*Estadística Actuarial: Modelos Estocásticos*

**Tarea 4**

1. Sean $X$ e $Y$ dos v.a. independientes con distribución exponencial de parámetros $a$ y $b$, $a \neq b$, respectivamente.

   *a*) Demuestra que la función de densidad de la suma, $Z = X + Y$ es

   $$f(z) = \frac{ab}{(b-a)}(e^{-az} - e^{-bz}), \quad z \geq 0$$

   *b*) Para $a = 3$ y $b = 4$, calcula la probabilidad de que $Z > 8$.

   *c*) Calcula $P(Z < 10|Z > 8)$.

2. Considera una compañía de seguros en la que el número de siniestros es una v.a discreta, $X$, con distribución binomial negativa de parámetros $m$, $p$; mientras que las cuantías por reclamación de los distintos siniestros, son v.a. $Y$, independientes y con distribución $\gamma(a, r)$.

   *a*) Obtener la distribución de la cuantía total, incondicionada al número de siniestros, o lo que es lo mismo la distribución compuesta de la cuantía total.

   *b*) Obtener la media y la varianza de la distribución compuesta de la cuantía total.

3. Considera que el número de siniestros es una v.a. con distribución binomial negativa, de parámetros $m$, $p$, y que la cuantía por reclamación de cada uno de ellos, es una v.a. exponencial de parámetro $a$. Bajo la hipótesis de independencia tanto entre cuantías como entre siniestros, calcula la media y la varianza de la cuantía total por ese tipo de riesgo.

4. Calcula la media y la varianza de una v.a. $X$ con distribución binomial negativa de parámetros $m$, $p$, teniendo en cuenta que $X$ es la distribución compuesta de de una v.a. de Posison donde el parámetro sigue una distribución $\gamma$.

5. Considera una compañía de seguros que contrata 200 pólizas donde el número de siniestros $X$ y la cuantía por reclamación en cada uno de ellos, se pueden modelizar como en el Ejemplo 3.5 de las notas de clase, donde la media de la exponencial es 20 euros y el parámetro de la distribución de Poisson es 0.05. Si la prima que se paga por cada póliza es de 6 euros, calcula:

   *a*) La probabilidad de que en una determinada póliza se produzca una reclamación y que además la cuantía por reclamación sea superior a 6 euros.

   *b*) La probabilidad de que la cuantía más elevada, para una póliza en concreto, sea menor que 60 euros.

   *c*) La probabilidad de que la cuantía más elevada, sobre el total de las 200 pólizas, sea menor que 60 euros.

   *d*) Media y varianza de la cuantía total por póliza.

   *e*) Media y varianza de la cuantía total por reclamaciones de las 200 pólizas.

*f*) La probabilidad aproximada de que el beneficio neto de la compañía sea superior a 600 euros.

*g*) La probabilidad aproximada de que la compañía pierda dinero en esta operación con las 200 pólizas.

6. Cierta compañía tiene 100 pólizas contratadas en 100 edificios. 25 de ellos poseen 5 viviendas, otros 25 poseen 15 viviendas y el resto posee 10 viviendas. Se ha estimado que el número de reclamaciones anuales por incendio y edificio sigue una ley de Polya con parámetro de contagio $\delta = 0{,}2$, y que la probabilidad inicial de incendio en una vivienda es $p = 0{,}01$.

    *a*) Sabiendo que cierto edificio tiene 10 viviendas, calcula la probabilidad de que se efectúen en él 2 reclamaciones por incendio.

    *b*) Idem con un edificio de 5 viviendas.

    *c*) Calcula medias y varianzas del número de reclamaciones, condicionadas al número de viviendas por edificio.

    *d*) Calcula la media y la varianza del número de reclamaciones por edificio, incondicionada al número de viviendas que posea.

    *e*) Calcula la probabilidad aproximada de que el total de reclamaciones no sea superior a 10.

7. Consideremos un activo tal que su precio mañana es una v.a con distribución normal $N(m = 3, \sigma = 2)$ con probabilidad 0.7 y sigue una distribución normal $N(m = 5, \sigma = 1)$ con probabilidad 0.3. Obtén la distribución del precio del activo mañana incondicionada, su media, varianza, asimetría y curtosis.

8. Considera un activo cuyo rendimiento es normal $N(m = 3, \sigma_1^2 = 30)$ con probabilidad $p$ y sigue una distribución normal $N(m = 3, \sigma_2^2 = 100)$ con probabilidad $1 - p$. Obtén media y la varianza incondicionada del rendimiento del activo.

9. Cierto siniestro tiene una probabilidad de ocurrir de 0,005, en cada exposición al riesgo del tomador de la póliza. Se sabe que el número de exposiciones al riesgo sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 5$.

    *a*) Calcula la distribución compuesta del número de siniestros.

    *b*) Calcula la probabilidad de que no haya ningún siniestro si ha habido 20 exposiciones al riesgo.

    *c*) Calcula la probabilidad incondicionada de que no haya ningún siniestro.

10. Una compañía aseguradora dispone de dos tipos de asegurados $A$ y $B$. El 30 % son de tipo $A$ y el resto de tipo $B$ %. Para los del tipo $A$, el número de siniestros sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_A = 0{,}5$, y para los de tipo $B$ de parámetro $\lambda_B = 0{,}3$.

    *a*) Obtén la función de cuantía del número de siniestros incondicionada al tipo de asegurado.

    *b*) Calcula las probabilidades correspondientes de 0,1 y 2 siniestros.

    *c*) Obtén la media y la varianza de la distribución incondicionada.

    *d*) Si la empresa tiene 1000 pólizas, por lo tanto 300 de tipo $A$ y 700 de tipo $B$, y hay independencia entre siniestros, calcula de forma aproximada la probabilidad de que el número total de siniestros no exceda de 40. ¿En qué te basas para realizar esta aproximación?

11. Considera una póliza de una comunidad que cubre dos tipos de siniestros, $A$ y $B$. El número de reclamaciones por el siniestros $A$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0{,}01$, mientras que el número de reclamaciones de tipo $B$ sigue una distribución binaria de parámetro $p = 0{,}001$. Bajo la hipótesis de independencia entre ambos tipos de siniestros.

    *a*) La cuantía que se paga por cada reclamación del tipo $A$ es de 10000 euros, y de 100000 euros por cada una de tipo $B$. Calcula el valor esperado de la cuantía total por póliza.

    *b*) Obtén la varianza de la cuantía total por póliza.

    *c*) Si se tienen 100 pólizas iguales, estima el valor de la prima para que se alcance un beneficio final total al menos de 30000 euros con probabilidad 0.8. (Utiliza el T.C.L.)

    *d*) Resuelve de nuevo los tres apartados anteriores, bajo la hipótesis de que la cuantía por reclamación es una v.a. exponencial de media 10000 para las pólizas de tipo $A$ y de media 100000 para las de tipo $B$.

12. Una empresa aseguradora sabe que la cuantía por reclamación de determinado tipo de póliza tiene una distribución de Pareto de parámetros $k = 10$ euros y $\alpha = 2{,}1$. La empresa cubre las reclamaciones de hasta 1000 euros de cuantía, y cuantías superiores a dicha cantidad son cubiertas por otra compañía reaseguradora.

    *a*) Para cada reclamación, calcula la probabilidad de que la compañía reaseguradora no tenga que cubrir su cuantía.

    *b*) Siendo el número de reclamaciones una v.a. de Poisson de parámetro $\lambda = 10$. Calcula la probabilidad de que la compañía reaseguradora no tenga que cubrir ninguna reclamación, incondicionada al número de las mismas.

13. Considera dos tipos de siniestros $A$ y $B$ independientes. La probabilidad de reclamar por $A$ es 0.1 y la de reclamar por $B$ es 0.01, y como mucho se admite una reclamación por cada uno de ellos. La cuantía por reclamación, para ambos tipos de siniestro sigue una distribución exponencial de media 100 euros. Una compañía oferta una póliza compuesta para cubrir ambos siniestros y cobra una prima por póliza de 30 euros. Se pide:

    *a*) Distribución del número de reclamaciones por póliza. Media y varianza.

    *b*) Probabilidad de que una póliza efectúe una reclamación y que su cuantía sea superior a los 5 euros.

    *c*) Media y varianza de la cuantía incondicionada al número de reclamaciones.

    *d*) Si la empresa posse 100 pólizas independientes, utiliza el T.C.L. para obtener la distribución de la cuantía total por reclamaciones.

    *e*) Probabilidad de que los beneficios se la compañía superen los 1000 euros.