básicas, siendo las restantes, variables no básicas.*

Para establecer el procedimiento de obtención de soluciones básicas factibles, señalar que si  $x$  es una solución básica factible,

$$Ax = (B|N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b$$

de donde, si  $x_N = 0$ ,

$$Bx_B = b \implies x_B = B^{-1}b \geq 0$$

## 4.1. Teoremas fundamentales de la programación lineal

La resolución de problemas lineales, *PL*, se apoya en las consecuencias de su formulación y en los siguientes cuatro teoremas.

**Teorema 4.1** *Si la f.o. alcanza un valor óptimo, dicho óptimo se obtiene siempre en un vértice de la región factible*

**Teorema 4.2** *Si la f.o. alcanza un óptimo en más de un vértice, entonces toma el mismo valor para los puntos del segmento lineal que los une.*

**Teorema 4.3** *Un punto  $x$  es vértice de la región factible de un problema lineal si y sólo si  $x$  es una solución básica factible.*

**Teorema 4.4** *(Teorema fundamental de la programación lineal). Si existe una solución factible, entonces existe una solución básica factible. Si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución básica factible óptima.*

De acuerdo con estos resultados, podemos resolver un problema de programación lineal acotado siguiendo el siguiente procedimiento:

**Paso 1:** Plantear el problema en formato estándar.

**Paso 2:** Calcular todas las soluciones básicas factibles del problema y el valor de la f.o. en todas ellas.

**Paso 3:** Si el problema está acotado, la solución básica factible con mayor valor de la f.o., si estamos maximizando, o con menor, si estamos minimizando, es un óptimo global del problema.

El procedimiento descrito tiene dos claros inconvenientes. Es primero es que necesitamos saber si el problema está acotado, y el segundo, el elevado coste computacional de calcular todas las soluciones factibles del problema.

## 4.2. El método Simplex

Se trata de un procedimiento general para resolver problemas de programación lineal. Desarrollado por George Dantzig (Portland, Oregon, 8 Noviembre 1914- Stanford, California, 13 Mayo 2005) en 1947, se ha comprobado su extraordinaria eficiencia, y se usa de forma habitual para resolver problemas grandes mediante un ordenador. Excepto para pequeños problemas, que pueden resolverse a mano, se ejecuta con ayuda del ordenador, existiendo una amplia variedad de paquetes que lo tienen implementado. Nosotros seguiremos utilizando la utilería de GAMS.

El método simplex, es un procedimiento algebraico. Sin embargo sus conceptos fundamentales son geométricos.

Como veremos simplifica considerablemente los cálculos y da una respuesta final sobre si el problema está o no acotado, indicando en el primer caso la solución óptima del problema.

A lo largo de toda la exposición, consideraremos un problema de maximización, en principio de forma aumentada:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Definición 4.5** Una solución básica factible es adyacente a otra si difiere de ésta en una única componente básica. Esto es, pasamos de una s.b.f. a otra s.b.f. adyacente cuando entra en la base una variable no básica y sale de la base una variable básica.

A partir de aquí, veamos que ha de cumplirse al pasar de una s.b.f. dada,  $x^t = (x_B^t, x_N^t)$  a una s.b.f. adyacente mejor.

Se tienen que cumplir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} Ax &= b = (B|N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Al sustituir en la f.o.:

$$\begin{aligned} z &= (c_B^t c_N^t) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^t(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^t x_N = \\ &= c_B^t B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N)x_N \geq c_B^t B^{-1}b \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si  $x_j$  es una variable no básica candidata a entrar en la base, denotaremos por  $W_j = c_j - c_B^t B^{-1}P_j$  al rendimiento marginal (coste reducido) de esta variable, (i.e. lo que aumenta la f.o. por el incremento de una unidad) y por  $Y_j = B^{-1}P_j$  (donde  $Y = B^{-1}N$ ) a la variación que experimentarán las variables básicas cuando la variable  $x_j$  entre en la base, siendo  $P_j$  la columna de la matriz técnica ( $N$ ) correspondiente a la variable  $x_j$ .

Resumimos el Criterio de entrada:

**Maximización:** Entra la variable  $x_j$  que maximiza:

$$\{W_j = c_j - c_B^t B^{-1}P_j | W_j > 0\}$$

**Minimización:** Entra la variable  $x_j$  que minimiza:

$$\{W_j = c_j - c_B^t B^{-1}P_j | W_j < 0\}$$

**Ejemplo 4.3** Sea el PL:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 4x + y \\ \text{s.a} \quad & 2x + y + s = 8 \\ & y + t = 5 \\ & x, y, s, t \geq 0 \end{aligned}$$

y tomemos como punto de partida la s.b.f.  $x = (\frac{3}{2}, 5, 0, 0)$ , con valor en la f.o.  $z = 11$ .

Planteando las ecuaciones anteriores para esta solución:

$$Ax = b = (B|N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0$$

$$\text{Siendo } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}(B)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces, } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{y, } B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de donde}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \geq 0$$

De la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} z &= (c_B^t c_N^t) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^t (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^t x_N = \\ &= c_B^t B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N)x_N \geq c_B^t B^{-1}b \end{aligned}$$

se deduce:

$$\begin{aligned} z &= (4 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} + \left[ (0 \ 0) - (4 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \\ &= 11 + [(0 \ 0) - (2 \ -2 + 1)] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \geq 11 \end{aligned}$$

Luego:

$$11 + [-2(= W_s) \ 1(= W_t)] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \geq 11$$

Deducimos que la variable que tiene que entrar en la base es  $t$ , porque cada unidad de  $t$  incrementa en 1 ( $W_t = 1$ ), la f.o., mientras que si entrase  $s$ , la f.o. disminuiría por cada unidad de dicha variable en 2 ( $W_s = -2$ ).

Como la variable que entra en la base es  $t$ , y la  $s$  sigue siendo cero, de la ecuación (4.1):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} - Y_t \cdot t = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t \\ 5 - t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se tiene que cumplir, por un lado, la no negatividad de la nueva solución, y por otro, si queremos pasar a otra s.b.f., tiene que hacerse cero la variable  $x$  o la  $y$ . El vector  $Y_t = B^{-1}P_t$  controla estas condiciones.

Como  $Y_{tx} = -\frac{1}{2}$  es negativo,  $x$  no puede hacerse cero. Pero  $Y_{ty} = 1$ , estrictamente positivo, luego es la variable  $y$  la que ha de hacerse cero. Haciendo cero la variable  $y$ .

$$y = 5 - t = 5 - Y_{ty} \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{Y_{ty}}$$

Criterio de salida: (Común para maximizar y minimizar)

Fijada la variable  $x_j$  que entra, sale la variable  $x_i$  tal que  $Y_{ji} > 0$  es mínimo, es decir

$$\{x_i/Y_{ji} > 0 \text{ mínimo} \}$$

Criterios de parada:

1. Si estamos maximizando y  $W_j \leq 0, \forall x_j$  (o estamos minimizando y  $W_j \geq 0, \forall x_j$ ), entonces hemos llegado a la solución óptima y el problema es acotado. Además si  $W_j \neq 0, \forall x_j$  no básica, la solución es única y si, por el contrario,  $W_{j0} = 0$ , para alguna variable  $x_{j0}$  no básica, la solución es múltiple o el problema tiene infinitas soluciones.
2. Si entra la variable  $x_j$  con un rendimiento marginal no nulo y no sale ninguna variable de la base, el problema es no acotado.

El siguiente esquema extraído del texto de F.M. Guerrero (1994), "Curso de Optimización: Programación Matemática", facilita las pautas de aplicación del método Simplex.

Consideremos el problema tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**Paso 1:** Determinar una solución básica factible inicial, que estará asociada a la base canónica para facilitar los cálculos posteriores.

**Paso 2:** Calcular los valores  $W_j = c_j - z_j, \forall j = 1, \dots, n + m$ ; aquellos que correspondan a los vectores que forman la base, serán cero.

1. Si todos los  $W_j = c_j - z_j < 0$  no básicos ( $j = m + 1, \dots, m + n$ ), se ha obtenido la solución óptima. Fin.
2. Si  $W_j = c_j - z_j = 0$  para algún  $j = m + 1, \dots, m + n$  y los restantes  $W_j = c_j - z_j$  no básicos son negativos, entonces el último  $x^*$  es solución del problema, pero además posee otra u otras soluciones óptimas.
3. Si no se dan los casos anteriores, elegir  $j$  tal que  $W_j = c_j - z_j = \max\{c_s - z_s : c_s - z_s > 0, s = m + 1, \dots, +n\}$  y entra en la base la variable no básica  $j$ .

**Paso 3:** Elegido el índice  $j$  en la etapa anterior, observa el signo de los valores  $Y_{ij}, i = 1, \dots, m$ . Puede suceder:

1. Que  $Y_{ij} \leq 0, \forall i = 1, \dots, m$ ; entonces el problema es no acotado. Fin.
2. Si no ocurre el caso anterior, sale de la base la variable  $i$ , tal que:  $x_i/Y_{ij} = \min\{x_k/Y_{kj} : Y_{kj} > 0, k = 1, \dots, m\}$ .

**Paso 4:** Sustituir en la base la variable  $i$  por la variable  $j$ , lo que obliga a realizar en la tabla del simplex los cambios algebraicos oportunos para que en la columna correspondiente a la variable  $j$ , aparezca el correspondiente vector de la base canónica. Volver al Paso 2.

### 4.3. Tabla del Simplex. Definición y ejemplo de uso

Consideremos un problema de maximización lineal, en principio de forma aumentada:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & z = c^t x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y una solución básica factible (s.b.f.),  $x^t = (x_B^t, x_N^t)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} Ax &= b = (B|N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde (4.3) es la condición de factibilidad. Además, al sustituir en la f.o.:

$$\begin{aligned} z &= (c_B^t c_N^t) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^t (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^t x_N = \\ &= c_B^t B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N) x_N \geq c_B^t B^{-1}b \end{aligned} \quad (4.4)$$

se obtiene la condición de optimalidad (4.4).

Todos estos elementos se pueden representar en la siguiente tabla:

	$c_1$	$\dots$	$c_n$	$0$	$\dots$	$0$
	$x_1$	$\dots$	$x_n$	$s_1$	$\dots$	$s_m$

$c_B$	$x_B$	$y = B^{-1}A$	$B^{-1}b$
	$Z_j$	$c_B^t B^{-1}P_j$	$z = c_B^t B^{-1}b$
	$W_j$	$c_j - c_B^t B^{-1}P_j$	

#### 4.3.1. Ejemplo de definición y actualización de la tabla

Consideremos el problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 4x + y \\ \text{s.a } &2x + y + s = 8 \\ &y + t = 5 \\ &x, y, s, t \geq 0 \end{aligned}$$

y tomemos como punto de partida la s.b.f.  $(\frac{3}{2}, 5, 0, 0)$ , con valor en la f.o.  $z = 11$ .

Siendo  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , además:

$$B^{-1}A = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La condición de factibilidad (4.1):

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \geq 0 \Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \geq 0$$

La condición de optimalidad (4.2):

$$z = (c_B^t c_N^t) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^t B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N) x_N =$$

$$\begin{aligned}
&= (4 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 5 \end{pmatrix} + \left[ (0 \ 0) - (4 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \\
&= 11 + [-2 \ 1] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \geq 11
\end{aligned}$$

Introduciendo los datos en la tabla anterior:

		4	1	0	0	
		$x$	$y$	$s$	$t$	
4	$x$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	$y$	0	1	0	1	5
	$Z_j$	4	1	2	-1	11
	$W_j$	0	0	-2	1	

Estamos maximizando, y se observa lo siguiente:

1. La tabla no corresponde a una solución óptima, puesto que hay valores  $W_j > 0$ .
2. Necesitamos seleccionar la variable candidata a entrar en la base, será aquella  $x_j : W_j > 0$  máximo. Corresponde a la columna  $t$  (columna pivote).
3. También debemos identificar qué variable sale de la base. En la columna  $t$ , elegiremos la fila para la que el valor  $Y_t > 0$  sea mínimo. En nuestro caso sale de la base la variable  $y$  (fila pivote).
4. El elemento de intersección entre la columna y la fila pivote, se denomina pivote. En nuestro caso el pivote es el 1.

Para actualizar la tabla:

1. Dividir todos los elementos de las filas correspondientes a las variables básicas, entre el pivote.
2. En todas las filas de la tabla correspondientes a las variables básicas excepto en la fila pivote, realizar la siguiente operación: Fila anterior - Anterior elemento de la fila en la columna pivote \* Nuevo elemento en fila pivote.

Se trata de obtener un cero en el elemento de la fila correspondiente a la columna pivote.

Por ejemplo, para transformar la fila correspondiente a  $x$ :

1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
—	—	—	—	—
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
*	*	*	*	*
0	1	0	1	5

Por su parte, los elementos  $Z_j$  y el valor de la f.o. asociados a la nueva s.b.f. se calculan mediante el producto escalar de las nuevas variables básicas por cada una de las columnas de  $B^{-1}A$ . Asimismo, la fila correspondiente a  $W_j$  se obtiene restando el vector de coeficientes  $c_j$  y la fila  $Z_j$ .

Tras realizar esta operación denominada pivoteaje sobre todas las filas de la tabla anterior, la tabla resultante es:

		4	1	0	0	
		$x$	$y$	$s$	$t$	
4	$x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4
0	$t$	0	1	0	1	5
	$Z_j$	4	2	2	0	16
	$W_j$	0	-1	-2	0	

Esta tabla corresponde a la solución óptima puesto que  $W_j < 0$ , para toda  $x_j$  variable no básica. Además, como  $W_j \neq 0$ , la solución óptima es única, ( $x = 4, y = 0, s = 0, t = 5$ ) y  $z = 16$ .

### 4.3.2. Tabla inicial del simplex

Dado un problema lineal, para construir una tabla inicial del simplex, únicamente nos hace falta conocer una s.b.f.

La más sencilla, se obtiene eligiendo a las variables de holgura como variables básicas, es decir, en el ejemplo anterior:  $x_B^t = (s, t) = (8, 5)$  y el resto de variables, no básicas,  $x_N^t = (x, y) = (0, 0)$ . En este caso:

$$A = (B \mid N) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1}A = A$$

y  $B^{-1}b = b \geq 0$ .

Con lo que una tabla inicial del simplex, sería:

		4	1	0	0	
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	
0	<i>s</i>	2	1	1	0	8
0	<i>t</i>	0	1	0	1	5
	<i>Z<sub>j</sub></i>	0	0	0	0	0
	<i>W<sub>j</sub></i>	4	1	0	0	

Es imprescindible partir del PL en formato estándar. Si no aparece así, hay que multiplicar por (-1) las desigualdades correspondientes. En este caso, no es posible en general determinar la s.b.f. inicial de la forma descrita anteriormente.

#### 4.4. Programación lineal con GAMS

Presentamos a continuación algunas observaciones útiles en cuanto a la resolución de problemas lineales con GAMS.

Bloque de variables: en los problemas lineales no se necesita cambiar el punto inicial por defecto.

Bloque de ecuaciones: las cotas sobre variables se pueden introducir en este bloque.

Bloque de solución: la instrucción para resolver este tipo de problemas es:

SOLVE nombre\_modelo USING LP maximizing/minimizing variable\_objetivo;

Interpretación de la salida: En programación lineal, el programa GAMS proporciona, si existen óptimos globales. Por tanto, la interpretación de la solución, es sencilla. Si el problema se detiene con el aviso: (i) INFEASIBLE, el problema es infactible, (ii) UNBOUNDED, es no acotado, (iii) OPTIMAL, es un problema acotado y solución óptima global.

#### 4.5. Dualidad

Dado un problema lineal, en adelante primal, es posible plantear un problema dual en el que las variables de decisión de uno son los multiplicadores K-T del otro y con la particularidad de que ambos problemas son equivalentes en el sentido de que sus soluciones están relacionadas.

En cuanto a la construcción del problema dual, se siguen las siguientes reglas:

1. El problema dual tiene tantas variables como restricciones tiene el primal.

2. El problema dual tiene tantas restricciones como variables tiene el primal.
3. Si el objetivo en el primal es de maximizar, en el dual es de minimizar y viceversa.
4. Los coeficientes de la f.o. dual son los términos independientes del problema primal y los términos independientes del problema dual son los coeficientes de la f.o. en el primal.
5. La matriz técnica del problema dual es la traspuesta de la matriz técnica de problema primal.
6. Los tipos de desigualdades en las restricciones y las condiciones de signo del dual, vienen dadas en la siguiente tabla, conocida como tabla de Tucker:

Maximizar	Minimizar
Variable $\left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{libre} \end{array} \right.$	Restric. $\left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right.$
Restric. $\left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right.$	Variable $\left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{libre} \end{array} \right.$

Veremos a continuación los tres teoremas fundamentales de la dualidad. Estos teoremas permiten establecer bajo qué condiciones existe la solución del problema dual y la relación entre los problemas primal y dual.

**Teorema 4.5** (*Teorema de existencia*). *La condición necesaria y suficiente para que un problema de programación lineal tenga solución (óptima) es que, tanto la región factible del primal  $S$  como la del dual  $S'$  sean no vacías, es decir que ambos problemas sean factibles.*

**Teorema 4.6** (*Teorema de la dualidad*). *La condición necesaria y suficiente para que exista solución óptima del primal,  $x^*$ , es que exista solución óptima para el dual,  $\lambda^*$ , en cuyo caso, el valor de la f.o. en ambos casos es el mismo, es decir,  $F(x^*) = G(\lambda^*)$ .*

**Teorema 4.7** (*Teorema de la holgura complementaria*). *La condición necesaria y suficiente para que  $(x^*, \lambda^*)$  sean soluciones óptimas de los problemas primal y dual, es que satisfagan las condiciones de holgura complementaria (dadas en la Definición 2.4 (Puntos de K-T)).*

En programación lineal, la interpretación económica del problema dual es muy potente. Por una parte, por definición, las variables principales del problema dual corresponden a los multiplicadores de Kuhn y Tucker del problema primal y por tanto miden

la variación aproximada de la f.o. en el óptimo frente a aumentos marginales unitarios en los términos independientes de las restricciones activas. Y, por otra, hay innumerables interpretaciones económicas que pueden derivar del enunciado económico que subyace en el problema dual.

En problemas lineales en los que todas las variables son positivas, el programa GAMS facilita información en la columna MARGINAL del fichero salida del programa.

En dicha columna, en el bloque de ecuaciones, mide los costes de oportunidad en que se incurre por no utilizar una unidad más del correspondiente recurso (consumido completamente en el óptimo).

En el bloque de variables, indica la contribución en la f.o. por unidad de la variable de decisión en cuestión (que suponemos no negativa), si ésta se vuelve estrictamente positiva.

## 4.6. Análisis de sensibilidad y post-optimización

Al resolver un problema de programación lineal se parte de que los coeficientes, términos independientes y coeficientes de la matriz técnica son conocidos con certeza y permanecen constantes en el tiempo. Estas hipótesis sólo son admisibles a muy corto plazo y en periodos de planificación a medio y largo plazo es muy probable que estos coeficientes varíen, haciendo tal vez, inadecuada la solución óptima obtenida.

En programación lineal, estos cambios pueden afectar a las dos condiciones que ha de satisfacer una solución óptima,  $x^*$ , que son:

$$\text{Condición de factibilidad: } x_B = B^{-1}b \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\text{Condición de optimalidad: (Max | Min)} \\ &W_j = c_j - c_B^t B^{-1} P_j \leq 0 (\geq 0), j = m + 1, \dots, m + n. \end{aligned}$$

Puesto que hemos parado, porque no había posibilidad de que entrara otra variable a la base.

A continuación estudiaremos cómo afecta un cambio en cualquiera de estos parámetros a la solución óptima, desde dos perspectivas distintas: el análisis de sensibilidad y el análisis de post-optimización.

El análisis de sensibilidad trata de la obtención del intervalo de variación de un parámetro dado, sin que se modifique la estructura de la solución óptima. Y decimos estructura, porque en dicho intervalo no varían las variables seleccionadas como básicas y no básicas, pero sí pueden variar los valores concretos de las variables básicas.

Estos intervalos se calculan estudiando el campo de variación del parámetro para que se sigan cumpliendo las condiciones de factibilidad y optimalidad anteriores.

**Ejemplo 4.4** Considera el problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 8x + 3y \\ \text{s.a} \quad & x - y \leq 3 \\ & 2x + y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución óptima es  $x^* = 2, y^* = 0, f^* = 16$ .

Sustituyendo el valor de las variables en las restricciones se observa que  $s = 1$  y  $t = 0$ . Vamos a ver cómo afectan los cambios de los coeficientes en la f.o. a la condición de óptimo, calculando el intervalo de sensibilidad de  $c_1 = 8$  (básico) y  $c_2 = 3$  (no básico).

En cuanto a  $c_1$ , para que la solución siga siendo óptima, en un problema de maximización:

$$W_j = c_j - c_B^t B^{-1} \cdot P_j \leq 0, \forall j = m + 1, \dots, m + n$$

Teniendo la matriz técnica ampliada:

$$A = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) (x \quad y \quad s \quad t)$$

Sustituyendo el valor de la solución óptima  $x^* = 2, y^* = 0$ , se obtiene  $s^* = 1, t^* = 0$ . Luego:  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  y  $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (P_y \quad P_t)$ .

El intervalo para  $c_1$  (básico) se calcula a partir de:

$$\begin{aligned} W_y &= 3 - (c_1 \quad 0)B^{-1}P_y = \\ &= 3 - (c_1 \quad 0)B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= 3 - \frac{c_1}{2} \leq 0 \end{aligned}$$

luego  $c_1 \geq 6$ .

En cuanto al intervalo para  $c_2$  (no básico):

$$\begin{aligned} W_y &= c_2 - (8 \quad 0)B^{-1}P_y = \\ &= c_2 - (8 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= c_2 - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Luego  $c_2 \leq 4$ .

Por otra parte los cambios en los términos independientes, afectarán a la condición de factibilidad.

En el ejemplo anterior, para el coeficiente  $b_1$  de la primera ecuación, si se quiere que la solución siga siendo factible, ha de cumplirse:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b_1 - 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

De donde  $b_1 - 2 \geq 0$  y por tanto  $b_1 \geq 2$ .

Para el coeficiente  $b_2$ :

$$x_B = B^{-1}b \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{2} \\ 3 - \frac{b_2}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Luego  $\frac{b_2}{2} \geq 0$  y  $3 - \frac{b_2}{2} \geq 0$ . De la primera  $b_2 \geq 0$  y de la segunda  $b_2 \leq 6$ , luego  $0 \leq b_2 \leq 6$ .

Finalmente los cambios en los coeficientes de la matriz de restricciones afectan a la condición de óptimo y si el cambio se mantiene dentro del intervalo de sensibilidad, se modifica el valor de la f.o. en el óptimo, pero no el valor de las variables. Si queremos obtener el intervalo para  $a_{22}$ :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de donde

$$B^{-1} \cdot P_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{2} \\ -1 - \frac{a_{22}}{2} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} W_y &= 3 - (8 \ 0)B^{-1}P_y \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 - (8 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{2} \\ -1 - \frac{a_{22}}{2} \end{pmatrix} \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 - 4a_{22} \leq 0 \Rightarrow a_{22} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Finalmente señalar que el análisis de post-optimización consiste en obtener la nueva solución óptima de un problema lineal cuando se produce una modificación en alguno de los parámetros del problema, se introduce una nueva variable de decisión o nueva restricción. Siempre intentando aprovechar la solución óptima del problema inicial.

Volvemos al ejemplo anterior, analizando primero los cambios en los coeficientes de la f.o. Veamos qué sucede cuando  $c_1$  pasa a valer 6. Dicho coeficiente corresponde a una variable básica y como dicho valor pertenece al intervalo de sensibilidad para  $c_1$ :  $[6, \infty)$

calculado anteriormente, la solución óptima sigue siendo válida aunque cambie el valor de la f.o.

Veamos ahora qué ocurre cuando  $c_1$  pasa a valer 4. En este caso, el valor no pertenece al intervalo de sensibilidad y la solución anterior deja de ser óptima. En una siguiente optimización, se encuentra la solución única y no degenerada:

$$x^* = 0, y^* = 4, s^* = 7, t^* = 0, f^* = 12$$

Veamos ahora cómo analizar los cambios de los coeficientes en el vector de términos independientes. Analicemos, por ejemplo, qué pasa cuando  $b_1$  pasa a valer 4. Como dicho valor está dentro del intervalo de sensibilidad, el cambio no afecta a la condición de óptimo; sin embargo cambia el valor de las variables en la solución y el valor de la función objetivo.

Tenemos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

optimizando de nuevo, obtenemos  $x^* = 2, y^* = 0, s^* = 2, t^* = 0$  y  $f^* = 16$ , solución única y no degenerada.

En segundo lugar analizaremos qué sucede cuando  $b_2$  pasa a valer 9. Este valor no pertenece al intervalo de sensibilidad de  $b_2$  y por lo tanto la solución deja de ser óptima al referirse a una solución básica que no es factible, puesto que:

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} < 0$$

Por lo tanto debemos resolver el problema de nuevo y obtenemos:  $x^* = 4, y^* = 1, s^* = 0, t^* = 0$  y  $f^* = 36$ , solución única y no degenerada.

Finalmente vamos a ver cómo afectan otro tipo de cambios, como por ejemplo introducir una nueva variable.

Veamos cuál es la solución óptima del problema si introducimos una nueva variable  $z$ , con  $c_3 = 1$  y  $P_3 = (1 \ 0)^t$ .

Este cambio afecta a la condición de óptimo pero no a la de factibilidad, que resulta:

$$B^{-1}P_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W_z = 1 - (8 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ . Volviendo a iterar recuperamos la condición de optimalidad, y obtenemos:  $x^* = 0, y^* = 4, s^* = 0, t^* = 0$  y  $f^* = 19$ .

#### 4.6.1. Análisis de sensibilidad con GAMS

Para que GAMS realice un análisis de sensibilidad tal y como hemos descrito en la sección anterior, es preciso seleccionar como solver CPLEX. Para hacer ésto, debemos añadir tras el bloque de declaración de restricciones la sentencia:

```
OPTION LP=CPLEX;
```

y tras dar nombre al modelo,

```
nombre_modelo.OPTFILE=1;
```

Además hay que crear un fichero nuevo de nombre CPLEX.OUT, en el que escribir las sentencias

```
OBJRNG ALL
```

```
RHSRNG ALL
```

Así, al ejecutar GAMS, al final del fichero .lst, aparecerá el rango de valores para cada coeficiente del rhs y para cada coeficiente de la f.o., para los que la solución óptima encontrada sigue siendo válida.

#### 4.7. Análisis paramétrico

El análisis paramétrico o programación lineal paramétrica estudia cuál o cuales son las soluciones de un problema de programación lineal cuando uno o varios elementos (básicamente coeficientes o términos independientes) del modelo dependen de un determinado parámetro.

El método de trabajo es muy similar al del análisis de post-optimización. La diferencia es que dicho análisis se debe realizar para un intervalo de valores del parámetro en cuestión con lo que crece la complejidad computacional del proceso.

#### 4.8. Programación lineal entera

Muchos problemas lineales, por sus propias características, porque incluyen alguna variables de decisión de tipo cualitativo, o porque formulados requieren de variables enteras, exigen considerar una o varias variables de decisión de este tipo.

La exigencia de integridad de una o más variables de decisión en los problemas lineales enteros y con ella el incumplimiento de la hipótesis de convexidad de la región factible, complica sustancialmente la resolución de estos problemas, alargando los tiempos de ejecución de los algoritmos en problemas de dimensión mediana y grande.

En GAMS, hay que añadir en la definición de las variables el tipo, si es 0-1, s indica con: binary variables y si es entera, se debe añadir integer variables, en lugar de positive variables. Además en éste último caso, hay que acotar superiormente a las variables. Si no se hace, el problema es inacotado.

En cuanto al bloque de solución, la instrucción para resolver este tipo de problemas es:

SOLVE nombre\_modelo USING MIP maximizing/minimizing variable\_objetivo;

## 4.9. Ejercicios

1. Resuelve los siguientes problemas lineales utilizando el algoritmo del simplex, obtén todas las soluciones óptimas e identifica de qué tipo de problema se trata, atendiendo a dicha solución.

a)

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= x + 2y \\ \text{s.a } & x + y \leq 4 \\ & 2x + y \leq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

Problema acotado. Solución óptima única  $(0, 4)$ ,  $z^* = 8$ .

b)

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= -x + y \\ \text{s.a } & -x + y \leq 2 \\ & y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

Problema acotado. Solución óptima múltiple, definida por la arista que une los vértices  $(0, 2)$  y  $(2, 4)$ .  $z^* = 2$ .

Esto es, las soluciones óptimas cumplen:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ s^* \\ t^* \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (4.5)$$

c)

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= x \\ \text{s.a } & -x + y \leq 2 \\ & y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

Problema no acotado.

d)

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= y \\ \text{s.a } & -x + y \leq 2 \\ & y \leq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

Problema acotado. Solución óptima múltiple  $x^* \geq 2$ ,  $y^* = 4 = z^*$ . Esto es, las soluciones óptimas cumplen:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ s^* \\ t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \geq 0 \quad (4.6)$$

e)

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 5x + y + 2t \\ \text{s.a } & 2x + 5y + t \leq 10 \\ & -x + 2y + t \geq 4 \\ & x, y, t \geq 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

Problema acotado. Solución óptima única  $x^* = 2$ ,  $y^* = 0$ ,  $t^* = 6$ ,  $s_1^* = s_2^* = 0$ ,  $z^* = 22$ .

**Nota:** Habrás observado que si el problema es acotado, podemos encontrarnos tres situaciones:

- La solución óptima es única. Todos los rendimientos marginales  $W_j < 0$ , para todas las variables  $x_j$  no básicas.
- La solución óptima es múltiple (de arista finita). Al menos uno de los rendimientos marginales  $W_{j_0} = 0$ , para la variable no básica  $x_{j_0}$ . Si hacemos entrar en la base a dicha variable  $x_{j_0}$ , llegamos a una tabla en la que no existe ninguna variable no básica con rendimiento nulo y vector  $Y \leq 0$ . Si llamamos  $x_1, \dots, x_k$  a los distintos vértices óptimos obtenidos en las distintas iteraciones, la solución óptima es la combinación lineal convexa de todos ellos.  
 $x^* = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ , donde  $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 1$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ .
- La solución óptima es múltiple (de arista infinita). Al menos uno de los rendimientos marginales  $W_{j_0} = 0$ , para la variable no básica  $x_{j_0}$ . Si hacemos

entrar en la base a dicha variable  $x_{j_0}$ , llegamos a una tabla en la que existe al menos una variable no básica con rendimiento nulo y vector asociado  $Y_{j_0} \leq 0$ . Si llamamos  $x$  a la solución óptima del problema y  $d_1, \dots, d_k$  a las direcciones óptimas extremas, obtenidas haciendo en las posiciones básicas  $d_j = 1$  si  $Y_j < 0$ , y en otro caso  $d_j = 0$ , la expresión matemática de todas las soluciones óptimas del problema es la combinación lineal:

$$x^* = x + \beta_1 d_1 + \dots + \beta_k d_k, \text{ donde } \beta_1, \dots, \beta_k \geq 0.$$

- Un fabricante de productos lácteos fabrica dos tipos de yogur: natural y muesli que presenta en formato de 500gr. En la composición del yogur natural interviene en un 85% leche fermentada parcialmente desnatada y en 15% restante fermentos lácteos de alto contenido en calcio y sodio. Y en la composición del yogur con muesli un 80% de leche fermentada, un 15% de fermentos lácteos y un 5% de muesli. Las cantidades diarias disponibles son 50kg. de leche fermentada, 9kg. de fermentos lácteos y 2kg. de muesli. Los yogures se venden a 0.90 euros por unidad, la modalidad natural y 1.15 euros, la modalidad muesli. Determina la cantidad óptima a fabricar de ambos productos para maximizar ingresos.

Nota: Utiliza la sentencia `OPTION SOLSLACK=1;` para obtener el valor de las variables de holgura.

**Solución:**

Se deben fabricar 40 unidades (de 500gr.) de yogur natural y 80 de yogur con muesli. Los ingresos serán de 128 euros.

- Una empresa de vidrio hueco fabrica botellas verdes, blancas y opacas, destinadas al evasado de vino, bebidas gaseosas, zumos y cerveza. Dado que el vidrio es un material que se puede reciclar y recuperar en un 100%, son indistinguibles las botellas fabricadas por la empresa a partir de silicatos y a partir de vidrio reciclado.

Las botellas se fabrican a partir del calcín (una mezcla de sílice, sosa, caliza y arena), que moldeable a 1500 grados centígrados es sometido a un proceso automático de prensado (para formar el extremo abierto) y soplado (para formar el hueco del recipiente). El calcín se puede obtener a partir de materias primas o a partir de vidrio usado. En el primer caso se necesitan 720gr. para fabricar una botella, mientras que en el segundo, 600gr. Los tiempos en minutos, por fabricación de cada botella, y las horas disponibles en cada sección se resumen en la siguiente tabla:

	Cribado y Rotura	Fundido	Prensado	Soplado
Botella no reciclada	0 min.	10 min.	2 min.	4 min.
Botella reciclada	5 min.	7.4 min.	2 min.	4 min.
Horas disponibles	300	500	150	300

Además sabemos:

- que las disponibilidades mensuales de almacenamiento de la empresa son de 2500 kg. de materia prima y 4000 botellas;
- para cobrar la subvención del programa RECICLE, al menos el 50% de la materia prima ha de ser vidrio reciclado,
- al menos el 60% de la producción han de ser botellas verdes,
- no se fabrican botellas blancas con vidrio reciclado, y
- los ingresos unitarios en euros por botella verde, blanca y opaca, son respectivamente: 0.4; 0.5 y 0.3.

Resuelve las siguientes cuestiones:

- a) El fabricante desea averiguar cuántas botellas ha de fabricar mensualmente de cada color para maximizar ingresos.
- b) ¿Cuál es la repercusión en los ingresos que tiene la fabricación de una botella opaca reciclada?
- c) Razona si se consumen o no todas las horas disponibles en cada una de las cuatro secciones del proceso productivo. Si la empresa pudiera disponer de 10h. adicionales, en qué sección las debería emplear y cuál sería su repercusión sobre los ingresos.
- d) ¿Se fabricarán botellas opacas, si se incrementa en 10h. el tiempo disponible en la sección de fundido?
- e) Indica el rango de ingresos (precios) de las botellas blancas para el cual la solución obtenida sigue siendo óptima. ¿Cómo varían los ingresos en dicho intervalo?

**Solución:**

- a)  $V_n, V_r$ : número de botellas verdes fabricadas, nuevas y recicladas, respectivamente.  $B_n, B_r$ : número de botellas blancas fabricadas, nuevas y recicladas, respectivamente.  $O_n, O_r$ : número de botellas opacas fabricadas, nuevas y recicladas, respectivamente. La solución óptima es  $V_n = 0, V_r = 3600, B_n = 336, B_r = 0, O_n = 0, O_r = 0$ , con unos ingresos máximos de 1608euros.
- b) Cada botella opaca reciclada reduce los ingresos en 0.1euro.
- c) Se consumen todas las horas disponibles en las secciones de cribado y fundido. Si la empresa pudiera disponer de 10h. adicionales, las debería aplicar a la sección de fundido con un incremento de 30 euros en los ingresos.
- d) No.
- e) El rango de precios de las botellas blancas es  $p \in [0,4, 0,5405]$ , los ingresos en función de  $p$  varían de acuerdo con la expresión  $336p + 1440$ .

4. Una estación desaladora suministra agua a particulares y empresas de tres localidades situadas a 25, 5 y 30 kms. de distancia. Sabiendo que:
- La demanda mínima total de agua es:  $350 \text{ m}^3$ /día a particulares y  $40 \text{ m}^3$ /día para empresas.
  - Las empresas representan respectivamente el 5, 1 y 25 % de la demanda de agua de cada localidad.
  - Los costes de suministro son de 0.07 euros por km. y  $\text{m}^3$ .
- a) Determinar el número de litros que se han de suministrar diariamente a cada localidad para minimizar costes. Estudia si esta solución óptima es única y/o degenerada.
- b) ¿Qué efecto tendría sobre el coste el suministro de  $20\text{m}^3$  de agua a la primera localidad?
- c) ¿Qué efecto tendría sobre el coste un aumento de la demanda de particulares de  $5\text{m}^3$ ?
- d) ¿Cuál es el precio mínimo que se debería cobrar por  $\text{m}^3$  a las empresas? ¿Y a los particulares?

**Solución:**

- a) Se trata de un problema acotado. La solución es óptima es única (número de rendimientos marginales de las variables iguales a cero igual al número de restricciones) y no degenerada (las variables básicas son  $x_2$  y  $x_3$ ). La solución óptima consiste en: suministrar  $239.583\text{m}^3$  a la segunda localidad,  $150.417\text{m}^3$  a la tercera localidad y  $0\text{m}^3$  a la primera con un coste mínimo diario de 399.73 euros.
- b) El suministro de  $20\text{m}^3$  de agua a la primera localidad tendría un incremento de costes de 22.16euros.
- c) Un aumento de la demanda de particulares de  $5\text{m}^3$  tendría un incremento de costes de 1.385euros.
- d) El precio mínimo a cobrar por  $\text{m}^3$  a las empresas sería de 7.57euros/ $\text{m}^3$ , y a los particulares de 0.28euros/ $\text{m}^3$
5. Una empresa que se dedica a la fabricación de ordenadores compra los discos duros, uno por ordenador, a cuatro fabricantes de forma indistinta. Los costes fijos por envío, el precio unitario de cada disco duro y el número máximo de discos por envío se presentan en la tabla adjunta:

	Costes fijo por envío	precio unitario (euros/unidad)	Tamaño máximo del envío
Fabricante 1	1200	80	700
Fabricante 2	1000	100	400
Fabricante 3	800	95	500
Fabricante 4	700	110	800

Determinar el número de discos duros que se deben pedir a cada proveedor para que el coste de producción de los 1000 ordenadores previstos para este mes sea mínimo.

**Solución:**

Sea  $F_i$  la variable binaria que toma el valor 1 si se compra al fabricante  $i$  y toma el valor cero en otro caso, con  $i = 1, \dots, 4$ . Sea además la variable  $X_i$  la variable entera que representa el número de ordenadores comprados al Fabricante  $i$ , con  $i = 1, \dots, 4$ . La solución óptima es  $X_1 = X_3 = 1$ ,  $X_2 = X_4 = 0$ ,  $F_2 = F_4 = 0$ ,  $F_1 = 700$ ,  $F_3 = 300$ , con un coste de producción de 85900 euros.

#### 4.10. Trabajo en grupo 2: Planificación financiera I

A lo largo de esta sección se considera un problema de planificación de inversiones en una cartera de valores con varios activos financieros. Se trata de un clásico ejemplo tomado de Birge y Louveaux (1997).

El objetivo del problema será obtener un cierto capital, dentro de  $H$  años. Actualmente disponemos una cantidad  $b$  que vamos a invertir en alguno de los  $I$  instrumentos financieros. Después de  $H$  años, tendremos un capital que nos gustaría que superase una cantidad  $W$ . Podemos suponer que la cartera puede ser modificada cada  $v$  años, por lo que consideraremos  $T = \frac{H}{v}$  periodos de inversión.

Para simplificar ignoraremos costes de transacción e impuestos, aunque sabemos que en la práctica dichas consideraciones son importantes. Supondremos también todas las cantidades de dinero medidas en miles de euros constantes.

En la formulación del problema, describiremos la función objetivo en términos de una función de utilidad cóncava (utilizada en modelización para representar aversión al riesgo). El exceder la cantidad  $W$  después de  $H$  años, supondrá obtener una tasa de interés de  $q$ , sobre dicho exceso, mientras que no llegar a la cota mínima supondría pedir prestado a un tipo de interés  $r$  la cantidad faltante.

Este problema consta entonces de los siguientes elementos:

Conjuntos

$I$ , instrumentos financieros: Activos, Bonos, Letras del Tesoro, etc.

$T$ , periodos de inversión.

Variables de decisión

$x_{it}$ , volumen de inversión en el instrumento  $i$  al comienzo del periodo  $t$ .

$y$ , exceso de capital sobre la cantidad prefijada al final del último periodo.  
 $w$ , defecto de capital sobre la cantidad prefijada al final del último periodo.

Parámetros

$b$ , capital inicial disponible al comienzo del primer periodo.

$W$ , capital que el inversor desea obtener al final del último periodo.

$q$ , tipo de interés (en tanto por uno) aplicable al exceso de capital.

$r$ , tipo de interés (en tanto por uno) para préstamo (aplicable al faltante de capital).

$r_{it}$ , rendimiento al final del periodo  $t$  por una unidad invertida en el instrumento  $i$  al comienzo de dicho periodo.

Para ayudar al inversor en su decisión podemos plantear el siguiente modelo lineal <sup>1</sup>

$$\text{máx } z = qy - rw$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & \sum_{i \in I} x_{i1} = b \\ & - \sum_{i \in I} r_{it-1} x_{it-1} + \sum_{i \in I} x_{it} = 0, \quad t \in T - \{1\} \\ & \sum_{i \in I} r_{iT} x_{iT} - y + w = W \\ & x_{it} \geq 0, \forall i \in I, t \in T, \\ & y \geq 0, w \geq 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde el objetivo es proponer una política de inversión que maximice la utilidad del beneficio del inversor, es decir, la función objetivo es la cantidad en exceso ponderada al tipo de interés  $q$  menos el faltante obtenido ponderado a un interés  $r$ . Dicha función objetivo premia el exceso de beneficio penalizando su defecto. Si al finalizar los  $|T|$  periodos, el inversor obtiene excedente, su utilidad será precisamente ese beneficio; si por el contrario, obtiene pérdidas, la utilidad del inversor será menos cuatro veces dicho faltante (i.e.,  $r = 4q$ ).

El conjunto de restricciones del modelo tienen el siguiente significado. La primera restricción indica que la suma de las cantidades invertidas en cada uno de los instrumentos financieros en el primer periodo de tiempo, ha de ser igual al capital inicial disponible,  $b$ .

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante, indicaremos un vector columna mediante una letra latina o griega, mientras que el vector fila correspondiente vendrá indicado por la misma letra con el superíndice  $t$  (traspuesta). Por ejemplo,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{y } b^t = (b_1, b_2, b_3)$$

a excepción de las letras  $h, \rho$  (coeficientes de la función objetivo) y las variables duales,  $\lambda, \alpha, \beta, W, V$  que reservaremos para denotar un vector fila:

$$h = (h_1, h_2) \quad \text{y } h^t = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Las siguientes  $|T| - 1$  restricciones representan la ecuación de balance de capital para cada uno de los  $|T| - 1$  periodos. Dichas ecuaciones igualan el beneficio total (intereses más principal) producido por las inversiones realizadas en un periodo dado, y las inversiones que se realizan en el siguiente periodo. Hay que señalar que no se permiten pérdidas ni aportaciones exógenas de dinero en el modelo. La última restricción indica que el beneficio obtenido en el último periodo, menos el excedente o, en su caso, más el faltante tiene que coincidir con el capital establecido a priori por el inversor.

#### 4.10.1. Enunciado 1: Modelo Determinista

Utilizaremos un pequeño ejemplo ilustrativo con el fin de visualizar mejor el modelo. Contaremos con un conjunto de dos activos financieros  $I = \{1, 2\}$ ;  $i = 1$  si se trata de acciones e  $i = 2$  si se trata de bonos.

El horizonte temporal será  $H = 15$  años. Las inversiones podrán cambiar cada 5 años, de manera que  $T = 3$ .

El capital inicial del que se parte es  $b = 55$  miles de euros y el capital que se pretende alcanzar es  $W = 80$  miles de euros. El tipo de interés (en tanto por uno) sobre el excedente es  $q = 1$  y sobre el faltante  $r = 4$ .

El inversor sabe por experiencia pasada que el rendimiento medio unitario para estos activos durante los distintos periodos de tiempo viene dado por:

$$\begin{aligned} r_{1t} &= 1,155, \quad t \in T && \text{acciones} \\ r_{2t} &= 1,13, \quad t \in T && \text{bonos} \end{aligned}$$

Dados los valores concretos de los parámetros, resuelve el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= y - 4w \\ \text{s.a.} \quad & x_{11} + x_{21} &= 55 \\ & -1,155x_{11} - 1,13x_{21} + x_{12} + x_{22} &= 0 \\ & -1,155x_{12} - 1,13x_{22} + x_{13} + x_{23} &= 0 \\ & 1,155x_{13} + 1,13x_{23} - y + w &= 80 \\ & x_{it} \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad t \in T \\ & y \geq 0, w \geq 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para ello,

1. Implementa en GAMS el modelo de programación determinista correspondiente al modelo (4.8).
2. Obtén la solución óptima así como la política de decisiones que propone dicha solución óptima.
3. Interpreta la solución obtenida

## Capítulo 5

# Optimización estocástica

La optimización estocástica es una disciplina para modelizar problemas de optimización cuyos parámetros no son deterministas. Los problemas de optimización determinista se formulan para parámetros conocidos con certeza, a pesar de que casi todos los problemas del mundo real incluyen algún parámetro desconocido. Una característica de los modelos de Optimización Estocástica es que presuponen conocidas o estimables las distribuciones de probabilidad asociadas a los datos. Además, habitualmente se supone que las distribuciones son discretas con un número finito de estados posibles. El objetivo aquí es encontrar una política de decisión que sea factible para todos (o casi todos) los datos posibles y maximice la esperanza de alguna función sobre las decisiones y las variables aleatorias. Más generalmente, estos modelos se formulan, se resuelven analítica o numéricamente, y se analizan de cara a proporcionar información útil al tomador de decisiones.

### 5.1. Modelización estocástica

El problema de la incertidumbre en los parámetros se ha venido tratando regularmente en la literatura sobre optimización matemática desde 1955, año en el que se publicaron los trabajos seminales sobre la materia debidos a Beale y Dantzig, independientemente. No obstante, dado el alto grado de sofisticación que la resolución del problema requiere, no se ha podido abordar la resolución de problemas prácticos de optimización matemática con incertidumbre hasta el comienzo de la unión entre Ciencias Matemáticas y Ciencias de la Computación en los años 80.

A lo largo de esta sección se estudiarán diferentes representaciones matemáticas del *Modelo Determinista Equivalente* al modelo estocástico, como son la representación *compacta* y representación por *variables divididas*, también llamada *extendida*.

Además se describirán los modelos estocásticos y sus propiedades en función del número de etapas consideradas a lo largo del horizonte de planificación, según lo cual se tendrán problemas de dos etapas y problemas multietápicos. Según el carácter de

las variables que intervienen en los mismos, habrá problemas de optimización lineales, enteros o mixtos.

### 5.1.1. Problemas lineales estocásticos

Los *problemas lineales estocásticos*, son problemas de optimización lineal en los que algunos de los parámetros  $(c, A, b)$  del modelo se consideran inciertos. Esto significa que algunos de los parámetros del problema se pueden representar por variables aleatorias. Se supone que está disponible una descripción probabilística de las variables aleatorias, bajo la forma de distribuciones de probabilidad, densidades, o más generalmente, medidas de probabilidad. Como es habitual, los valores particulares que toman las variables aleatorias sólo se conocen tras el experimento aleatorio.

Problemas con estas características aparecen en multitud de disciplinas, se citan tan solo algunos ejemplos: los costes de producción y distribución típicamente dependen del coste de carburante, las demandas futuras dependen de las condiciones de mercado inciertas, los rendimientos de las cosechas dependen de las condiciones meteorológicas inciertas, los rendimientos de activos financieros dependen de los valores futuros de los tipos de interés, etc.

Habitualmente la toma de decisiones es función del tiempo. Así, sea  $T = \{1, 2, \dots, T\}$  el conjunto de periodos de tiempo que constituyen el horizonte de planificación. Los periodos de tiempo se agruparán en distintas etapas de decisión dependiendo de la estructura de información disponible en el problema.

Una **etapa** de un horizonte temporal dado, es un conjunto de periodos de tiempo en los que tiene lugar la realización de parámetros inciertos.

Y sea  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, S\}$  el conjunto de etapas de decisión en las que se reparten los distintos periodos de tiempo, donde  $S \leq T$ . Los problemas estocásticos se pueden clasificar en cuanto al número de etapas en *biétapicos*, aquellos que tienen dos etapas y *multietapicos*, con tres o más.

### 5.1.2. Espacios de probabilidad y variables aleatorias

Una técnica que modeliza y recoge adecuadamente la incertidumbre, es la denominada *análisis de escenarios*. Esta metodología parte de conocer un conjunto finito de valores de los parámetros estocásticos, representativo del conjunto de todos los posibles valores de los mismos<sup>1</sup> Un **escenario** es una realización de los parámetros inciertos y determinísticos a lo largo de las diversas etapas del horizonte temporal.

La incertidumbre se representa en términos del experimento aleatorio, cuyo resultado se denota por  $\omega$ . El conjunto de todos los posibles resultados del experimento se representa por  $\Omega$ . Los resultados pueden combinarse en subconjuntos de  $\Omega$  denominados

---

<sup>1</sup>Uno de los problemas más importantes a la hora de desarrollar esta metodología, y que escapa al objetivo de este trabajo, es la determinación del conjunto de escenarios a utilizar, de manera que dicho conjunto sea representativo del total.

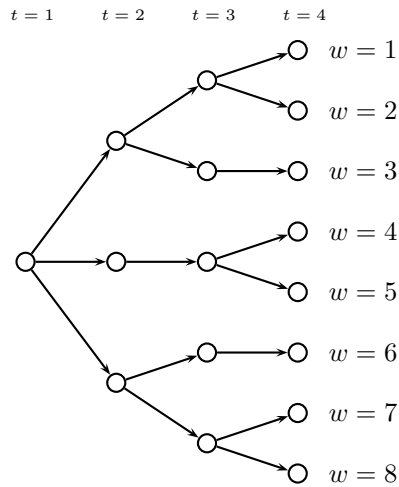


Figura 5.1: Árbol de escenarios

*sucesos*. Cada suceso elemental  $\omega$  determina un *escenario*  $\xi^\omega = (c^\omega, A^\omega, b^\omega)$ , esto es, una particular realización de los parámetros aleatorios del modelo.

En adelante y para simplificar la notación se denotará por  $\omega$ , en lugar de  $\xi^\omega$ , a cada uno de los escenarios y por  $\Omega$ , al conjunto de escenarios.

Es habitual representar el conjunto de escenarios mediante un *árbol* cuyos niveles corresponden a los distintos periodos del horizonte de planificación en los que es preciso tomar alguna decisión.

En cada etapa hay tantos nodos como realizaciones de los parámetros inciertos. Obsérvese que en la primera etapa, aparece un único nodo, llamado nodo *raíz*. Una vez que se ha tomado la decisión, pueden ocurrir algunas contingencias (por ejemplo, en la Figura 5.1, el número de perspectivas es tres para el periodo de tiempo  $t = 2$ ), y la información relativa a estas perspectivas está disponible al comienzo de la etapa.

Una vez generado el árbol de escenarios, es necesario ampliar la modelización del problema, de manera que recoja la información proveniente de dicho árbol. Una alternativa consiste en resolver los problemas deterministas asociados a cada escenario:

$$\begin{aligned}
 Z^\omega &= \text{mín } c^\omega x^\omega \\
 \text{s.a.} \quad &A^\omega x^\omega = b^\omega \\
 &x^\omega \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Las diferentes soluciones óptimas,  $x^{\omega*}$ , condicionadas a la ocurrencia de cada escenario, así como sus valores en la función objetivo deben ser estudiados para decidir sobre una solución aceptable. Obsérvese que cada uno de estos problemas presenta  $m$  restricciones y  $n$  variables.

A partir de los modelos (5.1), el criterio para seleccionar una solución como óptima

no es claro. Puede haber soluciones factibles en un escenario y en otro no. Una solución puede tener un valor mejor que otra en la función objetivo en un escenario concreto y no en otro; etc.

Sin embargo, la metodología de *análisis de escenarios*, como tratamiento de la incertidumbre en un problema de optimización, proporciona soluciones factibles bajo cada escenario, pero sin subordinarse a ninguno de ellos y cuyo valor en la función objetivo es siempre mejor, para todos ellos.

### 5.1.3. Principio de *no-anticipatividad*

Enunciado por primera vez en 1991 por Rockafellar y Wets, establece lo siguiente: *si dos escenarios, sean  $\omega$  y  $\omega'$ , son idénticos considerando la información disponible sobre ellos desde la primera etapa hasta la etapa  $t$  incluida, entonces las decisiones a tomar bajo esos escenarios hasta la etapa  $t$  deben ser las mismas.*

A cada realización de los parámetros inciertos en las distintas etapas consideradas a lo largo del horizonte de planificación, sea  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_S)$ , se ha visto que se le puede asociar la correspondiente secuencia de decisiones  $x^\omega = (x_1^\omega, x_2^\omega, \dots, x_S^\omega)$ , para  $\omega \in \Omega$ . Pero dichas decisiones no son independientes entre sí.

El principio de no anticipatividad exige que

$$x_t^\omega = x_t^{\omega'} \text{ si } \omega = \omega', \forall t \in \mathcal{S}.$$

En la Figura 5.2 aparece representado el principio de *no-anticipatividad* para un ejemplo de  $|\Omega| = 4$  escenarios,  $S = 3$  etapas de decisión y  $T = 3$  periodos de tiempo.

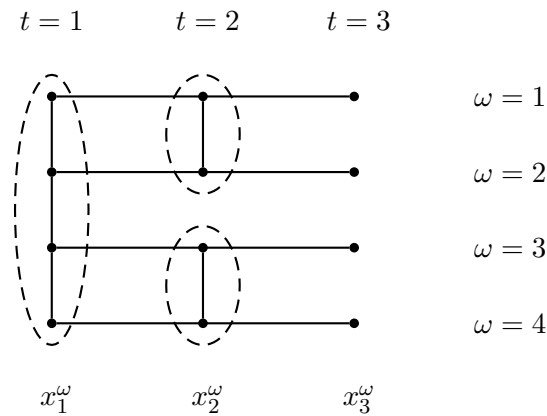


Figura 5.2: Principio de *no-anticipatividad*

El nodo 1 de su árbol de escenarios representa la primera etapa, o instante de tiempo en el que debe tomarse la primera decisión. En esta primera etapa la información sobre los parámetros inciertos se supone conocida con precisión. Este conocimiento se expresa matemáticamente como  $\omega_1^1 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4$ . Es decir, las realizaciones de los parámetros inciertos bajo cada escenario son las mismas ( $\omega_1^i$ , son iguales  $\forall i = 1, \dots, 4$ ) en esta primera etapa. Por lo tanto, las decisiones también deben coincidir en esta primera etapa bajo cada escenario. Estas igualdades,  $x_1^1 = x_1^2 = x_1^3 = x_1^4$ , están representadas mediante las líneas verticales que unen cada punto en la etapa 1 y el círculo discontinuo que las engloba.

Una vez efectuada dicha decisión, dos perspectivas pueden acaecer y la información sobre los parámetros inciertos estará disponible al comienzo de la segunda etapa. La *no-anticipatividad* significa que van a existir únicamente dos versiones en cuanto a la realización de parámetros estocásticos y por lo tanto dos versiones de la decisión  $x_2$ . En la figura, por lo tanto, aparecen representadas las igualdades  $x_2^1 = x_2^2$  y  $x_2^3 = x_2^4$  que implican una decisión común a las dos primeras e iguales realizaciones de los parámetros y otra para las otras dos.

Para introducir matemáticamente la condición de no anticipatividad en el modelo, resulta útil definir la siguiente noción:

Un **grupo de escenarios** para una etapa dada es el conjunto de escenarios cuya realización de los parámetros inciertos es la misma hasta dicha etapa.

A partir de esta definición, se tiene la siguiente notación:

$t(g)$ , periodo al que pertenece el grupo de escenarios  $g$ .

$\mathcal{G}$ , conjunto de grupos de escenarios. Los grupos se numeran consecutivamente.

$\mathcal{G}_t$ , subconjunto de grupos de escenarios del periodo  $t$ ,  $t \in T$ , de tal forma que si dos escenarios distintos  $\omega$  y  $\omega'$  presentan las mismas realizaciones de parámetros aleatorios hasta el periodo  $t$ , entonces los escenarios  $\omega$  y  $\omega'$  pertenecen al mismo grupo  $g$ , para  $g \in \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}$ . Nótese que  $|\mathcal{G}_1| = 1$  y  $g = 1 \in \mathcal{G}_1$ ,  $|\mathcal{G}_S| = |\Omega|$ .

$\Omega_g$ , subconjunto de escenarios que definen al grupo  $g$ , para  $g \in \mathcal{G}_t$ ,  $t \in T$ , tal que  $\Omega_g \subseteq \Omega$ . Nótese que  $\Omega_{g'} \subseteq \Omega_g$  implica que  $t(g) < t(g')$ , para  $g' \in \mathcal{G}_{t(g')}$ ,  $g \in \mathcal{G}_{t(g)}$ .

En la Figura 5.3 se dispone de un árbol de escenarios, correspondiente al ejemplo de la Figura 5.2. En él aparecen los siguientes conjuntos en el periodo  $t = 1$ :  $\mathcal{G}_1 = \{1\}$  y  $\Omega_1 = \Omega = \{4, 5, 6, 7\}$ ; en el periodo  $t = 2$ :  $\mathcal{G}_2 = \{2, 3\}$ ,  $\Omega_2 = \{4, 5\}$  y  $\Omega_3 = \{6, 7\}$  y en el periodo  $t = 3$ :  $\mathcal{G}_3 = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $\Omega_4 = \{4\}$ ,  $\Omega_5 = \{5\}$ ,  $\Omega_6 = \{6\}$  y  $\Omega_7 = \{7\}$ .

El principio de *no-anticipatividad* requiere un único valor de las variables de decisión en cada grupo de escenarios  $g$  de cada periodo  $t$ , para  $g \in \mathcal{G}_t$ ,  $t \in T$ . Así, las condiciones de *no-anticipatividad*, se pueden expresar ahora en los siguiente términos:

$$NA = \{x^\omega : x_t^\omega = x_t^{\omega'}, \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega_g, g \in \mathcal{G}_t, t \in T\} \quad (5.2)$$

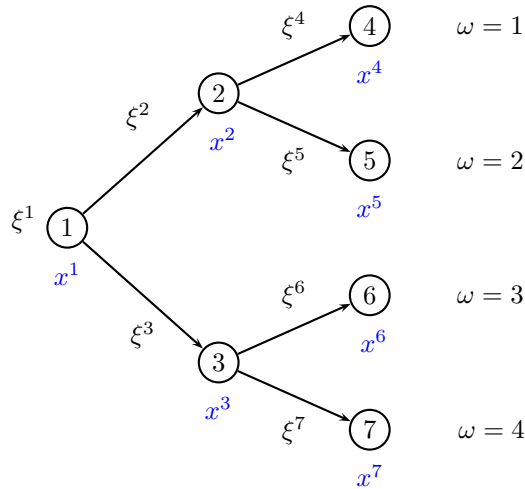


Figura 5.3: Grupos de escenarios

Evidentemente, entre las condiciones de no-anticipatividad se encuentra un número elevado de restricciones redundantes y, por tanto se puede trabajar sobre algún subconjunto elegido de manera adecuada. Un posible método de selección consiste en establecer un orden entre los escenarios y a continuación relacionar  $x_t^\omega$  con  $x_t^{\omega'}$  para un único escenario  $\omega'$  de su grupo de equivalencia, para  $\omega, \omega' \in \Omega_g$ ,  $g \in \mathcal{G}_t$ ,  $t \in T$ . De este modo se relaciona el escenario  $\omega$  con el siguiente  $\omega + 1$  siempre que  $\omega + 1 \in \Omega_g$ ; en otro caso,  $\omega + 1$  se relaciona con el primer escenario de aquellos que estén incluidos en  $\Omega_g$ .

#### 5.1.4. El Modelo Determinista Equivalente

Se define el *Modelo Determinista Equivalente (MDE)* correspondiente a un modelo estocástico lineal al que optimiza el valor esperado de la función objetivo, como:

$$\begin{aligned}
 Z = \text{mín} \quad & \sum_{\omega \in \Omega} w^\omega c^\omega x^\omega \\
 \text{s.a.} \quad & A^\omega x^\omega = b^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega \\
 & 0 \leq x^\omega \in NA, \quad \forall \omega \in \Omega
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Las características más sobresalientes que presenta un modelo estocástico multietapa de recurso total son las siguientes:

1. La matriz de restricciones presenta una estructura en forma de cuasi-escalera.
2. Los modelos deterministas para distintos escenarios difieren unos de otros, en los coeficientes de la función objetivo, en los coeficientes de las variables en las distintas restricciones y en los términos independientes.

3. El número de variables que relacionan distintas etapas no es significativo.

De la inclusión implícita o explícita de las restricciones de *no-anticipatividad*, surgen dos representaciones equivalentes del *MDE*, son las denominadas formulación *compacta* y *extendida* del problema estocástico.

### 5.1.5. Formulación compacta

Para mostrar esta formulación, es útil emplear el concepto de grupos de escenarios definido anteriormente, para lo que se considerará:

$x^g$ , vector de variables correspondientes al grupo de escenarios  $g \in \mathcal{G}$ . Representa a todos los vectores de variables idénticas, según el principio de *no-anticipatividad*.

$w_g$ , peso asociado a cada grupo de escenarios  $g \in \mathcal{G}$ ,  $w_g = \sum_{\omega \in \Omega_g} w^\omega$  tal que  $\sum_{g \in \mathcal{G}_t} w_g = 1 \forall t \in T$ .

$\pi(g)$ , grupo de escenarios correspondientes al nodo predecesor inmediato del nodo correspondiente al grupo  $g$  en el árbol de escenarios, tal que  $\pi(g) \in \mathcal{G}_{t(g)-1}$ , para  $g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_1$ .

En el ejemplo de la Figura 5.3,  $\pi(4) = \pi(5) = 2$ ,  $\pi(6) = \pi(7) = 3$  y  $\pi(2) = \pi(3) = 1$ .

En la formulación compacta del *MDE* de recurso total, se sustituye cada conjunto de variables iguales debido a la imposición de las condiciones de *no-anticipatividad* por una única variable. De esta manera no se necesitan explícitamente dichas restricciones, lo que supone una ventaja puesto que se reduce sustancialmente el tamaño del problema.

Por tanto, la formulación compacta del modelo viene dada por:

$$\begin{aligned} Z = & \quad \text{mín} \sum_{g \in \mathcal{G}} w_g c^g x^g \\ \text{s.a.} & \quad A'_g x^{\pi(g)} + A_g x^g = b^g, \quad \forall g \in \mathcal{G} \\ & \quad x^g \geq 0, \quad \forall g \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Es un modelo de  $|\mathcal{G}|$  vectores de variables y  $|\mathcal{G}|$  tipos de restricciones, cuyo modelo determinista sería:

$$\begin{aligned} Z = & \quad \text{mín} \sum_{t \in T} c_t x_t \\ \text{s.a.} & \quad A'_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t, \quad \forall t \in T \\ & \quad x_t \geq 0, \quad \forall t \in T \end{aligned} \quad (5.5)$$

Véase en la Figura 5.4 la estructura de la formulación compacta para el ejemplo ilustrativo anterior. Es importante resaltar que la estructura de cuasi-escalera de la matriz de restricciones facilita el trabajo de descomposición del problema, como se verá en los métodos de resolución.

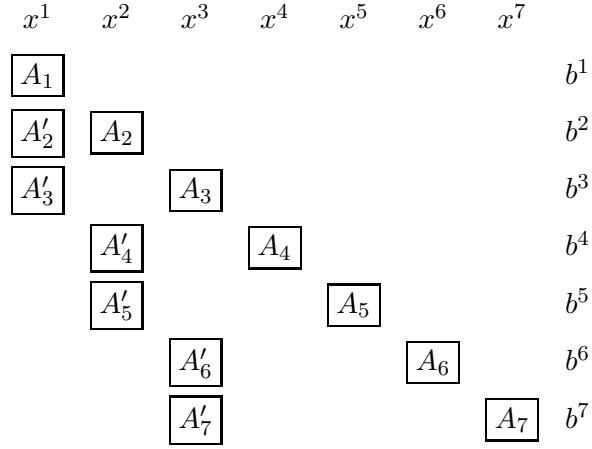


Figura 5.4: Estructura de la formulación compacta

### 5.1.6. Formulación extendida

En esta formulación se desdoblan las variables entre las etapas según las distintas perspectivas, y se imponen las condiciones de *no-anticipatividad*. Esto es, se añaden explícitamente restricciones que fuerzan a estas variables a tomar el mismo valor. Por este motivo, a esta aproximación se le denomina formulación extendida o formulación con variables divididas.

$$\begin{aligned}
 Z = & \text{mín} \sum_{\omega \in \Omega} w^\omega c^\omega x^\omega \\
 \text{s.a.} \quad & A^\omega x^\omega = b^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega \\
 & x^\omega - x^{\omega'} = 0, \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega_g : \omega \neq \omega', g \in \mathcal{G} \\
 & x^\omega \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde  $x^\omega = (x_t^\omega : t \in T)$ . Es un modelo de  $T|\Omega|$  vectores de variables y  $T|\Omega| + |NA|$  tipos de restricciones. A pesar de que aumentan las dimensiones de la matriz de restricciones en este caso, su densidad es menor que en el caso de la formulación compacta.

Véase en la Figura 5.5, la estructura de la formulación extendida correspondiente al ejemplo anterior, donde se ha considerado la representación cíclica de las restricciones de *no-anticipatividad*, eliminando por redundancia, la última restricción de cada grupo de variables iguales.

Obsérvese que la relajación de las restricciones de *no-anticipatividad* convierte el modelo estocástico con recurso en  $|\Omega|$  modelos independientes asociados a cada escenario. Su estructura es exactamente en forma de escalera con peldaños vacíos, por lo que un problema de grandes dimensiones se convierte en la resolución de varios problemas tipo escalera de menores dimensiones, uno para cada escenario. Esta característica se

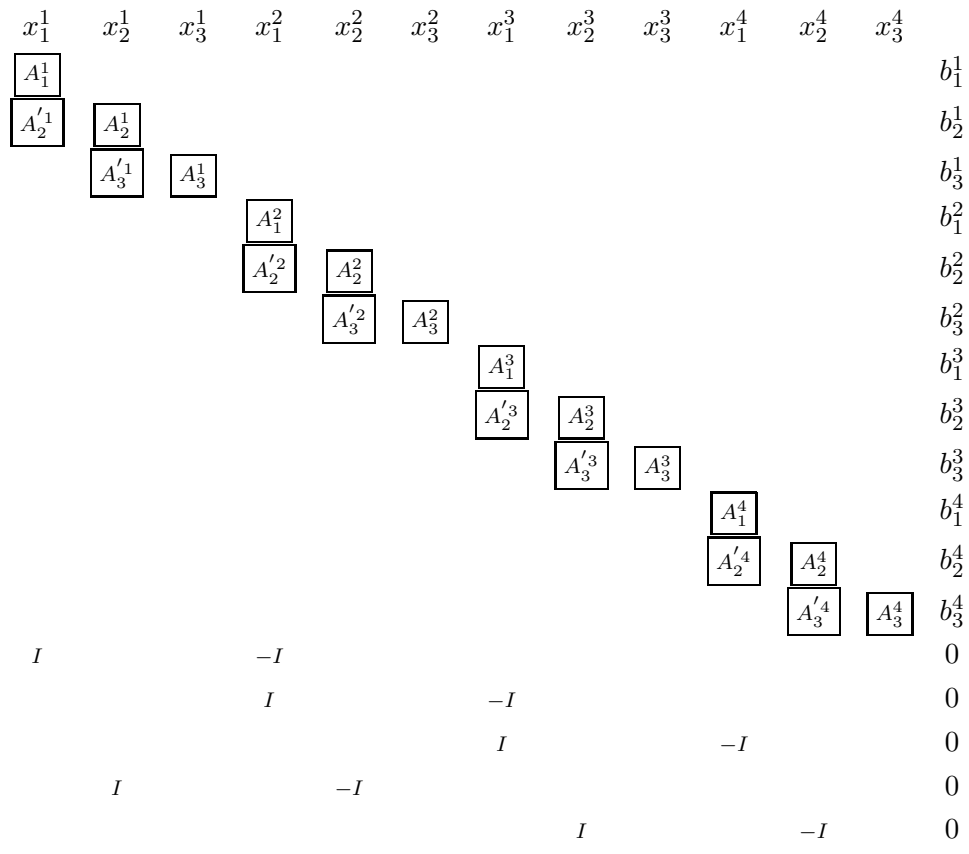


Figura 5.5: Estructura de la formulación extendida

emplea en varios métodos de resolución de problemas de grandes dimensiones.

## 5.2. Modelos estocásticos de dos etapas

Hemos definido el modelo de optimización lineal estocástico de dos etapas como:

$$\text{mín } z = c_1^t x_1 + \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega c_2^\omega x_2^\omega \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & Ax_1 & & = b_0 \\ & T^\omega x_1 + Wx_2^\omega & & = b^\omega \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2^\omega \geq 0 & & \end{aligned} \quad (5.8)$$

Las decisiones de la primera etapa son representadas por la letra  $x_1$ . A dicha etapa corresponden los vectores  $c_1 \in R^{n_1}$ ,  $b_0 \in R^{m_1}$  y la matriz  $A$  de tamaño  $m_1 \times n_1$ , todos ellos conocidos.

En la segunda etapa puede acontecer un conjunto de distintos escenarios,  $\omega \in \Omega$  con probabilidad  $p^\omega$ . Por su parte,  $T^\omega \in \mathcal{M}_{m_2 \times n_1}$ ,  $c_2^\omega \in R^{n_2}$  y  $b^\omega \in R^{m_2}$  denotan la realización de los coeficientes aleatorios del modelo bajo el escenario  $\omega \in \Omega$ . Además existe una matriz  $W$  de tamaño  $m_2 \times n_2$  fija, independiente del escenario  $\omega$  acontecido, llamada *matriz de recurso*. Las decisiones de la segunda etapa dependen de las de la primera y de la realización del experimento aleatorio, o lo que es lo mismo, del escenario futuro que acontezca,  $x_2 = x_2(x_1, \omega)$ .

La función objetivo contiene el término determinista  $c_1^t x_1$  y la esperanza para los términos de la segunda etapa, tomada para las distintas realizaciones  $\omega \in \Omega$ .

La formulación (5.7)-(5.8) es la más simple, y a la vez la más habitual, para un programa estocástico dos etapas.

### 5.2.1. El Valor de la Información y la Solución Estocástica

Nos hemos embarcado en la formulación y resolución de modelos de programación estocástica, sin mucha preocupación sobre si merece la pena o no. Muchos problemas de decisión están ciertamente afectados por la incertidumbre, pero ello no significa que sea imprescindible modelizarlos y resolverlos como programas estocásticos. A continuación definiremos algunas medidas del efecto de la incertidumbre en programas estocásticos. Estas medidas nos serán útiles para decidir si es necesario resolver el problema estocástico o si por el contrario es adecuada una aproximación.

El *valor esperado de la información perfecta (EVPI)* mide la cantidad máxima que un decisor estaría dispuesto a pagar por conocer de antemano una completa y precisa descripción de lo que va a suceder en el futuro.

El concepto de *EVPI* fue desarrollado inicialmente en el contexto del análisis de decisión, y se puede encontrar una referencia clásica de dicho concepto en Raiffa y Schlaifer (1961). En el entorno de programación estocástica, lo vamos a definir a continuación.

Supongamos que la incertidumbre puede ser modelizada a partir de un cierto número de escenarios. Definimos:

$$\begin{aligned} \text{mín } z(x_1, \omega) &= c_1^t x_1 + \text{mín} \{ p^\omega c_2^t x_2^\omega : W x_2^\omega = b^\omega - T^\omega x_1, x_2^\omega \geq 0 \} \\ \text{s.a.} \quad & A x_1 = b_0, x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

el problema de optimización asociado a un escenario en particular. Para hacer de manera completa la definición, sea  $K_1 = \{x_1 : Ax_1 = b_0, x_1 \geq 0\}$ , y  $K_2(\omega) = \{x_1 : \exists x_2^\omega \geq 0 \text{ s.a. } W x_2^\omega = b^\omega - T^\omega x_1\}$ .

Entonces definimos  $z(x_1, \omega) = +\infty$  si  $x_1 \notin K_1 \cap K_2(\omega)$ , y  $z(x_1, \omega) = -\infty$  si (5.9) no está acotado inferiormente.

Además parece razonable suponer que para todo  $\omega \in \Omega$  existe al menos un  $x_1 \in R^{n_1}$  tal que  $z(x_1, \omega) < \infty$  (en otro caso existiría un escenario para el que el modelo anterior, no tendría solución factible). Ningún modelo estocástico razonable se construiría es semejante situación. Esta hipótesis implica que, para todo  $\omega$  existe al menos una solución factible, lo cual implica la existencia de al menos una solución óptima. Sea  $\bar{x}_1(\omega)$  una solución óptima de (5.9). En realidad, estamos interesados en encontrar todas las soluciones óptimas,  $\bar{x}_1(\omega)$ , de (5.9) para todos los escenarios así como los valores de las funciones objetivo en el óptimo  $z(\bar{x}_1(\omega), \omega)$ .

De esta manera, estamos en disposición de calcular el valor esperado de la solución óptima, conocido en la literatura como la solución *wait and see* (espera y observa) ( $WS$ , ver Madansky (1960)), donde

$$WS = E_\omega[\text{mín}_{x_1} z(x_1, \omega)] = E_\omega z(\bar{x}_1(\omega), \omega) = \sum_\omega p^\omega z(\bar{x}_1(\omega), \omega) \quad (5.10)$$

donde  $p^\omega$  representa la probabilidad de ocurrencia del suceso  $\omega$  y  $z(\bar{x}_1(\omega), \omega)$  es el valor óptimo de la función objetivo del problema (5.9) en dicho escenario.

Entonces podemos comparar la solución *espera y observa*,  $WS$ , con la denominada solución *aquí y ahora*, correspondiente al problema estocástico con recurso ( $RP$ ) para la que podemos escribir

$$RP = \text{mín}_{x_1} E_\omega z(x_1, \omega), \quad (5.11)$$

que tiene una solución óptima  $x_1^*$ .

Entonces el valor esperado de la información perfecta es, por definición, la diferencia entre la solución *espera y observa*,  $WS$ , y la solución *aquí y ahora*,  $RP$ , es decir:

$$EVPI = RP - WS \quad (5.12)$$

Este valor no indica la importancia de resolver el modelo estocástico, sino que muestra el papel que juega la incertidumbre en el problema, cuanto más grande sea, es decir, cuanto mayor sea la diferencia entre la solución  $WS$  y la solución  $RP$ , más importante

será el papel de la incertidumbre. Pero esto no dice nada sobre si el modelo determinista se aproxima bien o no.

En la práctica, mucha gente cree que encontrar la solución  $WS$  requiere todavía demasiado trabajo.

Una tentación natural consiste en resolver un problema mucho más simple: el que se obtiene al reemplazar el valor de los parámetros aleatorios, por sus valores esperados. Este es el que se denomina problema del valor esperado o problema determinista del valor medio (*expected value problem*,  $EV$ ), que es simplemente

$$EV = \min_{x_1} z(x_1, \bar{\omega}) \quad (5.13)$$

donde  $\bar{\omega}$  representa la esperanza de  $\omega$ . Cualquiera que disponga de un programa estocástico o situación en la que aparezca incertidumbre, podría sentir un poco de inseguridad al tomar la decisión  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$ . En efecto, a menos que  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$  sea independiente de  $\omega$ , no hay ninguna razón para pensar que  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$  va a estar cerca de la solución con recurso (5.11).

El valor de la solución estocástica es el concepto que mide de manera más precisa cómo de buena o mala es la solución  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$  en términos de (5.11). Primero definiremos el *resultado esperado de utilizar la solución del valor medio*,  $EEV$ , como

$$EEV = E_{\omega} z(\bar{x}_1(\bar{\omega}), \omega). \quad (5.14)$$

La cantidad,  $EEV$ , mide como se desarrolla  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$ , permitiendo que las decisiones de la segunda etapa sean elegidas con optimalidad como funciones de  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$  y  $\omega$ . El *valor de la solución estocástica*,  $VSS$ , es definido entonces como

$$VSS = EEV - RP. \quad (5.15)$$

En algunas ocasiones es posible encontrar que la solución estocástica y la esperanza de la solución del valor medio coinciden, es decir,  $VSS = 0$ . En cuyo caso la solución estocástica sería posiblemente innecesaria. Sin embargo, es extremadamente difícil saber si la incertidumbre es importante o no antes de resolver el problema, comparar ambas soluciones y analizar los resultados.

### 5.2.2. Desigualdades básicas

Las siguientes relaciones entre los valores definidos en la sección anterior fueron establecidas por Madansky (1960).

**Proposición 1** *En modelos de minimización se verifica:*

$$WS \leq RP \leq EEV \quad (5.16)$$

**Demostración:** Para cada realización  $\omega$ , tenemos la relación

$$z(\bar{x}_1(\omega), \omega) \leq z(x_1^*, \omega)$$

donde  $x_1^*$ , denota una solución óptima del problema con recurso (5.11). Tomando esperanzas a ambos lados de la desigualdad, se obtiene la primera parte de la desigualdad. Teniendo en cuenta que  $x_1^*$  es una solución óptima de (5.11), mientras que  $\bar{x}_1(\bar{\omega})$  es una solución factible de (5.11), se obtiene la segunda desigualdad.

**Nota:** En modelos de maximización, la desigualdad es:  $EEV \leq RP \leq WS$ .

**Proposición 2** *En modelos estocásticos de minimización con coeficientes fijos en la función objetivo, fija  $T$  y fija  $W$ ,*

$$EV \leq WS \quad (5.17)$$

**Demostración:** La desigualdad de Jensen establece que para cualquier función convexa  $f(\omega)$ , de  $\omega$ ,

$$Ef(\omega) \geq f(E\omega) = f(\bar{\omega})$$

Para aplicar este resultado, necesitamos probar que  $f(\omega) = \min_{x_1} z(x_1, \omega)$  es una función convexa de  $\omega = (h)$ . La convexidad se sigue de la expresión de  $f$  como dual, es decir

$$\min_{x_1} z(x_1, \omega) = \max_{\alpha, \beta} \{ \alpha b_0 + \beta b : \alpha A + \beta T \leq c, \beta W \leq q \}$$

Como las condiciones del dual son intercambiables para todo  $\omega = (h)$ , el epigrafo de  $f(\omega)$  es la intersección de los epigrafos de las funciones lineales  $\alpha b_0 + \beta b$  para cualquier punto factible  $(\alpha, \beta)$ . Luego  $f(\omega)$  es convexa puesto que su epigrafo es convexo.

**Nota:** En modelos de maximización, la desigualdad es:  $WS \leq EV$ .

La Proposición 2 no se mantiene en general para cualquier programa estocástico. Como acabamos de ver, sólo permite incertidumbre en el término independiente de las restricciones. Basta elegir un programa estocástico, en el que  $q$  no sea fijo, y tendremos que  $\min z(x_1, \omega)$  es cóncava respecto a  $\omega$ , luego no se mantiene la desigualdad de Jensen.

### 5.2.3. Las relaciones entre $EVPI$ y $VSS$

Las cantidades  $EVPI$  y  $VSS$ , son a menudo diferentes. Esta sección describe las relaciones que existen entre estas dos medidas de los efectos de la incertidumbre.

**Proposición 3**

1. *Para cualquier programa estocástico,*

$$0 \leq EVPI, \quad (5.18)$$

$$0 \leq VSS \quad (5.19)$$

2. *Para modelos estocásticos de minimización con matriz de recurso fija y coeficientes en la función objetivo fijos,*

$$EVPI \leq EEV - EV \quad (5.20)$$

$$VSS \leq EEV - EV \quad (5.21)$$

**Nota:** En modelos de maximización, las desigualdades son:  $EVPI \leq EV - EEV$  y  $VSS \leq EV - EEV$ .

Esta proposición muestra que  $EVPI$  y  $VSS$  son siempre cantidades no negativas y además en algunos casos están acotadas superiormente por  $EEV - EV$ , cantidad fácilmente calculable. Si sucede que  $EEV = EV$ , ambas,  $EVPI$  y  $VSS$  desaparecen. Una condición suficiente para que suceda ésto, es que  $\bar{x}_1(\omega)$  sea independiente de  $\omega$ . Esto significa que las soluciones óptimas no son sensibles a cambios del valor de los elementos aleatorios. En tales situaciones encontrar la solución óptima para un  $\omega$  particular o hacerlo para su media,  $\bar{\omega}$ , genera el mismo resultado y no es necesario, entonces, resolver un problema estocástico.

### 5.3. Ejercicios

1. Considera el modelo estocástico:

$$\begin{aligned} \text{mín } 3x_1 + 2x_2 - \sum_{\omega=1}^4 p^\omega (15y_1^\omega + 12y_2^\omega) \\ \text{s.a.} \\ \begin{aligned} 3y_1^\omega + 2y_2^\omega &\leq x_1, \quad \omega = 1, \dots, 4 \\ 2y_1^\omega + 5y_2^\omega &\leq x_2, \quad \omega = 1, \dots, 4 \\ 0,8h_1^\omega &\leq y_1^\omega \leq h_1^\omega, \quad \omega = 1, \dots, 4 \\ 0,8h_2^\omega &\leq y_2^\omega \leq h_2^\omega, \quad \omega = 1, \dots, 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^\omega, y_2^\omega &\geq 0, \quad \omega = 1, \dots, 4 \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Donde hay cuatro escenarios:

$$\begin{aligned} \omega = 1 \quad (h_1^1, h_2^1) &= (4, 4), \quad p^1 = \frac{1}{4} \\ \omega = 2 \quad (h_1^2, h_2^2) &= (6, 4), \quad p^2 = \frac{1}{4} \\ \omega = 3 \quad (h_1^3, h_2^3) &= (4, 8), \quad p^3 = \frac{1}{4} \\ \omega = 4 \quad (h_1^4, h_2^4) &= (6, 8), \quad p^4 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

El modelo puede ser interpretado como un problema de decisión en la inversión de dos recursos  $x_1$  y  $x_2$ , que son necesarios en la segunda etapa para cubrir al menos un 80 % de la demanda.

- a) Obten la solución óptima del modelo estocástico, ( $RP$ ).
- b) Sabiendo que el valor de  $(h_1, h_2)$  en el escenario promedio es  $(5,6)$ . Resuelve el modelo determinista del valor medio,  $EV$  y calcula el valor esperado de dicha solución,  $EEV$ .

c) Obtén la solución “Wait and See”,  $WS$ , y verifica si se satisfacen las desigualdades vistas en teoría.

**Solución:**

a)  $RP = 30,94$ . b)  $EV = 9,2$ , donde  $x_1 = 24,6, x_2 = 34, y_1 = 5, y_2 = 4,8$ .  $EEV = \infty$ .

c)  $WS = 9,2$ , siendo la solución para cada escenario:

Escenario	$(x_1, x_2)$	$(y_1^\omega, y_2^\omega) : z^\omega$
$\omega = 1$	$(4, 4)$	$(18, 4, 24) \quad (4, 3, 2) : 4,8$
$\omega = 2$	$(6, 4)$	$(24, 4, 28) \quad (6, 3, 2) : 0,8$
$\omega = 3$	$(4, 8)$	$(24, 8, 40) \quad (4, 6, 4) : 17,6$
$\omega = 4$	$(6, 8)$	$(30, 8, 44) \quad (6, 6, 4) : 13,6$

Entonces,  $WS = 9,2 \leq RP = 30,94 \leq EEV = \infty$ ,  $EVPI = 21,74$  y  $VSS = \infty$ .

## 5.4. Trabajo en grupo 2: Planificación financiera II

Consideremos de nuevo el problema de planificación financiera descrito en el capítulo anterior. Recordamos que contaremos con un conjunto de dos activos financieros  $I = \{1, 2\}$ ;  $i = 1$  si se trata de acciones e  $i = 2$  si se trata de bonos.

Ahora reduciremos el número de periodos o etapas de decisión a dos. El horizonte temporal será  $H = 10$  años. Las inversiones podrán cambiar cada 5 años, de manera que  $T = 2$ . Se parte del mismo capital inicial  $b = 55$  miles de euros y se pretende alcanzar  $W = 70$  miles de euros. El tipo de interés (en tanto por uno) sobre el excedente es  $q = 1$  y sobre el faltante  $r = 4$ .

El inversor sabe por experiencia pasada que el rendimiento medio unitario para estos activos durante los distintos periodos de tiempo viene dado por:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{1t} &= 1,155, \quad t \in T \\ \bar{r}_{2t} &= 1,13, \quad t \in T \end{aligned}$$

El problema determinista del valor medio resulta ser:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= y - 4w \\ \text{s.a.} \quad & x_{11} + x_{21} & & = 55 \\ & -1,155x_{11} - 1,13x_{21} + x_{12} + x_{22} & & = 0 \\ & 1,155x_{12} + 1,13x_{22} - y + w & & = 70 \\ & x_{it} \geq 0, \quad \forall i \in I, t \in T \\ & y \geq 0, w \geq 0, \end{aligned} \tag{5.23}$$

Como vimos en el capítulo anterior, la política de inversiones que propone este modelo es muy fácil de interpretar. A lo largo de los dos periodos de decisión se trata de invertir en el activo cuyo rendimiento prometido es mayor, las acciones.

Como veremos en el siguiente apartado este modelo no contempla adecuadamente la incertidumbre, que puede ser tratada de una forma más robusta con un modelo basado en el análisis de escenarios.

### 5.4.1. Enunciado 2: Modelo basado en análisis de escenarios

Pensemos de forma más realista, que pueden acontecer dos escenarios distintos y equiprobables en los que los rendimientos de ambos activos tomarán distintos valores. Si la economía está al alza, el rendimiento de las acciones es del 1.25 y el de los bonos es del 1.14, mientras que si el nivel económico baja, el rendimiento de las acciones es del 1.06 y el de los bonos es del 1.12, es decir,



Combinando estas dos posibilidades conseguimos llegamos a un árbol de escenarios con cuatro escenarios equiprobables.

El modelo estocástico en este caso es:

$$\begin{aligned}
 RP &= \max \sum_{\omega=1}^4 0,25(y^\omega - 4w^\omega) \\
 \text{s.a.} \quad & x_{11} + x_{21} &= & 55 \\
 & -1,25x_{11} - 1,14x_{21} + x_{12}^1 + x_{22}^1 &= & 0 \\
 & -1,06x_{11} - 1,12x_{21} + x_{12}^2 + x_{22}^2 &= & 0 \\
 & 1,25x_{12}^1 + 1,14x_{22}^1 - y^1 + w^1 &= & 70 \\
 & 1,06x_{12}^1 + 1,12x_{22}^1 - y^2 + w^2 &= & 70 \\
 & 1,25x_{12}^2 + 1,14x_{22}^2 - y^3 + w^3 &= & 70 \\
 & 1,06x_{12}^2 + 1,12x_{22}^2 - y^4 + w^4 &= & 70 \\
 & x_{it}^\omega \geq 0, y^\omega \geq 0, w^\omega \geq 0, & \forall & i, t, \omega
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

En base a la información presentada hasta ahora, resuelve las siguientes cuestiones:

1. Muestra en el árbol de escenarios la política de inversiones obtenida en el capítulo anterior de la resolución del modelo determinista del escenario promedio. Obtén el valor esperado  $EEV$ .
2. Implementa en GAMS y resuelve el modelo estocástico (5.24). Muestra en el árbol de escenarios la política de inversiones que proporciona este modelo.
3. Obtén la solución óptima bajo cada escenario y calcula la solución “WS”.
4. Comprueba que se verifican las desigualdades vistas en teoría.
5. Resume los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

# Índice general

<b>1. Extremos de funciones reales</b>	<b>1</b>
1.1. Extremos relativos o locales . . . . .	1
1.1.1. Extremos relativos libres . . . . .	1
1.1.2. Extremos relativos condicionados . . . . .	3
1.2. Extremos absolutos . . . . .	6
1.3. Ejercicios . . . . .	6
1.4. Tarea de aprendizaje . . . . .	11
<b>2. Optimización no lineal</b>	<b>12</b>
2.1. Problemas no lineales en formato estándar . . . . .	14
2.2. Interpretación de los multiplicadores K-T . . . . .	17
2.3. Resolución numérica de problemas de programación no lineal . . . . .	20
2.4. Ejercicios . . . . .	25
2.5. Tarea de aprendizaje . . . . .	31
<b>3. Trabajo en grupo 1</b>	<b>32</b>
3.1. Contexto. El problema de selección de carteras . . . . .	32
3.1.1. Enunciado 1. Modelo De Markowitz . . . . .	33
3.2. Modelo táctico de inversión . . . . .	34
3.2.1. Enunciado 2. Análisis de escenarios . . . . .	35
<b>4. Programación lineal</b>	<b>38</b>
4.1. Teoremas fundamentales de la programación lineal . . . . .	40
4.2. El método Simplex . . . . .	41
4.3. Tabla del Simplex. Definición y ejemplo de uso . . . . .	45
4.3.1. Ejemplo de definición y actualización de la tabla . . . . .	46
4.3.2. Tabla inicial del simplex . . . . .	48
4.4. Programación lineal con GAMS . . . . .	49
4.5. Dualidad . . . . .	49
4.6. Análisis de sensibilidad y post-optimización . . . . .	51
4.6.1. Análisis de sensibilidad con GAMS . . . . .	55
4.7. Análisis paramétrico . . . . .	55

4.8.	Programación lineal entera . . . . .	55
4.9.	Ejercicios . . . . .	56
4.10.	Trabajo en grupo 2: Planificación financiera I . . . . .	61
4.10.1.	Enunciado 1: Modelo Determinista . . . . .	63
<b>5.</b>	<b>Optimización estocástica</b>	<b>64</b>
5.1.	Modelización estocástica . . . . .	64
5.1.1.	Problemas lineales estocásticos . . . . .	65
5.1.2.	Espacios de probabilidad y variables aleatorias . . . . .	65
5.1.3.	Principio de <i>no-anticipatividad</i> . . . . .	67
5.1.4.	El Modelo Determinista Equivalente . . . . .	69
5.1.5.	Formulación compacta . . . . .	70
5.1.6.	Formulación extendida . . . . .	71
5.2.	Modelos estocásticos de dos etapas . . . . .	73
5.2.1.	El Valor de la Información y la Solución Estocástica . . . . .	73
5.2.2.	Desigualdades básicas . . . . .	75
5.2.3.	Las relaciones entre <i>EVPI</i> y <i>VSS</i> . . . . .	76
5.3.	Ejercicios . . . . .	77
5.4.	Trabajo en grupo 2: Planificación financiera II . . . . .	78
5.4.1.	Enunciado 2: Modelo basado en análisis de escenarios . . . . .	79

# Bibliografía

- [Birge and Louveaux, 1997] Birge, J. and Louveaux, F. (1997). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research.
- [Bisschop, 2005] Bisschop, J. (2005). *Optimization Modeling*. Paradon Decision Technology.
- [Font, 2006] Font, B. (2006). *Programación matemática para la economía y la empresa*. Universitat de València.
- [Kornbluth and Salkin, 1987] Kornbluth, J. and Salkin, G. (1987). *The management of corporate financial assets: Applications of mathematical programming models*. Academic Press Ltd., London.
- [Rosenthal, 2007] Rosenthal, R. (2007). *GAMS: a User's Guide*. GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA.
- [Zenios, 1999] Zenios, S. (1999). *Financial Optimization*. Cambridge University Press.