Tema 1 con soluciones de los ejercicios

María Araceli Garín

Capítulo 1

Introducción. Probabilidad en los modelos estocásticos actuariales

Se describe a continuación la Tarea 1, en la que se enumeran un conjunto de ejercicios de ensayo de las competencias correspondientes a este tema; en particular a la primera de las formuladas en el programa de la asignatura:

> Identificar los elementos matemáticos que caracterizan a las distribuciones de probabilidad tanto discretas como continuas, habituales en el ámbito de la empresa aseguradora: función de probabilidad, función de distribución, momentos, funciones características, etc, operar correctamente con ellos y conocer sus propiedades.

1.1. Tarea 1

1. Consideremos una moneda trucada, de manera que la probabilidad de cara $P(\text{cara}) = 0{,}3$, y por lo tanto $P(\text{cruz}) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de obtener 3 caras en 5 lanzamientos al aire de dicha moneda. ¿Porqué no puedes utilizar la fórmula de Laplace?

   Solución:

   $p = 0{,}1323$. Porque los sucesos elementales no son equiprobables.

2. Una compañía de seguros de automóviles clasifica a sus asegurados en cuatro grupos de edad. La siguiente tabla recoge la proporción de

asegurados dentro de cada grupo de edad, junto con la probabilidad de tener un accidente.

Grupo de edad	Proporción de asegurados	Prob. de accidente
18-25	0.10	0.07
25-45	0.40	0.04
45-60	0.30	0.02
+60	0.20	0.05

Se elige un asegurado al azar de la compañía:

a) Probabilidad de que tenga un accidente.

b) Si sabemos que el asegurado ha tenido un accidente, obtener la probabilidad de que pertenezca a cada uno de los grupos.

Solución:

a) $P(A) = 0{,}039$ *b*) $P(1|A) = 0{,}1795$ $P(2|A) = 0{,}4102$ $P(3|A) = 0{,}15385$ $P(4|A) = 0{,}2564$.

3. De acuerdo con un reciente estudio de mercado, el 40 % de los varones mayores de 30 años poseen su propio coche y su propia casa, el 60 % su propia casa y el 70 % su propio coche.

   a) Calcula la probabilidad de que un varón mayor de 30 años posea al menos casa propia o coche propio.

   b) Calcula la probabilidad de que no posea ninguna de las dos cosas.

   c) Si escogemos dos varones al azar de forma independiente, calcula la probabilidad de que ninguno de los dos posea casa ni coche propios.

   d) Si sabemos que un determinado varón dispone de coche propio, calcula la probabilidad de que también posea casa propia.

   Solución:

   a) $p = 0{,}9$. *b*) $p = 0{,}1$. *c*) $p = 0{,}01$. *d*) $p = 0{,}5714$.

4. Una compañía de seguros de automóviles tiene clasificados a sus asegurados en dos grupos de edad. En el grupo de los más jóvenes, J, están el 30 % de los clientes, mientras que el 70 % restante se encuentra en el grupo S. Los contratos con la compañía tienen una vigencia anual. La probabilidad de que un asegurado del grupo J tenga un accidente es del 75 %, mientras que esa probabilidad para un asegurado en el grupo S se reduce a un 32 %. La probabilidad de que un cliente de la

compañía tenga un primer accidente es independiente de que tenga un segundo o un tercer accidente a lo largo del año, tanto para el grupo J como para el grupo S. Si elegimos a un cliente al azar de la compañía, calcular:

a) Probabilidad de que tenga exáctamente un accidente.

b) Si el asegurado ha tenido un accidente, calcular la probabilidad de que pertenezca al grupo J.

c) Suponiendo que el asegurado elegido al azar ha dado cuenta de un accidente, calcular la probabilidad de que tenga un segundo accidente antes de finalizar el año de contrato.¡Cuidado!, el resultado de esta cuestión no es evidente, el ser independiente la ocurrencia de posteriores accidentes dado el primero, en cada grupo J ó S no hace que lo sea para un individuo elegido al azar del total.

d) ¿ Cómo es $P(A_2/A_1)$=probabilidad de un segundo accidente dado un primero, en relación a $P(A_1)$= probabilidad de un primer accidente? Interpreta la relación de desigualdad entre ambas probabilidades.

Solución:

a) $P(A) = 0{,}449$. *b*) $P(J|A) = 0{,}5011$. *c*) $P(A_2|A_1) = 0{,}53547$. *d*) $P(A_2|A_1) > P(A_1)$ luego tiene más probabilidad de tener un accidente alguien que ya ha tenido uno antes. Además dada la magnitud de ambas probabilidades, en el largo plazo quien ha tenido un accidente, tendrá el segundo casi seguramente.

5. De un total de 9872 pólizas de seguros de automóvil contratadas en una compañía de seguros, 1083 presentaron reclamaciones durante el año 2004. Disponemos de la tabla de datos que nos da el número de reclamaciones efectuadas X, así como la cuantía total de las reclamaciones Y (en euros).

X Y	< 1200	≥ 1200
1	937	28
2 ó más	103	15

Si escogemos una póliza al azar entre las 9872, calcula las siguientes probabilidades:

a) Que haya efectuado una única reclamación.

b) Si se sabe que ha reclamado, la probabilidad de que la cuantía de dicha reclamación haya sido igual o superior a 1200 euros.

c) Que haya efectuado más de una reclamación con una cuantía total igual o superior a 1200 euros.

d) ¿Son independientes el número de reclamaciones y la cuantía total?

Solución:

a) $p = \frac{965}{9872}$. *b*) $P(Y \geq 1200|\text{ha reclamado}) = \frac{43}{1083}$. *c*) $P(X \geq 2 \cap Y \geq 1200) = \frac{15}{9872}$. *d*) No son independientes, dado que las probabilidades marginales y condicionadas no son iguales, p.e., $P(X = 1) \neq P(X = 1|Y < 1200)$.

6. En una Comunidad Autónoma el 60 % de los hogares está asegurado contra incendios. Con objeto de estudiar con detalle la situación de una determinada provincia, se seleccionan al azar e independientemente 10 hogares. Calcular:

   a) Probabilidad de que alguno de los hogares esté asegurado contra incendios.

   b) Probabilidad de que al menos dos hogares estén asegurados contra incendios.

   c) Se define la v.a. X como el número de hogares entre los 10, que están asegurados contra incendios. Observa que la v.a. X puede tomar los valores $\{0, 1, ..., 10\}$. Obten la función de cuantía de X.

   d) Obtén el número esperado de hogares que tienen seguro contra incendios.

   Solución:

   a) $p = 0{,}999895$. *b*) $p = 0{,}9983$. *c*) $X \in b(0{,}6, 10)$, $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k}$, donde $k = 0, ..., 10$. *d*) 6 hogares.

7. Se sabe que el número anual de accidentes en automóvil correspondientes a las pólizas de una determinada compañía, X, sigue una distribución binomial de parámetros $p = 0{,}005$ y $n = 2000$.

   a) Obtén la función de cuantía de X. Calcula las siguientes probabilidades: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$,$P(X = 3)$, $P(X = 4)$ y $P(X = 5)$.

   b) Calcula la probabilidad de que $X \in [5, 15]$, ¿cuál es la dificultad?

Solución:

a) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k = 0, ..., n$; $P(X = 0) = 0{,}995^{2000} = 0{,}0000442$, $P(X = 1) = 2000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995^{1999} = 0{,}0004449$, etc. *b*) $P(X \in [5, 15]) = 0{,}9182$.

8. Se sabe que el número anual de accidentes en automóvil correspondientes a las pólizas de una determinada compañía, X, sigue una distribución de Poisson $P(\lambda = 10)$.

   a) Obtén la función de cuantía de X. Calcula las siguientes probabilidades: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$,$P(X = 3)$, $P(X = 4)$ y $P(X = 5)$.

   b) Calcula la probabilidad de que $X \in [5, 15]$.

   Solución:

   a) $P(X = k) = \frac{e^{-10}10^k}{10!}$, donde $k = 0, ..., \infty$; $P(X = 0) = 0{,}00004539$, $P(X = 1) = 0{,}0004539$, $P(X = 2) = 0{,}0022699$, etc. *b*) $P(X \in [5, 15])$.

9. En Irak se encuentran algunas de las terminales petrolíferas más grandes del mundo. Una compañía se dedica a asegurar buques. Su cartera incluye medio millón de toneladas aseguradas de un número elevado de petroleros que viajan fundamentalmente a esa zona del Golfo Pérsico. La valoración de la situación es la siguiente: En época de conflicto, la probabilidad de que se produzca un bombardeo es del 50 %. La probabilidad de que un buque sea atacado si se produce un bombardeo es de $\frac{1}{3}$, mientras que si no se produce tal bombardeo, la probabilidad de que un buque sea atacado es 0.

   La probabilidad de hundimiento de un buque si es atacado es de $\frac{8}{10}$. Mientras que la probabilidad de que un buque no padezca daño alguno si es atacado es de $\frac{2}{10}$. Se prescinde por simplicidad, de considerar otras posibilidades (pérdida parcial del buque, etc.). En caso de hundimiento, la indemnización a pagar por parte de la compañía aseguradora asciende a \$1300 dólares por tonelada asegurada.

   a) En estas condiciones y en época de conflicto, calcula:

      1) La probabilidad de que un buque sea atacado.
      2) La probabilidad de que un buque sea hundido.
      3) La probabilidad, si se produce un bombardeo, de que un buque sea atacado.

b) Si la prima de seguro es de \$150 por tonelada, calcula el rendimiento (primas cobradas−indemnizaciones pagadas) esperado de la compañía sobre la cartera mencionada de medio millón de toneladas aseguradas.

c) Calcula el mismo rendimiento esperado, después de saber que habrá bombardeo.

d) Prescindiendo de todos los gastos inherentes al negocio asegurador, ¿qué prima debería fijar la compañía (en \$ por tonelada) para esperar beneficios nulos, antes de saber si se producirá el bombardeo?

Solución:

a) 1) $P(A) = \frac{1}{6}$ 2) $P(H) = \frac{2}{15}$ 3) $P(A|B) = \frac{1}{3}$. *b*) $E(R) = -11666666{,}67$ dólares. *c*) $E(R_A) = -98333333{,}33$ dólares *d*) prima= 173,33 dólares por tonelada.

10. Se sabe que el coste total (en cientos de euros) de un determinado tipo de reclamación es una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = 1 - e^{-0{,}16x}$ si $x \geq 0$ y 0 en otro caso.

    a) Obtén la función de densidad de la v.a. X.

    b) Calcula la probabilidad de que el valor de una reclamación esté comprendido entre 500 y 1000 euros.

    c) Calcula el valor esperado de una reclamación de este tipo.

    d) Si se realizan 5 reclamaciones de forma independiente. Calcula la probabilidad de que ninguna de las cinco supere los 1000 euros. ¿Podrías calcular la probabilidad de que la suma de ellas no supere los 5000 euros? ¿Cuál es la dificultad?

    Solución:

    a) $f(x) = 0{,}16e^{-0{,}16x}$, si $x \geq 0$; $f(x) = 0$, en otro caso. *b*) $p = 0{,}2474$. *c*) 625 euros. *d*) $p = 0{,}99977$. Dicha probabilidad sería igual al valor de la función de distribución de una $\gamma(0{,}16, 5)$ evaluada en 50. La única dificultad estaría en el cálculo integral.

11. Se sabe que el coste total (en cientos de euros) de un determinado tipo de reclamación es una variable aleatoria, X, con distribución $N(m = 6{,}25, \sigma^2 = 39{,}06)$.

    a) Obtén la función de densidad de la v.a. X.

b) Calcula la probabilidad de que el valor de una reclamación esté comprendido entre 500 y 1000 euros.

c) Calcula el valor esperado de una reclamación de este tipo.

d) Si se realizan 5 reclamaciones de forma independiente. Calcula la probabilidad de que ninguna de las cinco supere los 1000 euros. ¿Podrías calcular la probabilidad de que la suma de ellas no supere los 5000 euros?

Solución:

a) $f(x) = e^{-0{,}16x}$, si $x \geq 0$; $f(x) = 0$, en otro caso. *b*) $p = 0{,}305$. *c*) 625 euros. *d*) $p = 0{,}2013$. Dicha probabilidad sería igual al valor de la función de distribución de una $N(31{,}25, \sigma^2 = 195{,}3)$ evaluada en 50, ésto es 0,9099.

12. Se sabe que el coste total (en cientos de euros) de un determinado tipo de reclamación es una variable aleatoria, X, con distribución $U(a, b)$ de media 6.25 y varianza 39.06.

    a) Obtén la función de densidad de la v.a. X.

    b) Calcula la probabilidad de que el valor de una reclamación esté comprendido entre 500 y 1000 euros.

    c) Calcula el valor esperado de una reclamación de este tipo.

    d) Si se realizan 5 reclamaciones de forma independiente. Calcula la probabilidad de que ninguna de las cinco supere los 1000 euros. ¿Podrías calcular la probabilidad de que la suma de ellas no supere los 5000 euros?

    Solución:

    a) $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in (a, b)$; $f(x) = 0$, en otro caso, donde $a - 4{,}57$ y $b = 17{,}07$. *b*) $p = 0{,}231$. *c*) 625 euros. *d*) $p = 0{,}1380$. Dicha probabilidad sería igual al valor de la función de distribución de la v.a. suma de cinco variables independientes y con la misma distribución que la dada arriba evaluada en 50. La dificultad estaría en obtener la forma de la distribución de dicha transformación.

13. Una compañía de seguros conoce la distribución que sigue el coste de un determinado siniestro (en cientos de euros). Dicho coste se distribuye según la función de densidad:

$$f(x) = \frac{k}{(1+x)^3}, \quad x \geq 0$$

y $f(x) = 0$ si $x < 0$.

a) Hallar el valor de k.

b) Obtener la función de distribución. Calcular la probabilidad de que el coste de un siniestro sea superior a 100 euros.

c) Determinar los cuartiles de la distribución del coste del siniestro. Interpretar su obtención.

d) Calcular el coste medio por siniestro.

Solución:

a) $k = 2$. *b*) $F_X(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$ si $x \geq 0$. $F_X(x) = 0$, si $x \leq 0$. $P(X > 1) = 0{,}25$. *c*) $q_1 = 0{,}1547$, $q_2 = Me = 0{,}4142$, $q_3 = 1$. El 25 % de los costes son inferiores a 15.47 euros (resp. el 75 % son superiores) , el 50 % de los costes son inferiores a 41.42 euros y el otro 50 % son superiores y por último, el 75 % de los costes son inferiores a 100 euros, siendo el 25 % de los mismos superiores a esta cantidad. Por su parte si los costes medios son de 100 euros, lo mismo que el tercer cuartil, es porque entre el 25 % de los costes más elevados hay costes muy altos que se compensan con el 75 % de los costes más baratos.

14. A una reunión internacional de Estadística Actuarial acuden n personas, de las cuales n_1 hablan exclusivamente inglés, n_2 hablan exclusivamente francés y el resto hablan los dos idiomas. Si se eligen dos congresistas al azar, calcula la probabilidad de que se entiendan.

Solución:

$$p = \frac{n(n-1) - 2n_1n_2}{n(n-1)}$$

Ahora que ya lo sabes hacer...Observa y recuerda:

1. *A lo largo de la asignatura, verás que cualquier compañía de seguros ha de tener completa información del comportamiento de la siniestralidad entre sus clientes. Esta información aparecerá descrita en tablas de datos para variables similares a las introducidas en el ejercicio 5,* X *: número de siniestros de sus clientes, e* $Y|X$ *cuantía por reclamación condicionada a la ocurrencia de* X *siniestros. Lógicamente* X *será una*

v.a. discreta, similar a las descritas en el Capítulo 2 de este texto, mientras que $Y|X$ será una v.a. continua, cuyo comportamiento posible será estudiado en el Capitulo 3. A partir de ambas variables, nuestra labor será procesar la información y obtener la que denominaremos "cuantía total por reclamaciones", que será una variable aleatoria nueva, cuya distribución será la distribución "incondicionada" de la variable Y.

2. *Va a ser muy habitual tener que calcular probabilidades para sumas de v.a. independientes, por ejemplo a la hora de manejar cuantías totales por reclamación de varios siniestros. En ocasiones, cualquiera de las funciones características nos identifica la nueva distribución como una conocida y manejable. En otras, esto no es así, como en el ejercicio de la cuantía uniforme, y habrá que definir la función de distribución de la suma de v.a. independientes.*

Índice general