

ESTADÍSTICA Y ANÁLISIS DE DATOS

Práctica del Tema 5. Variable aleatoria (en R y R^2)

1. Se considera un dado regular y se define la v.a. X : puntuación obtenida en un lanzamiento cualquiera de dicho dado.
 - a) Obtén la distribución de probabilidad de X .
 - b) Obtén su función de distribución, $F(x)$. Representala gráficamente.
 - c) Calcula las siguientes probabilidades haciendo uso únicamente de la información del apartado b). $P(X = 3)$; $P(X \geq 3)$; $P(X < 3)$; $P(4 < X < 5)$; $P(3 < X \leq 5)$; $P(1 \leq X < 4)$ y $P(1 \leq X \leq 4)$.

2. Sea la v.a. X cuya función de distribución es:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0,5 & -1 \leq x < 1 \\ 0,8 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Representa gráficamente $F(x)$ y obtén la distribución de probabilidad de la v.a. X .

3. Una urna tiene tres bolas blancas y tres negras. La variable aleatoria X cuenta el número de bolas blancas obtenidas en la extracción de tres bolas sin reemplazamiento.
 - a) Escribe la función de cuantía de la v.a. X y su representación gráfica.
 - b) Escribe la función de distribución de probabilidad de la v.a. X y su representación gráfica.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas blancas si a lo sumo se extraen dos bolas negras?
 - d) Escribe el soporte y la función de cuantía de la variable aleatoria $Y = X^2 - X$.
4. Se considera un dado regular. Se define la v.a. X : número de “unos” obtenidos en 5 lanzamientos consecutivos del dado.
 - a) Obtén la distribución de probabilidad de la v.a. X .
 - b) ¿Tiene alguna forma conocida? ¿Cuál?
 - c) Calcula la probabilidad de obtener tres “unos” en cinco lanzamientos.
 - d) Calcula la probabilidad de sacar al menos dos “unos” en cinco lanzamientos.
 - e) Calcula la probabilidad de no obtener ningún “uno” en cinco lanzamientos.

5. El número de gotas de agua que caen de un grifo mal cerrado cada 15 minutos sigue una distribución de Poisson de parámetro λ igual a 4:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcular:

- a) La función de distribución de probabilidad para X igual a 3.
- b) Probabilidad de que en un cuarto de hora caigan menos de cinco gotas si han caído más de 3 gotas.
- c) Probabilidad de que en un cuarto de hora caigan tres gotas y en el siguiente cuarto de hora otras tres. Suponer independencia entre el número de gotas que caen en los distintos cuartos de hora.
6. En una empresa de embotellado de agua mineral se ha estudiado la distribución del número de botellas que resultan defectuosas en la producción diaria de botellas, siendo independientes el número de defectuosas en días distintos. Así, la v.a. X representa *el número de botellas defectuosas en la producción diaria de la empresa* y se distribuye como una Poisson de parámetro λ igual a 1:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}; k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcular:

- a) La probabilidad de encontrar al menos una botella defectuosa en la producción de un día cualquiera.
- b) La probabilidad de no encontrar ninguna botella defectuosa en la producción de un día cualquiera.
- c) La probabilidad de encontrar al menos una botella defectuosa en la producción de un día cualquiera, si (sabiendo que) el día anterior no ha aparecido ninguna defectuosa.
7. Sea X una v.a. con distribución uniforme entre 0 y 8, es decir, su función de densidad es: $f(x) = \frac{1}{8}$, si $0 \leq x \leq 8$. Obtener el valor de a tal que $P(X \leq a) = F_X(a) = \frac{1}{4}$.
8. Sea X una v.a. con función de densidad, $f(x) = Kx^2$, si $-1 \leq x \leq 1$ y $f(x) = 0$, en otro caso. Calcular:
- a) El valor de K para que $f(x)$ sea función de densidad.
- b) El valor de $P(-1 \leq X < 3)$.
- c) La función de distribución de X , $F(x)$, en $x \in (-1, 1]$
9. Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es $f(x) = a(3 - x)$, si $0 \leq x \leq 2$, y $f(x) = 0$, en otro caso. Calcular:
- a) El valor de a para que $f(x)$ sea una función de densidad.
- b) El valor de $F_X(1,5)$.
- c) $P(1 \leq X \leq 2,5)$.
10. Sea X una v.a. con función de densidad exponencial de parámetro $\frac{1}{8}$, es decir: $f(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}}$, si $x \geq 0$.
- a) Calcular $P(X \leq 5)$.

- b) Obtener la función de distribución de la v.a. $Y = 1 - 2X$, en función de la de X .
- c) A partir del apartado anterior, deducir la función de densidad de la v.a. Y .
11. La vida útil de las pilas de los relojes medida en meses sigue una distribución exponencial de parámetro λ .
- a) ¿Cuál es el valor de λ para que la probabilidad de que una pila dure al menos un año sea 0,5?
- b) Se eligen cinco pilas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya tres que duren al menos un año?

12. X es una v.a. discreta cuya distribución de probabilidades se especifica así:

$$P(X = -3) = 0,5; \quad P(X = 3) = 0,2; \quad P(X = 5) = 0,3$$

Hállese la distribución de probabilidad de $Z = X^2 - 8$.

13. X es una variable con distribución uniforme entre 0 y 1. ¿Cuál es la función de densidad de $Y = X^2$? ¿Y la de $Z = 2X - 1$?

14. Dada una v.a. bivalente cuya distribución de probabilidad es:

$$P(1, 1) = \frac{1}{4}, \quad P(1, 2) = \frac{1}{2}, \quad P(2, 1) = \frac{1}{4}$$

- a) Obtener la distribución de probabilidad marginal de la v.a. X .
- b) Obtener la distribución de probabilidad marginal de la v.a. Y .
- c) ¿Son X e Y independientes?
15. Sean X e Y dos v.a. cuyas distribuciones de probabilidad son

$$P(X = 1) = 0,4 \quad P(X = 2) = 0,6 \quad P(Y = 3) = 0,7 \quad P(Y = 9) = 0,3$$

Obtener la distribución conjunta de la v.a. (X, Y) en el supuesto de que ambas componentes sean independientes.

16. Se define la distribución de probabilidad de la v.a. (X, Y) dando a cada uno de los diez puntos siguientes la probabilidad 0,1. Es decir:

$$\begin{aligned} P(1, 2) &= P(2, 2) = P(3, 2) = P(4, 2) = P(2, 4) = P(3, 4) \\ &= P(4, 4) = P(3, 6) = P(4, 6) = P(4, 8) = 0,1 \end{aligned}$$

Hallar:

- a) La función de distribución en los puntos $(2, 5, 7)$ y $(3, 6)$.
- b) La distribución de probabilidad de la v.a. $Y|X = 3$.
- c) Estudiar la independencia entre X e Y .

17. La función de cuantía conjunta de dos variables viene dada por:

$$P(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{si } x = 1, 2, 3, \quad y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallar:

- a) El valor del parámetro c .
- b) $P(X = 2, Y = 3)$.
- c) $P(1 \leq X \leq 2, Y \leq 2)$.
- d) $F(x, y)$.

18. La función de cuantía conjunta de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) viene dada por:

	Y	2	3
X			
1		$\frac{1}{9}$	0
2		0	a
3		$\frac{2}{9}$	0

- a) Calcular el valor de a .
- b) Obtener las funciones de cuantía marginales de las v.a. X e Y .
- c) Calcular la función de cuantía y la función de distribución de probabilidad de la v.a. $X|Y = 2$.
- d) $P(X = 2|X + Y = 5)$.
- e) $P(Y > 2|X > 1)$.
- f) ¿Son X e Y v.a. independientes?

19. Sean X e Y dos v.a. con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

	Y = -1	Y = 0	Y = 1
X = -1	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
X = 0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
X = 1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0

- a) Obtén las funciones de cuantía marginales de X e Y .
- b) Calcula el valor de $P(X + Y \geq 1|X^2 = 1)$.
- c) Calcula el valor de $P(X + Y = 0)$.

20. La v.a. (X, Y) tiene función de densidad conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} kx^2y & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad y \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular k .
- b) Calcular $P(0 < X < 1'5, Y \leq 1)$.
- c) Obtener las funciones de densidad marginales.
- d) Estudiar la independencia entre X e Y .

21. La v.a. (X, Y) tiene función de densidad conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular k de modo que $f(x, y)$ sea función de densidad.
- b) Obtener las funciones de densidad marginales.
- c) Calcular $P(1 < X < 2, 0 < Y < \frac{1}{2})$.
- d) Estudiar la independencia entre X e Y .
- e) Calcular $P(X = 1'5)$.

22. Una empresa se dedica a la venta de dos productos: el primero da unos beneficios que, expresados en millones de euros, se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0, 6]$. El segundo da unas pérdidas que, expresadas en millones de euros, se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0, 2]$. Se sabe que los beneficios o pérdidas resultantes de la producción de ambos productos son v.a. independientes. Calcular la probabilidad de que el beneficio neto de la empresa sea superior a 2 millones de euros.

23. Una empresa comercializa dos productos. Los beneficios mensuales obtenidos por la venta de ambos productos (X, Y) en millones de euros, sigue una distribución cuya función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular la función de densidad marginal de los beneficios de cada uno de los productos. ¿Son independientes?
- b) Calcular la probabilidad de que el beneficio total de la empresa durante un mes no supere el millón de euros.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el beneficio mensual X de uno de los productos sea superior al medio millón de euros, si (sabiendo que) el beneficio mensual Y del otro producto es inferior a dicha cantidad?

24. Sea (X, Y) una v.a. cuya función de densidad conjunta viene dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Halla el valor de la constante c para que $f(x, y)$ sea una función de densidad completamente especificada.

- b) Halla la función de densidad marginal de la v.a. X .
- c) Calcula $E(X)$. (Este apartado corresponde al Tema 6).
- d) Calcula razonadamente la probabilidad $P(X + Y \leq 1)$.
- e) Razona gráfica o algebraicamente el valor de la probabilidad condicionada $P(X + Y \leq 1 | X = 0,5)$.

25. La v.a. (X, Y) representa los beneficios anuales, medidos en millones de euros, de dos empresas A y B de accesorios de automóviles. Su función de densidad conjunta viene dada por:

$$f(x, y) = ke^{x+y}, \quad 0 < y < x < 1$$

donde $k = \frac{2}{(e-1)^2} \approx 0,68$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que los beneficios anuales de la empresa B superen el medio millón de euros?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que los beneficios anuales de B sean menores que medio millón de euros, si los de la empresa A han sido exactamente tres cuartas partes de un millón de euros?

NOTA: para evitar errores de cálculo, trabajar con la letra k y sustituir su valor después de hacer todas las operaciones.

Soluciones a los problemas. Práctica 5

1. X : puntuación obtenida en el lanzamiento de un dado regular.

a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = i) = \frac{1}{6}$, para $i = 1, \dots, 6$.

$$b) F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

c) $P(X = 3) = \frac{1}{6}$; $P(X \geq 3) = \frac{4}{6}$; $P(X < 3) = \frac{2}{6}$; $P(4 < X < 5) = 0$;
 $P(3 < X \leq 5) = \frac{2}{6}$; $P(1 \leq X < 4) = \frac{3}{6}$ y $P(1 \leq X \leq 4) = \frac{4}{6}$.

2. $S = \{-1, 1, 2\}$. $P(X = -1) = 0,5$, $P(X = 1) = 0,3$ y $P(X = 2) = 0,2$.

3. X : nº de bolas blancas obtenidas en la extracción de tres bolas sin reemplazamiento
 $S = \{0, 1, 2, 3\}$

a) $P(X = 0) = \frac{1}{20} = 0,05$

$P(X = 1) = \frac{9}{20} = 0,45$

$P(X = 2) = \frac{9}{20} = 0,45$

$P(X = 3) = \frac{1}{20} = 0,05$

$$b) F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,05 & 0 \leq x < 1 \\ 0,5 & 1 \leq x < 2 \\ 0,95 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

c) a lo sumo 2N = al menos 1B

$$P(X = 2 | X \geq 1) = \frac{P(X=2, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=2)}{1 - P(X=0)} = \frac{0,45}{1 - 0,05} = \frac{9}{19} \approx 0,47$$

d) $S = \{0, 2, 6\}$

$$P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,5$$

$$P(Y = 2) = P(X = 2) = 0,45$$

$$P(Y = 6) = P(X = 3) = 0,05$$

4. a) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $P(X = i) = \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}$, donde $p = \frac{1}{6}$, para $i = 0, 1, \dots, 5$.

b) Se trata de la distribución binomial $b(p = \frac{1}{6}, n = 5)$.

c) $P(X = 3) = 10p^3(1-p)^2 = 0,03215$.

d) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,1962$.

e) $P(X = 0) = (1-p)^5 = 0,4018$.

5. a)

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \leq 3) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= e^{-4} + 4e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} + \frac{4^3}{3!}e^{-4} = 0,4335 \end{aligned}$$

b) $P(X < 5 | X > 3) = \frac{P(3 < X < 5)}{P(X > 3)} = \frac{P(X=4)}{1-P(X \leq 3)} = \frac{0,1954}{0,5665} = 0,3449$

c) $P(X_1 = 3, X_2 = 3) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 3) = e^{-4}\frac{4^3}{3!}e^{-4}\frac{4^3}{3!} = e^{-8}\frac{1024}{9} = 0,0382$

6. a) $P(X \geq 1) = 0,6322$.

b) $P(X = 0) = 0,3678$.

c) $P(X_1 \geq 1 | X_0 = 0) = 0,6322$.

7. $a = 2$.

8. a) $K = \frac{3}{2}$.

b) $P = 1$.

c) $F_X(x) = \frac{(1+x^3)}{2}, -1 < x \leq 1$.

9. a) $a = \frac{1}{4}$.

b) 0,8437.

c) $\frac{3}{8}$.

10. a) 0,4647.

b) $F_Y(y) = 1 - F_X(x = \frac{1-y}{2})$ si $y \leq 1$; $F_Y(y) = 1$, en otro caso.

c) $f(y) = \frac{1}{16}e^{-\frac{(1-y)}{16}}$ si $y \leq 1$; $f(y) = 0$, en otro caso.

11. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

a) $P(X \geq 12) = 0,5 \Rightarrow P(X < 12) = 0,5$

$$P(X < 12) = \int_0^{12} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{12} = 1 - e^{-12\lambda}$$

$$1 - e^{-12\lambda} = 0,5 \Rightarrow e^{-12\lambda} = 0,5$$

$$-12\lambda = \ln 0,5 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,5}{12} \approx \frac{0,7}{12} \approx 0,06$$

b) Sea Z la v.a. que cuenta el n° de pilas de entre las cinco que duran al menos un año. Z es una v.a. discreta con distribución binomial $B(p = 0,5; n = 5)$

$$P(Z = 3) = \binom{5}{3} 0,5^3 \times 0,5^2 = 10 \times 0,5^5 = 0,3125$$

12. $P(Z = 1) = 0,7, P(Z = 17) = 0,3$.

13. a) $f(y) = |\frac{1}{2\sqrt{y}}|, 0 \leq y \leq 1$

b) $f(z) = 0,5, -1 \leq z \leq 1$

14. a) $P(X = 1) = \frac{3}{4}, P(X = 2) = \frac{1}{4}$.

b) $P(Y = 1) = \frac{1}{2}, P(Y = 2) = \frac{1}{2}$.

c) No son independientes. $P(2, 2) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{1}{8}$.

15. $P(1, 3) = 0,28, P(1, 9) = 0,12, P(2, 3) = 0,42$ y $P(2, 9) = 0,18$

16. a) $F(2,5, 7) = 0,3, F(3, 6) = 0,6$.

b) $P(Y = 2|X = 3) = \frac{1}{3}, P(Y = 4|X = 3) = \frac{1}{3}, P(Y = 6|X = 3) = \frac{1}{3}$.

c) No son independientes. Por ejemplo: $P(1, 4) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 4) = 0,03$.

17. a) $c = \frac{1}{36}$.

b) $P(2, 3) = \frac{1}{6}$.

c) $P(1 \leq X \leq 2, Y \leq 2) = \frac{1}{4}$.

d)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 1 \text{ ó } y < 1 \\ \frac{1}{36} & 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2 \\ \frac{3}{36} & 2 \leq x < 3, 1 \leq y < 2 \\ \frac{6}{36} & 3 \leq x, 1 \leq y < 2 \\ \frac{3}{36} & 1 \leq x < 2, 2 \leq y < 3 \\ \frac{9}{36} & 2 \leq x < 3, 2 \leq y < 3 \\ \frac{18}{36} & 3 \leq x, 2 \leq y < 3 \\ \frac{6}{36} & 1 \leq x < 2, 3 \leq y \\ \frac{18}{36} & 2 \leq x < 3, 3 \leq y \\ 1 & 3 \leq x, 3 \leq y \end{cases}$$

18. a) $a = \frac{6}{9} \approx 0,67$

b) $S(X) = \{1, 2, 3\}; P_X(1) = \frac{1}{9}, P_X(2) = \frac{6}{9}, P_X(3) = \frac{2}{9}$

$S(Y) = \{2, 3\}; P_Y(2) = \frac{1}{3}, P_Y(3) = \frac{2}{3}$

c) $S(X|Y = 2) = \{1, 3\}; P_{X|Y=2}(1) = \frac{P(1,2)}{P_Y(2)} = \frac{1}{3}, P_{X|Y=2}(3) = \frac{P(3,2)}{P_Y(2)} = \frac{2}{3}$

$$F_{X|Y=2}(x) = P_{X|Y=2}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

d)

$$\begin{aligned} P(X = 2|X + Y = 5) &= \frac{P(X = 2, X + Y = 5)}{P(X + Y = 5)} = \frac{P(X = 2, Y = 3)}{P(X = 2, Y = 3) + P(X = 3, Y = 2)} \\ &= \frac{6/9}{8/9} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} P(Y > 2|X > 1) &= \frac{P(Y > 2, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(Y = 3, X = 2) + P(Y = 3, X = 3)}{1 - P(X = 1)} \\ &= \frac{6/9}{8/9} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

f) X, Y independientes $\Leftrightarrow P_X(x)P_Y(y) = P(x, y) \forall x \in S(X) \forall y \in S(Y)$
 $P_X(2)P_Y(2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq 0 = P(2, 2)$

19. a) La distribución marginal de la v.a. X es:

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

Y la de la v.a. Y es:

$$P(Y = -1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{3}$$

Es decir, ambas variables tienen la misma distribución.

b)

$$P(X + Y \geq 1 | X^2 = 1) = \frac{P[(X + Y \geq 1) \cap (X^2 = 1)]}{P(X^2 = 1)}$$

donde

$$\begin{aligned} P[(X + Y \geq 1) \cap (X^2 = 1)] &= P[(X + Y \geq 1) \cap (X = 1)] + \\ &+ P[(X + Y \geq 1) \cap (X = -1)] = \\ &= P(1, 0) + P(1, 1) + 0 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{3}$$

Luego,

$$P(X + Y \geq 1 | X^2 = 1) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

c)

$$\begin{aligned} P(X + Y = 0) &= P(X = -Y) = P(-1, 1) + P(0, 0) + P(1, -1) = \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

20. a) $k = \frac{5}{16}$.

b)

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1.5, Y \leq 1) &= \int_0^1 \int_y^{1.5} \frac{5}{16} x^2 y dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^x \frac{5}{16} x^2 y dy dx + \int_1^{1.5} \int_0^1 \frac{5}{16} x^2 y dy dx = \\ &= 0,15496 \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{5}{32}x^4$, si $0 \leq x \leq 2$. $f(y) = \frac{5}{6}y(1 - \frac{y^3}{8})$, si $0 \leq y \leq 2$.

d) No son independientes. Por ejemplo, en el punto $(1, 0,5)$ la función de densidad conjunta es $f(1, 0,5) = 0,15625$, mientras que el producto de marginales es: $f_X(1) \cdot f_Y(0,5) = 0,15625 \cdot 0,41 \neq 0,15625$.

21. a) $k = 1$.
 b) $f(x) = \frac{x}{2}$, si $0 \leq x \leq 2$. $f(y) = 2y$, si $0 \leq y \leq 1$.
 c) $P(1 < X < 2, 0 < Y < \frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$.
 d) Son independientes, puesto que en cualquier punto del plano, (x, y) , se verifica $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.
 e) $P(X = 1,5) = 0$.
22. $Z = X - Y$. $P(Z > 2) = 0,5$.
23. a) $f_X(x) = x + \frac{1}{2}$, si $0 \leq x \leq 1$. $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$, si $0 \leq y \leq 1$. No son independientes, puesto que $f(x, y) = x + y \neq (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})$.
 b) $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{3}$.
 c) $P(X > 0,5 | Y < 0,5) = 0,666$.
24. a) Sabemos que la función de densidad debe integrar la unidad en el recinto en el que está definida. Esto es:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \int_y^1 cxy dx dy = \int_0^1 cy \left(\frac{x^2}{2} \right)_y^1 dy = \\ &= \int_0^1 cy(0,5 - \frac{y^2}{2}) dy = 0,5c \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^1 - 0,5c \left(\frac{y^4}{4} \right)_0^1 = \frac{c}{8} \end{aligned}$$

de donde, $c = 8$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x 8xy dy = 8x \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^x = 4x^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c)

$$E(X) = \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3 dx = 4 \left(\frac{x^5}{5} \right)_0^1 = \frac{4}{5}$$

d)

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 1) &= \int_0^{0,5} \int_y^{1-y} 8xy dx dy = \int_0^{0,5} 8y \left(\frac{x^2}{2} \right)_y^{1-y} dy = \\ &= \int_0^{0,5} 8y \left[\frac{(1-y)^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right] dy = \\ &= 4 \int_0^{0,5} y dy - 8 \int_0^{0,5} y^2 dy = 4 \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^{0,5} - 8 \left(\frac{y^3}{3} \right)_0^{0,5} = \\ &= 0,5 - 0,333 = 0,1666 \end{aligned}$$

- e) En el triángulo en el que está definida la v.a. (X, Y) pintamos la recta $X = 0,5$. Si estamos sobre dicho segmento de recta, estamos siempre en el semiplano $X + Y \leq 1$, luego la probabilidad condicionada es la del suceso seguro, que es 1. Algebráicamente

$$P(X + Y \leq 1|X = 0,5) = P(Y \leq 0,5|X = 0,5)$$

y para calcular esta probabilidad condicionada, tenemos que obtener la función de densidad de la distribución condicionada de $Y|X = 0,5$, que es:

$$f(y|x = 0,5) = \frac{f(0,5, y)}{f_X(0,5)} = \frac{8 \cdot 0,5 \cdot y}{4 \cdot 0,5^3} = 8y$$

si $0 \leq y \leq 0,5$, y cero en otro caso. Entonces:

$$P(Y \leq 0,5|X = 0,5) = \int_0^{0,5} 8y dy = 8 \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^{0,5} = 1$$

25. a)

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathfrak{R}} f(x, y) dx = \int_y^1 k e^{x+y} dx = k e^y [e^x]_y^1 \\ &= k e^y (e - e^y) = k(e^{y+1} - e^{2y}), \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y > 0,5) &= 1 - P(Y \leq 0,5) = 1 - \int_0^{0,5} k(e^{y+1} - e^{2y}) dy \\ &= 1 - k \left[e^{y+1} - \frac{e^{2y}}{2} \right]_0^{0,5} = 1 - k(e^{1,5} - 0,5e - e + 0,5) \approx 0,388 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathfrak{R}} f(x, y) dy = \int_0^x k e^{x+y} dy = k e^x [e^y]_0^x \\ &= k e^x (e^x - 1) = k(e^{2x} - e^x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Y|X=x_0}(y) &= \frac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \frac{k e^{x_0+y}}{k(e^{2x_0} - e^{x_0})} \\ &= \frac{e^{x_0} e^y}{e^{x_0}(e^{x_0} - 1)} = \frac{e^y}{e^{x_0} - 1}, \quad 0 < y \leq x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y < 0,5|X = 0,75) &= \int_{-\infty}^{0,5} f_{Y|X=0,75}(y) dy = \int_0^{0,5} \frac{e^y}{e^{0,75} - 1} dy \\ &= \frac{1}{e^{0,75} - 1} [e^y]_0^{0,5} = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,75} - 1} \approx 0,5807 \end{aligned}$$