ESTADÍSTICA Y ANÁLISIS DE DATOS

Práctica del Tema 6. Esperanza matemática, momentos, función característica

1. Sea (X, Y) una v.a. cuya distribución conjunta aparece en la siguiente tabla:

(X,Y)	-1	1
0	3/6	1/6
1	2/6	0

   a) Calcula $E(X)$ y $E(Y)$.

   b) Calcula la covarianza entre X e Y. ¿Son independientes? Razónalo.

   c) Calcula para la v.a. X las funciones característica, generatriz de momentos y cumulativa. Deduce a partir de la función generatriz de momentos el valor de la varianza de X.

2. Consideremos una v. a. bidimensional (X, Y) con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2y & \text{si } x \in (0,2) \text{ e } y \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Calcula $E[X]$, $E[Y]$ y $E[XY]$. ¿Cuál es el valor de la covarianza entre X e Y?

   b) Calcula $E[X|Y = 0,5]$.

   c) ¿Son X e Y independientes? Razónalo.

3. Sea una diana de 20 cm. de radio dividida en cuatro zonas con distintas puntuaciones; si la distancia del dardo al centro es menor que 5 cm., la puntuación obtenida es 50 puntos, de 5 a 10 cm., 25 puntos, de 10 a 15 cm., 10 puntos y de 15 a 20 cm., 5 puntos. Supongamos que la distancia del dardo lanzado por un cierto individuo al centro de la diana viene dada por una v.a. X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{30-x}{400} & \text{si } x \in (0,20) \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo no dé en la diana?

   b) Calcula la distancia media al centro de la diana de los lanzamientos.

   c) Calcula la media de la puntuación obtenida. Puedes ayudarte utilizando la siguiente tabla:

Puntos	Distancia al centro	Probabilidad
50	(0,5)	$Prob[X \in (0,5)] =?$
25	(5,10)	$Prob[X \in (5,10)] =?$
10	(10,15)	$Prob[X \in (10,15)] =?$
5	(15,20)	$Prob[X \in (15,20)] =?$

4. La media y la varianza de la distribución de probabilidades de la v.a. X son, respectivamente, 10 y 3. Calcula, y si no es posible acota inferiormente, la probabilidad de que la variable aleatoria X pertenezca al intervalo $(8, 12)$ en las siguientes hipótesis:

   a) Caso de distribución desconocida.

   b) Caso de distribución uniforme en el intervalo $(7; 13)$. Se puede comprobar que en este caso la media y varianza también son 10 y 3, respectivamente: $E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{7+13}{2} = 10$ y $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(13-7)^2}{12} = 3$.

5. Los ingresos y gastos de una empresa son aleatorios. Las distribuciones de probabilidad correspondientes son desconocidas, pero se sabe que la media y la desviación típica en miles de euros de los ingresos son $m_x = 1500$, $\sigma_x = 100$; y las de los gastos $m_y = 1200$, $\sigma_y = 80$, siendo el coeficiente de correlación entre ingresos y gastos $\rho = 0{,}8$. Si,

$$Beneficio = Ingresos - Gastos = X - Y,$$

   a) Calcula la media y la varianza del beneficio de esta empresa.

   b) Calcula una cota para la probabilidad de que dicho beneficio esté comprendido entre 0,21 y 0,39 millones de euros.

6. Se define la distribución de probabilidad de la v.a. (X, Y) dando a cada uno de los diez puntos siguientes la probabilidad 0.1. Es decir:

$$\begin{aligned} P(1,1) &= P(2,1) = P(2,2) = P(2,3) = P(3,1) = P(3,2) \\ &= P(3,3) = P(3,4) = P(4,3) = P(4,4) = 0{,}1 \end{aligned}$$

   Demuestra que el coeficiente de correlación entre X e Y es igual a 0,6186.

7. Considera un dado regular y perfecto.

   a) ¿Cuál es el valor medio de la puntuación que se obtiene al realizar un lanzamiento?

   b) ¿Cuál es su varianza?

   c) Se realizan n lanzamientos sucesivos, y se define la v.a. $\overline{X}_n$ como la media aritmética de las puntuaciones obtenidas en los n lanzamientos. Calcula la media y la varianza de dicha media aritmética, $\mathrm{E}(\overline{X}_n)$ y $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$.

8. La media y la desviación típica de la distribución de probabilidades de la v.a. X son respectivamente $m = 5$ y $\sigma = 0{,}1$. Hallar la probabilidad, o una cota inferior de la misma, correspondiente al intervalo $(4{,}85; 5{,}15)$ en las dos siguientes situaciones:

   a) Caso de distribución de X desconocida.

   b) Caso de que X tenga distribución uniforme en un cierto intervalo (a, b). Recuerda que en este caso la media y varianza también son $E(X) = \frac{a+b}{2} = 5$ y $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 0{,}1^2 = 0{,}01$, respectivamente.

9. La vida (en horas) de un tubo electrónico es una v.a. que obedece a una distribución exponencial con $\lambda = 0{,}02$, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02e^{-0{,}02x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar la vida media y la varianza de la vida de los tubos.

10. La función de cuantía conjunta de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) viene dada por:

X \ Y	1	2
1	3/12	1/12
2	2/12	4/12
3	0	2/12

Calcular:

a) El valor medio de X y de $Z = 5X + 3$.

b) La varianza de X

c) La función característica de X

d) La covarianza entre X e Y

11. Sean X e Y dos v.a. con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	2/9	0	1/9
$X = 0$	0	1/9	2/9
$X = 1$	1/9	2/9	0

a) Obtén las funciones de cuantía marginales de X e Y.

b) Calcula los siguientes valores esperados: $E(X)$, $E(Y)$, $E(X + Y)$ y $E(XY)$.

c) Calcula las siguientes varianzas: $Var(X)$, $Var(Y)$ y $Var(X + Y)$.

12. Si X e Y son v.a. independientes entre sí y conjuntamente definidas, señalar razonadamente aquellas expresiones que sean correctas.

a) $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{ Var } (X) + b^2$

b) $\text{E}(aX^2 + bY) = a\text{Var}X + b\text{E}(Y)$

c) $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

d) $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$

13. Una compañía de telefonía móvil factura por minuto completo. Un cliente consume sin tener en cuenta este hecho, es decir, el tiempo que tarda en hablar es un número entero de minutos más los segundos, que se reparten de forma uniforme entre 0 y 60. Este cliente tiene contratada una tarifa de 21 céntimos de euro por minuto durante todo el día. Recuerda que si $X \sim U(a,b)$, su media es $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y su varianza es $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

    a) Calcular el número medio de segundos que la compañía cobra de más a este cliente en cada llamada.

    b) Calcular la varianza de los segundos que la compañía cobra de más a este cliente en cada llamada.

    c) Calcular la media y la varianza de la cantidad, en euros, que la compañía cobra de más a este cliente en cada llamada.

    d) Si el cliente realiza 15 llamadas en un día ¿cuál es la media y la varianza de la cantidad total que la compañía cobra de más a este cliente en un día?

14. Sea X una v.a. discreta con distribución:

    $P(X=-1) = \frac{1}{4} \quad P(X=0) = \frac{1}{2} \quad P(X=1) = \frac{1}{4}$

    Hallar:

    a) La función de cuantía de $Z = X^2$.

    b) La función característica de Z.

    c) La media y la varianza de Z a partir de su función característica.

15. Una mujer decide tener hijos hasta que uno de ellos sea niña, o hasta que alcance un total de 5 varones, en cuyo caso desiste de su empeño de tener una niña. Sea X la v.a. "número total de hijos". Si P(niño)=P(niña)=$\frac{1}{2}$, calcular:

    a) La función de cuantía de X. (Nota: se trata de una mujer fértil, por lo que $P(X=0)=0$).

    b) Obtener la función característica de X.

    c) Deducir la media y la varianza de X.

    d) Consideremos ahora dos mujeres distintas con comportamiento independiente y similar al descrito más arriba. Sean X e Y los números respectivos de hijos que tiene cada una y $Z = X+Y$ el número total de hijos de las dos mujeres. Calcular $P(Z=4)$.

16. Considera la v.a. (X,Y), cuya función de densidad es:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si} \quad 0 \le x \le 1, y \le x, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    Calcular:

    a) El coeficiente de correlación lineal entre X e Y.

    b) ¿Son X e Y incorrelacionadas? ¿Son independientes?

17. Sean X e Y v.a. independientes con funciones características $\psi_X(u) = e^{3iu-u^2}$ y $\psi_Y(u) = e^{2iu-2u^2}$. Calcular la función característica de $Z = 2X - 3Y + 4$.

Soluciones a los problemas. Práctica del Tema 6

1. *a*) $E(X) = \frac{1}{3}$ y $E(Y) = \frac{-2}{3}$

   b) $Cov(X, Y) = \frac{-1}{9} \neq 0 \Longrightarrow$ No son independientes.

   c)
   - $\psi_X(u) = \frac{2}{3} + e^{iu}\frac{1}{3}$, $\alpha_X(u) = \frac{2}{3} + e^{u}\frac{1}{3}$ y $\mu_X(u) = ln\left(\frac{2}{3} + e^{u}\frac{1}{3}\right)$.
   - $\alpha'_X(u) = e^u\frac{1}{3} \Longrightarrow m_x = \alpha'_X(u=0) = e^0\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
     $\alpha''_X(u) = e^u\frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha_2 = \alpha''_X(u=0) = e^0\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
     $Var(X) = \sigma^2_X = \alpha_2 - (m_X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

2. *a*) $E(X) = \frac{3}{2}$, $E(Y) = \frac{2}{3}$ y $E(XY) = 1$.
   Por tanto, $Cov(XY) = \sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0$

   b) $E[X|Y = 0,5] = 1{,}5$.

   c) Sí. Cumplen $f(x, y) = f(x)f(y) \quad \forall (x, y) \in \Re^2$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x^2 y &= \frac{3}{8}x^2 \cdot 2y \quad \text{si } x \in (0,2) \text{ e } y \in (0,1) \\ 0 &= 0 \text{ si } x \notin (0,2) \text{ y/o } y \notin (0,1) \end{aligned}$$

3. *a*) 0

   b) $E(X) = \frac{25}{3}$

   c) La media de la puntuación es 27,1875. En el cálculo se ha usado la tabla:

Puntos	Distancia al centro	Probabilidad
50	(0,5)	$Prob[X \in (0,5)] = \frac{275}{800}$
25	(5,10)	$Prob[X \in (5,10)] = \frac{225}{800}$
10	(10,15)	$Prob[X \in (10,15)] = \frac{175}{800}$
5	(15,20)	$Prob[X \in (15,20)] = \frac{125}{800}$

4. *a*) $P[X \in (8, 12)] \geq \frac{1}{4} = 0{,}25$

   b) $P[X \in (8, 12)] = \frac{2}{3} = 0{,}66$

5. *a*) $m_B = 300$ y $\sigma^2_B = 3600$.

   b) $P[B \in (210, 390)] \geq \frac{5}{9} = 0{,}56$

6. $r_{XY} = 0,6186$

7. *a*) $\frac{21}{6}$

   b) 2,91667

   c) $E(\overline{X}_n) = \frac{21}{6}$. $\text{Var}(\overline{X}_n) = \frac{2{,}91667}{n}$

8. *a*) $k = 1{,}5$, $P(X \in (4{,}85; 5{,}15) \geq 0{,}55$

   b) $a = 4{,}827$, $b = 5{,}173$, $P(X \in (4{,}85; 5{,}15)) = 0{,}867$

9. $E(X) = 50$ horas. $Var(X) = 2500$ horas^2.

10. *a)* $E(X) = 1\frac{4}{12} + 2\frac{6}{12} + 3\frac{2}{12} = \frac{22}{12} = 1{,}833$
$E(Z) = 5\,E(X) + 3 = 5\frac{22}{12} + 3 = \frac{146}{12} = 12{,}167$

b) $E(X^2) = 1^2\frac{4}{12} + 2^2\frac{6}{12} + 3^2\frac{2}{12} = \frac{46}{12}$
$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{46}{12} - \left(\frac{22}{12}\right)^2 = \frac{68}{12^2} = 0{,}472$

c) $E(e^{iuX}) = e^{iu1}\frac{4}{12} + e^{iu2}\frac{6}{12} + e^{iu3}\frac{2}{12} = \frac{1}{6}\left(2e^{iu} + 3e^{2iu} + e^{3iu}\right)$

d) $E(XY) = 1\frac{3}{12} + 2\frac{1}{12} + 2\frac{2}{12} + 4\frac{4}{12} + 6\frac{2}{12} = \frac{37}{12}$
$E(Y) = 1\frac{5}{12} + 2\frac{7}{12} = \frac{19}{12}$
Cov(X,Y) $= E(X,Y) - E(X)E(Y) = \frac{37}{12} - \frac{22\cdot 19}{12^2} = \frac{26}{12^2} = 0{,}18055$

11. *a)* La distribución marginal de la v.a. X, es:
$P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{3}$
Y la de la v.a. Y, es:
$P(Y=-1) = P(Y=0) = P(Y=1) = \frac{1}{3}$
Es decir ambas variables tienen la misma distribución.

b) $E(X) = -1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0.$
Como X e Y tienen la misma distribución, tienen la misma media, luego $E(Y) = E(X) = 0$.
Además $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0$.

$$\begin{aligned} E(X\cdot Y) &= (-1)^2\cdot P(-1,-1) + (-1)\cdot 0\cdot P(-1,0) + (-1)\cdot 1\cdot P(-1,1) \\ &+ (0)\cdot(-1)\cdot P(0,-1) + 0\cdot 0\cdot P(0,0) + 0\cdot 1\cdot P(0,1) \\ &+ (1)\cdot(-1)\cdot P(1,-1) + 1\cdot 0\cdot P(1,0) + 1\cdot 1\cdot P(1,1) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0 \end{aligned}$$

c) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, donde $E(X) = 0$ y $E(X^2) = (-1)^2\frac{1}{3} + (0)^2\frac{1}{3} + (1)^2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Luego $Var(X) = \frac{2}{3}$. Lo mismo para la v.a. Y, $Var(Y) = \frac{2}{3}$.
Finalmente, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\cdot Cov(X,Y)$.
$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0 - 0 = 0$, luego $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

12. Son correctas *c)* y *d)*

13. X es el número de segundos que habla sin contar los minutos completos.

a) Y = 60 - X es el número de segundos que la compañía cobra de más a este cliente en cada llamada.
$E(X) = 30$
$E(Y) = 60 - E(X) = 30$

b) $\sigma_X^2 = \frac{(60-0)^2}{12} = 300$
$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 = 300$

c) Si llamamos D al dinero, en euros, que la compañía cobra de más a este cliente en cada llamada.
$D = \frac{0{,}21}{60}\,Y$
$E(D) = \frac{0{,}21}{60}\,E(Y) = \frac{0{,}21}{60}\,30 = 0{,}105$
$\sigma_D^2 = \left(\frac{0{,}21}{60}\right)^2 \sigma_Y^2 = \left(\frac{0{,}21}{60}\right)^2 \cdot 300 = 0{,}003675$

d) Si llamamos DT a la cantidad total, en euros, que la compañía cobra de más a este cliente en un día.
$DT = D_1 + \cdots + D_{15}$
$E(DT) = 15 \cdot E(D) = 15 \cdot 0{,}105 = 1{,}575$
$\sigma_{DT}^2 = 15\,\sigma_D^2 = 15 \cdot 0{,}003675 = 0{,}055125$

14. *a*) $P(Z = 0) = P(Z = 1) = \frac{1}{2}$
b) $\psi_Z(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{iu}$
c) $E(Z) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{4}$

15. *a*) $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$, $P(X = 3) = \frac{1}{8}$, $P(X = 4) = \frac{1}{16}$, $P(X = 5) = \frac{2}{32}$
b) $\psi_X(u) = \frac{1}{2}e^{iu} + \frac{1}{4}e^{2iu} + \frac{1}{8}e^{3iu} + \frac{1}{16}e^{4iu} + \frac{2}{32}e^{5iu}$
c) $E(X) = 1{,}9375$, $\mathrm{Var}(X) = 1{,}4335$
d) $P(Z = 4) = 0{,}1875$

16. *a*) $\rho = \frac{1}{2}$
b) $\rho \neq 0$, luego están correlacionadas, luego no son independientes, son dependientes. Su dependencia lineal es positiva y moderada.

17. $\psi_Z(u) = e^{4iu - 22u^2}$