

ESTADÍSTICA Y ANÁLISIS DE DATOS

Práctica del Tema 4. Rudimentos de probabilidad

1. Simplifica las siguientes expresiones:

- a) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
- b) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$.
- c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.
- d) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B^c)$.

2. Se arrojan dos dados regulares (con probabilidad de cara = $\frac{1}{6}$) al aire. Denotamos por A y B los siguientes sucesos.

A : suma de los puntos obtenidos impar

B : aparece al menos un tres.

Describir textualmente los siguientes sucesos:

- a) $(A \cup B)$
- b) $(A \cap B)$
- c) $(A - B)$
- d) $(A \cap B^c) \cup A^c$

3. Hallar la probabilidad de que al lanzar al aire un dado regular, salga:

- a) El resultado 2
- b) Un resultado par.
- c) Un número menor que 5.

4. Después de examinar un sistema de producción, se han llegado a sacar las siguientes probabilidades: *Probabilidad de defecto de medida*: $P(Dm) = 0,05$, *Probabilidad de defecto de calidad*: $P(Dc) = 0,04$, *Probabilidad de ambos defectos*: $P(Dm \cap Dc) = 0,003$. Calcula la probabilidad de que una pieza sea defectuosa.

5. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando tres monedas regulares al aire, se obtengan dos caras y una cruz?

6. En una ciudad hay dos mayoristas de productos cosméticos. El mayorista A suministra al 70 % de las farmacias y el B al 50 %. Hay un 20 % de farmacias que no adquieren productos cosméticos. Si visitamos una farmacia al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea surtida por A ?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea surtida por A y B ?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea surtida por A y no por B ?

7. La probabilidad de que un hombre viva dentro de 25 años es $\frac{3}{5}$. La probabilidad de que su esposa viva dentro de 25 años, independientemente de lo que le ocurra a su marido, es $\frac{2}{3}$. Hallar la probabilidad de que:

- a) ambos vivan dentro de 25 años.
- b) viva sólo la mujer.
- c) viva al menos uno de los dos.

8. En una empresa de tornillos, se sabe que del total de la producción hay siempre una fracción de ellos (p en tanto por uno) que son defectuosos. En su servicio de control de calidad se inspeccionan 10 piezas de cada lote de tornillos, rechazando el lote si hay 2 tornillos o más defectuosos. Calcular la probabilidad de aceptar un lote. Se supone independencia en la distribución de probabilidad de los errores en la producción de tornillos.

9. Al final de una semana, una empresa comprueba sus existencias en el almacén y ve que tiene 400 unidades de cierto producto, con una demanda semanal aleatoria, de la que se ha estimado la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(\text{demanda semanal de 100 unidades}) = 0,1$$

$$P(\text{demanda semanal de 200 unidades}) = 0,4$$

$$P(\text{demanda semanal de 300 unidades}) = 0,3$$

$$P(\text{demanda semanal de 400 unidades}) = 0,2$$

Los suministros tardan en llegar 2 semanas y durante ese tiempo la empresa no podrá reponer existencias. Calcula la probabilidad de que la empresa no pueda atender su pedidos (satisfacer la demanda), en esas dos semanas, teniendo en cuenta que la demanda se comporta de manera independiente en esas dos semanas.

10. Sean A y B dos sucesos independientes. ¿Son independientes los sucesos A^c y B ? ¿y los sucesos A^c y B^c ? Demuéstralo.

11. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 8 puntos al lanzar una vez tres dados regulares?

12. Tenemos dos monedas, una regular, A , esto es: $P(\text{cara}) = 0,5 = P(\text{cruz})$; y otra irregular, B , tal que $P(\text{cara}) = 0,8$ y $P(\text{cruz}) = 0,2$.

a) Si tiramos sucesivamente cada una de las dos monedas,

- 1) Calcula la probabilidad de que salgan dos caras.
- 2) Calcula la probabilidad de que salga exactamente una cara.
- 3) Calcula la probabilidad de que salga al menos una cruz.

b) Si tiramos sucesivamente cada una de las dos monedas, y nos dicen que ha salido exactamente una cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido en la moneda regular?

c) Si tiramos la moneda irregular 5 veces seguidas,

- 1) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 caras y 2 cruces?

- 2) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cruz?
13. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,2$, $P(B) = p$ y $P(A \cap B) = 0,10$.
- Calcula en función de p , la probabilidad $P(A \cup B)$.
 - Calcula el valor de p para que los sucesos A y B sean independientes.
14. Un individuo tiene un dado irregular tal que $P(1) = P(2) = P(4) = P(6) = 0,2$, mientras que $P(3) = P(5) = 0,1$.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado par en un lanzamiento?
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un resultado par en dos lanzamientos?
 - Si se ha obtenido un resultado par en un primer lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener resultado par en los dos siguientes lanzamientos?
 - Resuelve los apartados anteriores para el caso en el que el dado sea regular.
15. Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{8}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.
- Calcula $P(A|B)$
 - Calcula $P(A|B^c)$
16. Disponemos de tres urnas. La urna U_1 contiene tres bolas negras y dos blancas, la urna U_2 dos bolas negras y tres blancas, y la urna U_3 cinco bolas negras y cinco blancas.
- Lanzamos un dado al aire. Si sale 1, escogemos la urna U_1 . Si sale 2 ó 3 ó 4, escogemos la urna U_2 . Si sale 5 ó 6 escogemos la urna U_3 . Después extraemos una bola de la urna escogida.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?
 - Si se ha extraído una bola y ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que esa bola se haya extraído de la urna U_1 ?
 - Si repetimos el proceso 4 veces con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de que no salga ninguna negra en las 4 repeticiones?
17. De una baraja de 40 cartas se extraen consecutivamente y sin reemplazamiento dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?
18. De un lote de 10 artículos iguales en apariencia, se sabe que 8 son correctos. Se eligen 3 artículos consecutivamente y sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sean correctos?
19. En una Facultad el 80 % de mujeres y el 70 % de varones han aprobado la asignatura E . El 60 % del alumnado es masculino. Se elige a una persona al azar del total de la matrícula y se pide calcular:
- La probabilidad de que tenga aprobada la asignatura E
 - Sabiendo que ha aprobado E , ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

20. En un sistema de producción sólo hay piezas de bronce, aluminio y latón y todas ellas pueden tener algún defecto. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa según el material con el que está fabricada es la siguiente:
- Si es bronce, la probabilidad de ser defectuosa es 0,01. Si es de aluminio, la probabilidad de ser defectuosa es $\frac{1}{130}$, mientras que si es de latón, dicha probabilidad es de $\frac{1}{80}$.
- Además, el 30 % de la producción es de bronce, el 15 % es de latón y el resto de aluminio. Calcular:
- La probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.
 - Se ha examinado una pieza al azar y ha resultado ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de bronce?
21. El partido en el gobierno de una determinada comunidad autónoma quiere someter a referéndum una cuestión de interés para los ciudadanos. Cada persona censada puede votar a favor (VF), en contra (VC) o abstenerse (VA). A priori, se estima que $P(VF) = 0,6$, $P(VC) = 0,3$ y $P(VA) = 0,1$. Para obtener información más precisa se realiza un sondeo previo al referéndum en el que cada persona opina a favor (OF) o en contra (OC) de la propuesta. Se sabe entonces que las probabilidades de opinar a favor cuando se vota a favor, en contra o se abstiene son de 0,8, 0,2 y 0,5 respectivamente. Calcular la probabilidad de que una persona tomada al azar:
- opine a favor y vote en contra de la propuesta.
 - opine a favor de la propuesta.
 - dado que ha opinado a favor, vote a favor de la propuesta.
 - dado que ha opinado a favor, vote en contra de la propuesta.
22. Una empresa produce motores con una probabilidad $P(D) = 0,3$ de ser defectuosos. Antes de venderlos los somete a un control de calidad que conduce a resultados erróneos en un 5 % de los casos, tanto con motores correctos como con defectuosos. La empresa sólo vende aquellos motores que pasan el control de calidad. Calcula la probabilidad de:
- vender un motor cualquiera de la producción.
 - que un motor vendido sea defectuoso.
 - que un motor no vendido sea correcto.
23. Tres máquinas A , B y C producen respectivamente en un día 60, 30 y 10 piezas iguales. Las probabilidades de producir piezas defectuosas son 0,10, 0,20 y 0,40 respectivamente. La producción es mezclada al final del día, y de ella se saca una pieza al azar que resulta ser correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha pieza haya sido producida por la primera máquina?
24. Un estudiante tiene un bote de 10 bolígrafos iguales en apariencia, de los cuales 4 son azules, 4 son rojos y 2 son negros. Sabemos que hay uno de cada color que está gastado y no escribe. Los demás funcionan bien. El estudiante coge un bolígrafo al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul y funcione bien?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que funcione mal?
- c) Si sabemos que el bolígrafo escogido escribe bien, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de un bolígrafo azul?
- d) Cuando el primer bolígrafo que coge el estudiante está gastado, él lo tira y coge otro. El estudiante coge un bolígrafo, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que coger un segundo bolígrafo y de que éste sea rojo?
25. Consideremos tres dados regulares en un cubilete. Uno de ellos es azul y los otros dos blancos. Al arrojarlos al aire se obtienen puntuaciones que no nos permiten ver.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el dado azul proporcione una puntuación igual a 3?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de los dados blancos proporcionen una puntuación menor que la del dado azul?
- c) Sabiendo que los dos dados blancos han proporcionado puntuación menor que la del dado azul, ¿cuál es la probabilidad de que este último haya proporcionado una puntuación igual a 3?
26. Tenemos dos urnas U_1 y U_2 . La primera contiene cinco bolas negras y cuatro blancas. La segunda seis bolas blancas y tres negras. Se traslada, sin ver su color, una bola de la urna U_1 a la U_2 . Acto seguido se extrae de esta última una bola que resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola trasladada también fuera negra?
27. Se dispone de dos urnas, la primera con 7 bolas blancas y 3 negras y la segunda con 3 bolas blancas y 6 negras. Se extrae al azar una bola de la primera urna y se introduce en la segunda. De esta última se saca, al azar, una bola. Calcular:
- a) Probabilidad de que la última bola sea blanca.
- b) Si se sabe que la bola extraída de la segunda urna ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola transferida también fuese blanca?
- c) Supongamos que son dos bolas las que al azar y sucesivamente se extraen de la primera urna y se introducen en la segunda. De ésta sólo se extrae una bola que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que de la primera urna se haya extraído sólo una bola blanca?
28. La urna A contiene 10 bolas rojas y 5 blancas, y la urna B contiene 10 bolas rojas y 10 blancas. Dos bolas son escogidas al azar y sin reemplazo de la urna A y transferidas a la urna B . Dos bolas son entonces escogidas, al azar y sin reemplazo, de la urna B .
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas escogidas de la urna B sean blancas?
- b) Si se sabe que las dos bolas escogidas de la urna B son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas transferidas de la urna A a la B fuesen rojas?

29. Seis gatos en una casa se proponen cazar un único ratón que vive en ella. Deciden intentarlo por turno, un día cada uno. La probabilidad de que uno de ellos capture al ratón, dado que no lo ha hecho ninguno de los precedentes, es de $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de que el ratón sobreviva tras haber consumido cada gato su turno?
30. Tres señores depositan su sombrero al entrar en una sala. Al salir cogen su sombrero al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno coja su sombrero?

Soluciones de los ejercicios. Práctica 4

1. a) A
b) $A \cap B$
c) $B \cup (A \cap C)$
d) $A - B = A \cap B^c$
2. a) $A \cup B$: Se obtiene al menos un tres o suma impar de puntos.
b) $A \cap B$: Se obtiene al menos un tres y la suma total de puntos es un número impar.
c) $A - B$: Se obtiene una suma impar de puntos pero ningún tres.
d) $(A \cap B^c) \cup A^c$: Se obtiene una suma impar sin ningún tres, o una suma par.
3. a) $P(2) = \frac{1}{6}$.
b) $P(\text{par}) = \frac{1}{2}$
c) $P(n^\circ. \text{ menor que } 5) = \frac{2}{3}$.
4. $P(\text{defectuosa}) = 0,087$.
5. $P(\text{dos caras y una cruz}) = 0,375$.
6. a) $P(A) = 0,7$.
b) $P(A \cap B) = 0,4$.
c) $P(A \cap B^c) = 0,3$.
7. a) $P(H_v \cap M_v) = P(H_v)P(M_v) = \frac{3}{5} \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$.
b) $P(\overline{H_v} \cap M_v) = P(\overline{H_v})P(M_v) = (1 - \frac{3}{5}) \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$.
c) $P(H_v \cup M_v) = P(H_v) + P(M_v) - P(H_v \cap M_v) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{13}{15}$.
8. $(1 - p)^{10} + 10p(1 - p)^9$
9. $P(\text{no poder satisfacer la demanda}) = 1 - 0,31 = 0,69$
10. a) $P(A^c \cap B) = P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B)P(A^c)$. Por tanto, los sucesos A^c y B son independientes.
b) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] = [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c)P(B^c)$. Por tanto, los sucesos A^c y B^c son independientes.
11. $p = 0,09722$
12. $P(C_A) = 0,5 = P(+_A)$. $P(C_B) = 0,8$ y $P(+_B) = 0,2$
 - a) 1) $P(\text{dos caras}) = P(C_A \cap C_B) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$

$$2) P(\text{una cara}) = P(C_A \cap +_B) + P(+_A \cap C_B) = 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$3) P(\text{al menos una cruz}) = P(+_A \cap +_B) + P(C_A \cap +_B) + P(+_A \cap C_B) = 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,1 + 0,1 + 0,4 = 0,6$$

b)

$$\begin{aligned} P(C_A \cap +_B | \text{una cara}) &= \frac{P(C_A \cap +_B \cap \text{una cara})}{P(\text{una cara})} = \\ &= \frac{P(C_A \cap +_B)}{P(\text{una cara})} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5} = 0,2. \end{aligned}$$

ya que del apartado a2) tenemos que $P(C_A \cap +_B) = 0,5 \cdot 0,2$ y $P(\text{una cara}) = 0,5$.

c) Si tiramos 5 veces la moneda irregular, B :

$$1) P(\text{obtener 3 caras}) = \binom{5}{3} 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 10 \cdot 0,04 \cdot 0,512 = 0,2048$$

$$2) P(\text{obtener al menos una cruz}) = 1 - P(\text{ninguna cruz})$$

$$P(\text{ninguna cruz}) = P(\text{cinco caras}) = 0,8^5 = 0,32765.$$

$$\text{Entonces } P(\text{obtener al menos una cruz}) = 1 - 0,32765 = 0,6723.$$

$$13. a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + 0,10$$

b) Decimos que dos sucesos A y B son independientes si y sólo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Luego:

$$0,10 = 0,20 \cdot p$$

$$p = 0,5$$

14. Denotemos por P , al suceso: sale un número par en un lanzamiento:

$$a) P(P) = P(2 \cup 4 \cup 6) = 3 \cdot 0,2 = 0,6$$

b) Sea B , el suceso: sale al menos un resultado par en dos lanzamientos y sea I , el suceso: sale un resultado impar en un lanzamiento. Entonces:

$$P(B) = 1 - P(I_1 \cap I_2) = 0,84$$

c)

$$P(P_2 \cap P_3 | P_1) = \frac{P(P_1 \cap P_2 \cap P_3)}{P(P_1)} = P(P_2) \cdot P(P_3) = 0,6^2 = 0,36$$

d) En el caso de que el dado sea regular, entonces:

$$1) P(P) = 0,50$$

$$2) P(B) = 0,75$$

$$3) P(P_2 \cap P_3 | P_1) = 0,25$$

15. a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{10} = 0,80$$

b)

$$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A)P(A)}{P(B^c)} = \frac{[1 - P(B|A)]P(A)}{P(B^c)} = \frac{\frac{26}{40}}{\frac{7}{8}} = \frac{26}{35} = 0,7429$$

16. a)

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N|U_1) \cdot P(U_1) + P(N|U_2) \cdot P(U_2) + P(N|U_3) \cdot P(U_3) = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{6} = \\ &= \frac{7}{15} = 0,4667 \end{aligned}$$

b)

$$P(U_1|N) = \frac{P(N|U_1) \cdot P(U_1)}{P(N)} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{7}{15}} = 0,2143$$

c)

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = [1 - P(N)]^4 = [1 - (7/15)]^4 = (8/15)^4 = 0,0809$$

17. $P(\text{dos ases}) = 0,0076$.

18. $P(\text{tres artículos correctos}) = 0,466$.

19. a) $P(E) = 0,74$.

b) $P(M|E) = 0,432$.

20. a) $P(D) = 0,00911$.

b) $P(B|D) = 0,3293$.

21. $P(VF) = 0,6$, $P(VC) = 0,3$ y $P(VA) = 0,1$.

$P(OF|VF) = 0,8$, $P(OF|VC) = 0,2$ y $P(OF|VA) = 0,5$.

a) $P(OF \cap VC) = P(VC) \cdot P(OF|VC) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$.

b)

$$\begin{aligned} P(OF) &= P(VC) \cdot P(OF|VC) + P(VF) \cdot P(OF|VF) + P(VA) \cdot P(OF|VA) = \\ &= 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,59. \end{aligned}$$

c)

$$P(VF|OF) = \frac{P(OF|VF) \cdot P(VF)}{P(OF)} = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,59} = 0,8135$$

d)

$$P(VC|OF) = \frac{P(OF|VC) \cdot P(VC)}{P(OF)} = \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,59} = 0,1017$$

22. $P(D) = 0,3$, $P(C) = 0,7$, $P(DC|D) = P(DD|C) = 0,05$, $P(DD|D) = P(DC|C) = 0,95$.

a) $P(V) = P(DC) = P(DC|C)P(C) + P(DC|D)P(D) = 0,95 \cdot 0,7 + 0,05 \cdot 0,3 = 0,68$.

b) $P(D|V) = P(D|DC) = \frac{P(DC|D)P(D)}{P(DC)} = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,68} = 0,022$.

c) $P(C|NV) = P(C|DD) = \frac{P(DD|C)P(C)}{P(DD)} = \frac{0,05 \cdot 0,7}{1 - 0,68} = 0,109375$.

23. d : defectuosa, c : correcta. $P(A|c) = 0,6428$.

24. M : el bolígrafo funciona mal.

B : el bolígrafo funciona bien.

R : el bolígrafo es rojo. $P(R) = \frac{4}{10}$

A : el bolígrafo es azul. $P(A) = \frac{4}{10}$

N : el bolígrafo es negro. $P(N) = \frac{2}{10}$

$P(M|A) = P(M|R) = \frac{1}{4}$. $P(M|N) = \frac{1}{2}$.

a) $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$

b) $P(M) = \frac{3}{10}$

c) $P(A|B) = \frac{3}{7}$

d) $R \cap M$: boli rojo y escribe mal. $R^c \cap M$ boli no rojo y escribe mal. R_2 segundo boli es rojo.

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_2 \cap M_1) = P(R_2|R \cap M)P(R \cap M) + P(R_2|R^c \cap M)P(R^c \cap M) = \\ &= \frac{3}{9} \frac{1}{10} + \frac{4}{9} \frac{2}{10} = 0,1222 \end{aligned}$$

25. A : dado azul. B : dado blanco

a) $P(A = 3) = \frac{1}{6}$

b) $P[(B_1 < A) \cap (B_2 < A)] = 0,2546$

c) $P[A = 3|(B_1 < A) \cap (B_2 < A)] = 0,07273$

26. $p = \frac{20}{32} = 0,625$

27. a) Denotemos por B_2 , al suceso: sale bola blanca de la segunda urna. Entonces:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) = \\ &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{37}{100} = 0,37 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(B_1|B_2) &= \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)} = \\ &= \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10}}{0,37} = \frac{28}{37} = 0,7567 \end{aligned}$$

c) Denotemos por $1b$ al suceso: extraemos una bola blanca de primera urna. Entonces:

$$\begin{aligned} P(1b) &= P(B_1 \cap N_1) + P(N_1 \cap B_1) = \\ &= P(N_1)P(B_1|N_1) + P(B_1)P(N_1|B_1) = \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{42}{90} \end{aligned}$$

Denotemos por B_2 al suceso: extraemos bola blanca de la segunda urna. Por el teorema de la probabilidad total, y sabiendo que hay tres posibilidades para el tránsito de dos bolas de la primera a la segunda urna, que son: $1b$ (una blanca), $2b$ (dos blancas) y $2n$ (dos negras), tenemos:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap 1b) + P(B_2 \cap 2b) + P(B_2 \cap 2n) = \\ &= P(B_2|1b)P(1b) + P(B_2|2b)P(2b) + P(B_2|2n)P(2n) = \\ &= \frac{4}{11} \cdot \frac{42}{90} + \frac{5}{11} \cdot \frac{42}{90} + \frac{3}{11} \cdot \frac{6}{90} = \frac{396}{990} \end{aligned}$$

Luego la probabilidad que nos piden, a partir de la fórmula de Bayes:

$$P(1b|B_2) = \frac{P(B_2|1b)P(1b)}{P(B_2)} = \frac{168}{396}$$

28. Urna A: 10R y 5B. Urna B: 10R y 10B.

a) En el tránsito de las dos bolas de A a B, pueden darse tres situaciones que constituyen una partición:

$$S1: \text{ dos bolas rojas. } P(S1) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{21}$$

$$S2: \text{ dos bolas blancas. } P(S2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

$$S3: \text{ una bola roja y una blanca. } P(S3) = 2 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{10}{21}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(B1 \cap B2) &= P(B1 \cap B2|S1)P(S1) + P(B1 \cap B2|S2)P(S2) + P(B1 \cap B2|S3)P(S3) \\ &= \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{9}{21} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{2}{21} + \frac{11}{22} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{10}{21} = 0,224 \end{aligned}$$

$$b) P(S1|B1 \cap B2) = 0,3727$$

29. A_1 = sobrevivir tras 1 día de caza. $P(A_1) = 5/6$. A_2 = sobrevivir tras 2 días de caza. $P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = (5/6)^2$.

Del mismo modo $P(A_6) = (5/6)^6$.

30. Sea el suceso A_i : el señor i coge exactamente su sombrero, $i = 1, 2, 3$. $P(A_i) = 1/3$

$$P(\text{ninguno coja su sombrero}) = 1 - P(\text{alguno coja su sombrero}) = 1 - P(\cup_{i=1}^3 A_i) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)].$$

Además, la probabilidad de que dos señores cualesquiera cojan ambos su sombrero es:

$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ y hay 3 posibles parejas. La probabilidad de que los tres cojan sus sombreros es:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

Entonces,

$$P(\text{ninguno coja su sombrero}) = 1 - [1 - 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$