Tarea 5

1. Consideremos una compañía en la que el número de siniestros N, es una v.a. con distribución binomial $b(n, p)$, donde n es el número de pólizas contratadas y p la probabilidad de reclamación en cada una de ellas. La cuantía por reclamación en cada una de ellas es una v.a. Y con distribución exponencial de parámetro a. Obtener la función de ingreso de la cuantía total por reclamaciones, para un nivel de riesgo α y una reserva inicial W.

2. Considera una empresa aseguradora que se plantea asegurar dos tipos de siniestros. En el primero, el número de siniestros, X_1 es una v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$, con cuantía por reclamación fija e igual a C. En el segundo el número de siniestros, X_2 es también una v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_2)$, con cuantía por reclamación con distribución exponencial de parámetro $a = \frac{1}{C}$. La función de utilidad de la empresa viene dada por:

$$U(m, \sigma^2) = -(Am + B\sigma^2)$$

   donde m es la media de cuantía total por reclamaciones, (montante medio de siniestralidad), σ^2 es la varianza y A y B son parámetros positivos fijos de la empresa.

   (a) ¿Qué tipo de seguro le conviene más a la compañía?

   (b) ¿En qué situación estamos si $\lambda_1 = \lambda_2$?

   (c) Considera ahora que la empresa quiere diseñar una póliza combinada para cubrir ambos tipos de siniestro, y sabe además que si se produce reclamación en uno de los dos tipos, se produce en todas las pólizas de ese tipo. Si la utilidad sigue siendo la anterior y hay una porporción de pólizas p del primer tipo.

      i. Calcula la media y la varianza de del beneficio de la cartera.

      ii. Calcula la proporción p que le proporciona utilidad máxima a la empresa.

3. Obtén la función generatriz de momentos para una v.a. X binomial negativa de parámetros m y p.

4. Obtén la función generatriz de momentos para una v.a. X $\gamma(a, r)$.

5. Obtén la función de ingreso de la cuantía total por reclamaciones, si el número de siniestros X es una v.a. binomial negativa y la cuantía por reclamación Y es constante e igual a a.

6. Obtén la función de ingreso de la cuantía total por reclamaciones, si el número de siniestros X es una v.a. binomial negativa y la cuantía por reclamación Y_i, en cada siniestro es $\gamma(a, r)$. Además Y_i, son v.a. independientes e i.d. para cada siniestro. Compara el resultado con el obtenido en el ejercicio anterior.

7. Considera dos compañías que cubren respectivamente dos tipos de siniestros. En la primera el número de reclamaciones es Poisson ($\lambda_1 = 1$) y la cuantía por reclamación es exponencial de parámetro $a_1 = 0.1$. En la segunda, el número de reclamaciones es Poisson ($\lambda_2 = 10$) y la cuantía por reclamación es exponencial de parámetro $a_2 = 1$.

(a) ¿Cuál de las dos compañías aborda una situación más arriesgada?

(b) Obtén la función de ingreso, en ambas compañías para un nivel de riesgo $\alpha = 0.05$.

(c) Si la reserva inicial para la primera compañía es $W_1 = 50$ y para la segunda es $W_2 = 70$, obtén el valor de las funciones de ingreso respectivas.

(d) ¿Qué pasaría si se fusionasen ambas compañías? ¿Cuál sería su función de ingreso integrada? ¿Y su valor considerando la reserva inicial como suma de las dos reservas $W_1 + W_2$?

8. Una compañía tiene 100 pólizas contratadas. El número de reclamaciones por cada póliza es una v.a Poisson de media 0.01, y la cuantía por reclamación es exponencial de media 2 (en miles de euros).

   (a) Calcula la probabilidad de que una determinada póliza presente una reclamación. Calcula la probabilidad de que entre las 100 pólizas se presenten 20 reclamaciones.

   (b) Sabiendo que una póliza ha presentado una reclamación, calcula la probabilidad de que la cuantía de la misma sea superior a 3 mil euros.

   (c) Calcula la media y la varianza de la cuantía total por póliza, incondicionada al numero de reclamaciones.

   (d) Si sabemos que en la compañía se han presentado un total de 20 reclamaciones, ¿cuál es la distribución de la cuantía total?

   (e) Obtén la función cumulativa de la cuantía total incondicionada al número de reclamaciones.

   (f) Obtén la función de ingreso de la compañía para un nivel de 0.05 de probabilidad de ruina.

9. En una empresa aseguradora el número de reclamaciones por póliza sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, donde λ puede tomar los valores, 0.09 (asegurados tipo A), con probabilidad 0.5 y 0.005 (asegurados de tipo B), con la misma probabilidad 0.5. Las primas se calculan como $k \cdot E(N)$, donde k es una constante igual para todas las pólizas en todos los años y $E(N)$ es la media de la v.a. número de reclamaciones.

   Un asegurado es de tipo A y le cobran una prima de 75 u.m. Después del primer año, durante el que no ha presentado ninguna reclamación se le revisa la prima. Obtener el nuevo valor de la prima, a partir de las siguientes cuestiones:

   (a) Obtener el valor de k.

   (b) Calcula las probabilidades de que el asegurado sea de tipo A o B condiciconadas a que no ha presentado ninguna reclamación.

   (c) Calcula la media condicionada del número de reclamaciones de este asegurado, para el segundo año.

   (d) Calcula la prima para el segundo año.

   (e) Repite los apartados $b), c)$ y $d)$ suponiendo que el asegurado ha presentado una reclamación.

10. En una entidad bancaria se quiere confeccionar una cartera formada por dos activos, con rendimientos aleatorios R_1 y R_2, y el activo de rendimiento seguro $S = 5\%$. Se sabe que las distribuciones de los rendimientos R_1 y R_2 son independientes, siendo $R_1 \equiv N(15\%, \sigma_1 = 10\%)$ y $R_2 \equiv N(7\%, \sigma_2 = 5\%)$. La cartera se confecciona de manera que $R_A = 0.25R_1 + 0.25R_2 + 0.5S$.

    (a) Analiza el rendimiento medio, varianza y probabilidad de que el rendimiento supere el 10%.

    (b) Rendimiento mínimo al nivel del 5% ($VaR_{0.95}$).

    (c) ¿Qué rendimiento puede llegar a ofrecer el banco si se quiere asegurar una probabilidad igual a 0.8 de obtener un rendimiento neto positivo?

11. El número de reclamaciones recibidas sigue una distribución binomial negativa de media 5 y varianza 20, y la cuantía por reclamación es gamma de media 2 u.m. y varianza 8 u.m.^{2}. Calcular:

    (a) La estructura de probabilidad para el siniestro más elevado.

    (b) Media y varianza de la cuantía total por reclamaciones.

    (c) Estructura de probabilidad de la cuantía total.

    (d) Función de ingreso de la compañía para un nivel de 0.05 de probabilidad de ruina.

    (e) Reserva para que el ingreso necesario por póliza no deba exceder las 20 u.m.

12. Una compañía asegura dos tipos de siniestros A y B. El número de reclamaciones por póliza, X_A, correspondientes al siniestro de tipo A, sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda_A = 0.01$ y la cuantía por reclamación, Y_A sigue una ley de Pareto de forma

    $$f(y) = \frac{3 \cdot 10^3}{y^4}, \quad y \geq 10$$

    El número de reclamaciones por póliza, X_B, correspondientes al siniestro de tipo B, sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda_B = 0.01$ y la cuantía por reclamación, Y_B sigue una ley exponencial de media 15.

    (a) ¿Cuál de los dos siniestros es más arriesgado? ¿Qué prima debe ser más cara? Atendiendo a la función de ingreso, ¿cuál es el valor mínimo que se debe cobrar para cada una de las pólizas?

    (b) La compañía contrata 100 pólizas, 60 de tipo A y 40 de tipo B. Utilizando el T.C.L., obtén la probabilidad de que la cuantía total por reclamaciones no supere las 20 unidades.