

E

STATISTIKARAKO SARRERA. ARIKETAK

Estatistika deskribatzailea eta
datu anizkoitzen analisisa

Plangintza berriei egokitua

Karmele Fernandez
Jesus Orbe
Marian Zabia

ESTATISTIKARAKO SARRERA. ARIKETAK

Estatistika deskribatzailea eta
datu anizkoitzen analisisia

Plangintza berriei egokitua

Karmele Fernandez
Jesus Orbe
Marian Zubia

© Karmele Fernandez, Jesus Orbe, Marian Zubia

© Udako Euskal Unibertsitatea

ISBN: 84-86967-80-5

Lege-gordailua: BI-353-97

Inprimategia: RGM Servicio de Impresión, Padre Larramendi 4. BILBO

Azaleko diseinua: Iñigo Ordozgoiti

Banatzaileak: UEU. General Concha 25, 6. BILBO telf. 4217145

Zabaltzen: Igerabide, 88 DONOSTIA

AURKIBIDEA

<i>HITZAURREA</i>	IX
<i>1. EZAUGARRI ESTATISTIKO BAKUNAK</i>	1
ADIERAZBURUAK	1
Maiztasun-banaketak	
Taulak	
Adierazpide grafikoak	
Momentuak	
Balio tipiko edo estatistikoak	
Aldagai-aldaketa	
Zentratze eragiketa	
Tipifikazio edo Standardizazioa	
Kontzentrazio-neurketak	
EBAZPIDEAK	14
BESTE ADIERAZBURU BATZU	38
<i>2. EZAUGARRI ESTATISTIKO BIKOITZAK</i>	47
ADIERAZBURUAK	47
Maiztasun-banaketak	
Adierazpide grafikoak	
Taula baten dependentzia edo independentzia	
Momentuak	
Koerlazio koefizientea	
Aldagaien aldaketak	
EBAZPIDEAK	52
BESTE ADIERAZBURU BATZU	59

3. KOERLAZIOA ETA ERREGRESIOA	67
ADIERAZBURUAK	67
Batezbestekoaren erregresioa	
Erregresio lineala	
Erregresio polinomikoa	
koerlazio partziala	
EBAZPIDEAK	83
BESTE ADIERAZBURU BATZU	103
4. ZENBAKI INDIZEAK	135
ADIERAZBURUAK	135
Indize sinpleak	
Indize konplexuak	
• Ponderaziorik gabeko indize konplexuak	
Batezbesteko aritmetiko sinplearen metodoa	
Batezbesteko agregatu sinplearen metodoa	
• Indize konplexu ponderatuak	
Laspeyres-en indizea	
Paasche-ren indizea	
Fisher-en indizea	
EBAZPIDEAK	142
BESTE ADIERAZBURU BATZU	151
5. DESKRIBAPEN ESTADISTIKOEN ADIERAZPIDE GEOMETRIKOAK	157
ADIERAZBURUAK	157
Indibiduen eta aldagaien puntu-hodeia	
Zentratze, tipifikatze eta normatze eragiketak hodei bakoitzean	
Bi aldagaien arteko posizio erlatiboa. Koerlazioa	
Erregresio bakuna aldagai estatistikoaren espazioan	
EBAZPIDEAK	159

6. OSAGAI NAGUSIZKO ANALISIA	163
ADIERAZBURUAK	163
Baterako inertziaren deskonposaketa grabitate-zentrutik pasatzen den edozein zuzenarekiko	
Doikuntza ortogonalaren zuzena	
Trantsizio erlazioak	
Aurkezpen grafikoa	
Osagai nagusizko analisia	
Analisi zentratua	
Analisi normatua	
Aldagaien hodeia	
Indibiduen hodeia	
Baterako aurkezpen grafikoa	
EBAZPIDEAK	178
BESTE ADIERAZBURU BATZU	192
<i>GALDERA-SORTAK</i>	213
ERANTZUNAK	303

HITZAURREA

Eskuartean daukazun liburua, Sarrikoko Ekonomi eta Enpresa Zientzien Fakultatean ESTADISTIKARAKO SARRERA asignaturetan landutako material praktikoa da.

Liburu honen aurretik 1985 eta 1991 urteetan ariketen liburuak argitaratu genituen; bietan plangintza zaharreko ESTADISTIKARAKO SARRERA asignaturaren ariketak biltzen genituen eta bigarrenean Probabilitate Teoria eta Inferentzia Estadistikoaren ariketa batzuk ere bai.

Plangintza berriak suposatu duen estadistikaren birmoldaketa kontutan hartuz eta azken urte hauetan landu dugun materialarekin osotuz liburu hau kaleratzen dugu aipatutako asignaturaren teori-liburuaren osagarri bezala.

Bide batez esan, duela hilabete bat argitaratu dugula Probabilitate Teoria eta Inferentzia Estadistikoaren ariketen liburua *Estatistika I eta Estatistika II* izenpean, plangintza berriaren bi asignatura hauetako material praktikoa delarik.

Bi liburuak, asignatura hauetan irakasle elebidun bezala lan egiten dugunon talde lana dira; baina meritua ez da bakarrik gurea, lan-talde handiago batean gurekin hiru asignaturetan diharduten beste irakasle guztiena ere bada.

Bukatzeko, gure eskerrik beroenak gure kide guztiei eta lan honen prestaketan lagundu diguten UEUko guztiei.

*Karmele Fernandez
Jesus Orbe
Marian Zubia*

1. EZAUGARRI ESTATISTIKO BAKUNAK

ADIERAZBURUAK

1.1. Ondoko taulan, X aldagaiaren banaketa emanik:

x_i :	0	1	2	3
n_i :	2	3	1	5

Atera itzazu:

- 1) 2. ordenako momentu arrunta edo jatorriarekikoa.
- 2) 2. ordenako momentu zentrala edo batezbestekoarekikoa.
- 3) 2. ordenako momentua $x_o = 2$ balioarekiko. Azal itzazu lortutako emaitzak.

1.2. Demagun asmatutako bi herritarako populazio-datuak ditugula:

Adina	ZIMBA		SILDAVIA	
	Gizonezkoak	Emakumezkoak	Gizonezkoak	Emakumezkoak
0-10	200	200	500	500
10-30	100	300	1200	800
30-60	60	100	800	700
60-80	15	25	200	300

- 1) Egin itzazu herri horiei dagozkien populazio-piramideak.
- 2) Konpara itzazu biak, desberdintasunak aipatuz.

1.3. Ondoko taulan herrialde bateko udalen banaketa aurkezten dugu beraien biztanle-kopuruen arabera:

Biztanleak : X	Udal-kopurua: n
$x \leq 10.000$	90
$10.000 \leq x \leq 50.000$	600
$50.000 \leq x \leq 150.000$	300
$150.000 \leq x \leq 450.000$	10

Honakoa eskatzen da:

- 1) Banaketa grafikoki adieraztea.
- 2) Batezbesteko aritmetikoa, mediana, moda, batezbesteko desbidazioa, desbidazio tipikoa eta g_o aldakuntza-koefizientea.

- 1.4. Ondoan, “per capita” errentan eta petrolio-erreserbatan munduko errekor batzuk dituelarik, Pertsiar Golkoan dagoen herri txiki baten estatistika demografikoaren laburpena daukagu.

Adina 1966-XII-31	Biztanleak milakotan	
	Emakumezkoak	Gizonezkoak
0 - 9	70	75
10 - 29	80	130
30 - 49	35	75
50 - 79	15	20

Honakoa eskatzen da:

- 1) Grafikoki adieraztea (histogramak edo piramideak)
- 2) Zentrurako joeraren eta sakabanatzearen neurriak.
- 3) Azal itzazu laburki ateratako emaitzak.

- 1.5. Goi-mailako bi ikastetxetan, ikasleen adinak honela banatzen dira:

Urteak (mailak)	M.E. Ikastetxea	E.F. Ikastetxea
17 - 19	400	750
20 - 25	400	2.000
26 - 37	200	250

Konpara itzazu, histogramen, zentrurako joeraren eta sakabanatzearen balio tipikoen bidez, ikastetxe horiei dagozkien maiztasun-banaketak.

- 1.6. Berrogei ikasle dituen talde batek S asignaturan lortutako kalifikazioak hauek izanik:

4	5	5	2	0	1	7	6	3	2
1	6	7	6	4	5	4	2	3	3
8	7	4	4	3	6	5	9	1	8
3	5	5	4	6	8	5	7	3	4

Honakoa eskatzen da:

- 1) Aurkez ezazu, grafikoki, talde horren kalifikazioen banaketa.
- 2) Atera itzazu batezbesteko aritmetikoa, moda, mediana, bariantza eta aldakuntza-koefizientea.
- 3) Adieraz itzazu laburki lortutako emaitzak.

1.7. Herri bateko burdingintza sektoreko 10 enpresak dituzten faktoriak, hauexek dira:

<u>Enpresak</u>	<u>Faktori kopurua</u>
3 enpresak	1
2 enpresak	2
5 enpresak	3

Honakoa eskatzen da:

- 1) Maiztasun-banaketa hori adierazten duen barra-diagrama.
- 2) Banaketa horren g_0 , g_1 , g_2 koefizienteak; aldakuntza, asimetri eta kurtosi koefizienteak, hain zuzen.
- 3) Lortutako balioen esangura, laburki, adieraztea.

1.8. Ondoko taulan Bizkaitik Karlos II.aren gudetara bere 35 urteko aginte-garaian urtez urte joaten ziren gizaseme kopuruak ikusten ditugu:

200	300	100	100	0
200	0	0	200	0
0	400	0	0	400
0	1.000	300	0	0
0	0	0	0	100
0	300	0	200	200
0	0	100	300	0

Honakoa eskatzen da:

- 1) Maiztasun-banaketaren adierazpide grafikoa.
- 2) Zentrurako joeraren balio ezagunenak.
- 3) Sakabanatze-balio ezagunenak.

1.9. Erosten bateko erosleen gastuak aztertu ondoren, gastuak honela banatu ziren milaka pezetatan:

<u>Gastu-tarteak</u>	<u>Maiztasunak</u>
0 - 4'99	5
5 - 9'99	10
10 - 14'99	14
15 - 19'99	20
20 - 24'99	35
25 - 29'99	15
30 - 34'99	1

Honakoa eskatzen da:

Kalkula itzazu neurri hauek, beren esanahia adieraziz: batezbestekoa, desbidazio tipikoa, aldakuntza-koefizientea eta moda.

1.10. Populazio batean 20 pertsonako lagin bat hartu da. Altuerak neurtu dira eta ondoko emaitzak lortu ditugu:

1'65 - 1'70 - 1'68 - 1'82 - 1'80 - 1'45 - 1'56 - 1'35 - 1'90 - 1'56
1'88 - 1'66 - 1'65 - 1'55 - 1'57 - 1'60 - 1'62 - 1'90 - 1'82 - 1'65

Kalkula itzazu zentrurako joeraren balio tipikoak (batezbestekoa, moda, mediana) eta sakabanatzearenak (bariantza, desbidazio tipikoa eta ibiltartea).

1.11. Talde bat osatzen duten hogeitaz gazteri, proba psikotekniko berezi bat egin zaie, ondoko puntuazio hauek lortu dituztelarik:

91	92	83	80	87	94	91	86	89	94
85	92	90	89	85	86	90	85	87	84

Honakoa eskatzen da:

- 1) Zabalera berdineko 4 unitate ibiltarteaz dauzkaten taldetan sailka itzazu datuak eta lortzen den maiztasun-banaketaren adierazpide grafikoa egin.
- 2) Atera itzazu batezbestekoa, mediana, moda, bariantza, desbidazio tipikoa eta aldakuntza-koefizientea.
- 3) Azal itzazu emaitzak taula argi baten bidez eta balora ezazu, gazte-talde horretaz, emaitza horiek emandako informazioa.

1.12. Ondorengo multzoan, dimentsio geopolitiko berdintsuak dituzten 20 estatuatarako, (N.P.G) Nazio Produktu Gordina/biztanle, aldagai estatistikoa ikertu nahi da.

Ondoko datuak 1981. urterako izanik:

ALEMANIAKO ERREPUBLIKA FEDERALA	11.730 \$
FRANTZIA	9.940 \$
ITALIA	5.240 \$
ESPAINIA	4.340 \$
POLONIA	3.840 \$
VENEZUELA	3.130 \$
JUGOSLAVIA	2.430 \$
TURKIA	1.330 \$
KOLONBIA	1.010 \$
MAROKO	740 \$
PERU	730 \$
NIGERIA	670 \$
FILIPINAK	600 \$

THAILANDIA	590 \$
EGIPTO	460 \$
KENYA	380 \$
UGANDA	290 \$
TANZANIA	270 \$
BIRMANIA	160 \$
ETIOPIA	130 \$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Ondoko bost tarte hauetan taldeka itzazu balioak (0;500), (500;2000), (2000;4000), (4000;8000), (8000;12000) dagokion maiztasun absolutu eta erlatiboen taula osatuz eta ateratzen den banaketa histogramaren bidez grafikoki adieraziz.
- 2) Estima itzazu banaketaren mediana eta moda.
- 3) Kalkula itzazu batezbesteko aritmetikoa, desbidazio tipikoa eta aldakuntza-koefizientea, klase-ordezkaritzat tarteen erdiko puntuak harturik.
- 4) Komenta itzazu laburki, banaketaren asimetria eta soslaia.

1.13. Ondoko taulan, L.H.n diharduten 100 ikasle daude banatuta adinaren arabera.

Adina:	6	7	8	9
Maiztasunak:	35	49	14	2

Honakoa eskatzen da:

Lor itzazu batezbesteko aritmetikoa, mediana eta moda, ondoko bi ikuspuntuak kontutan harturik:

- 1) Adina praktikoki diskretua dela kontsideratzen da.
- 2) Adina ezaugarri jarraia da. Kasu honetan klase-ordezkaritzat, tarteen erdiko puntua hartu behar da.
- 3) Emaitzen irazkina edo komentarioa.

1.14. Banaketa baten a_1 , a_2 , a_3 momentuak ondokoak izanik:

$$a_1 = 10 \quad a_2 = 116 \quad a_3 = 1160$$

Lor itzazu g_0 eta g_1 koefizienteak eta komenta ezazu banaketa horren posizioaz, sakabanatze erlatiboaz eta asimetriaz ikusten duzuna.

- 1.15. 1) Froga ezazu g_1 asimetri koefizientea neurri-unitatearen aldaketarekiko independentea dela.
- 2) Atera ezazu kurtosi koefizientea ondoko banaketarako, bere balioaren esangura azalduz.

x_i	n_i
1	2
2	4
3	5
4	3

1.16. 1) Maiztasun-banaketa baten ondoko momentuak ditugularik:

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 18 \quad m_3 = -905 \quad m_4 = 243$$

Kalkula itzazu bariantza, desbidazio standarda, asimetri eta kurtosi koefizienteak.

Marraz ezazu banaketaren soslaia.

1.17. Aldagai estatistiko baten aurreneko bi momentu arruntak ezagutzen dira:

$$a_1(x) = 40 \quad a_2(x) = 2.500$$

- 1) Lor itzazu bariantza, batezbestekoa eta aldakuntza-koefizientea.
- 2) Beste aldagai estatistiko bat 1) ataleko aldagaiarekin, ondoren azaltzen den transformazioaren bidez erlazionatuta dagoela dakigu:

$$Y = 5X + 100$$

Lor itzazu aldagai berriaren batezbestekoa, bariantza eta aldakuntza-koefizientea.

1.18.- Ikasle batek A eta B asignaturetan ondoko notak lortu ditu: 80 eta 98 puntuak, hurrenez hurren.

A asignaturaren puntuen banaketak, 75 puntu ditu batezbestekoz eta 10 puntu desbidazio tipikoz.

B asignaturaren puntuen banaketak, aldiz, 90 puntu batezbestekoz eta 15 desbidazio tipikoz.

Zein asignaturatan atera du posturik onena?

1.19. Familia batek jolasaldi, atsedenaldi eta aisialdietan egindako gastuak 20.000 pezetakoak dira batezbeste urte guztiko lan-hilabeteetan. Opor-hilabeteetan berriz 2'5 bider gehiago dira.

Bere etxebizitza dagoen auzoan egindako gastuak 15.500 pta/hilabete familia dira batezbeste eta 3.500 pta/hilabete familiako desbidazio tipikoa dago.

Oporrak igarotzen dituen tokian, berriz, balio horiek 42.000 pta eta 7.500 pezetakoak dira hurrenez hurren. Zein toki dago, gastu horien arabera, egoera hobean?

1.20. Ondoan daukagun nomina-zerrendan, “Hileroko ordainketa” aldagaiari dagozkion balioak azaltzen dira 25 langileentzako.

LANGILEA		HILEROKO ORDAINKETA GUZTIRA		
1	ALVILLOS Agirre	Maria Pilar	80.000	pezeta
2	ARRESE Oceja	Emilio	200.000	“
3	BANDAÑA Rodriguez	Crisanto	120.000	“
4	BERNARDO Perez	Antonia	200.000	“
5	CALVO Artazkotz	M. Jose	80.000	“
6	CERCEDA Amulio	Germán	120.000	“
7	CHARLOT Gómez	Luis	40.000	“
8	EGIA Arozena	Enrique	80.000	“
9	FEO González	Fermín	40.000	“
10	FUNOLL Varela	Paula	80.000	“
11	GARIN Frade	Pedro	200.000	“
12	GONZALEZ Navarro	M. Carmen	80.000	“
13	HINOJAL Calvo	Gregorio	120.000	“
14	JUARISTI Eizagirre	Eduarne	80.000	“
15	LIZASO Urkiza	Valentin	320.000	“
16	MAR Herrera	M. Luisa	40.000	“
17	MENDIBE Abasolo	Jenaro	40.000	“
18	NAVARRO Carreño	José Ramón	200.000	“
19	PAVON Mendibe	M. Nieves	120.000	“
20	RASTRILLA Frías	Borja	120.000	“
21	RUEDA Carrizo	Benedicto	120.000	“
22	SANTAMARINA Pascual	Micaela	80.000	“
23	TATO Carreira	Gerardo	80.000	“
24	VALDEMOROS Artesero	Filomena	80.000	“
25	ZABALA Macía	Agustina	80.000	“
		GUZTIRA:	2.800.000	pezeta

Eduarne Juaristi

Bilbo, 1984.eko otsailaren 28an

Honakoa eskatzen da:

- 1) Aldagai horren banaketaren maiztasun absolutu eta erlatiboen taula.
- 2) Banaketa hori errepresentatzen duen barra-diagrama marraztea.
- 3) Ezagutzen diren zentzurako joeraren balio tipikoak.
- 4) Ezagutzen diren sakabanatzearen balio tipikoak.

- 5) 2) atalean lortutako adierazpen grafikoa ikusiz, esan ezazu g_1 , g_2 koefizienteen zeinua zein den.
- 6) Atera itzazu, “hileroko ordainketa” aldagai estatistikoaren balioei (pezetatan emanda) dagozkien balio zentralak eta tipifikatuak.
- 7) Azter ezazu “hileroko ordainketen” kontzentrazio-maila Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizearen bidez.

Komenta ezazu laburki lortutako emaitza.

- 1.21. Laborategi bateko enplegatuak 3 mailatan sailkatuta daude eta 1989ko abenduaren alokairuak ondokoak dira:

	<u>Enplegatuak</u>	<u>Hileroko Alokairuak</u>
Teknikariak	% 10	[190.000;210.000]
Administrariak	% 25	[100.000;125.000]
Langileak	% 65	[125.000;190.000]

Eskatzen da:

- 1) Maiztasun-banaketa adierazpide grafikoa.
 - 2) Kalkula ezazu enpresa horren batezbesteko alokairua eta azter ezazu bere errepresentagarritasuna alokairuen multzoan.
 - 3) Estima ezazu enplegatuen kopuru handienak jasotzen duen alokairua.
 - 4) Komenta ezazu aurreko ataletan banaketari buruz lortu dugun informazioa.
- 1.22. Aldagai diskretu batek $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ balioak hartzen ditu, $n_1 = n_4 = n_5 = 1$, $n_2 = 2$ eta $n_3 = 3$ maiztasunekin. Gainera, $x_i - x_{i-1} = 2 \forall i$.

- 1) Adieraz ezazu banaketa hau grafikoki.
- 2) Azal ezazu batezbesteko aritmetikoa, mediana eta moda, x_1 balioaren funtzioan.
- 3) Aurki ezazu desbidazio tipikoa eta ibiltartea.
- 4) Azal ezazu zergatik batezbestekoa, mediana eta moda x_1 balioaren menpe dauden eta desbidazio tipikoa eta ibiltartea berriz ez.

- 1.23. 5 seme-alaba dituzten 200 familia inkestatu dira beraien seme kopuruari buruz galdetuz. Honako erantzunak lortu dira: %5ak ez du semerik, % 10ak seme bakarra du, %20ak bi seme ditu, %25 hiru seme ditu, % 30ak lau seme ditu eta gainontzekoek 5 seme dituzte.

- 1) Iker ezazu maiztasun banaketa hau posiziozko 3 estatistiko erabiliz eta informazio gehien ematen dutela uste duzun sakabanatzearen hiru estatistiko erabiliz.
- 2) Iker ezazu era berean, grafiko eta estatistiko egokienak erabiliz, 200 familietan seme kopuru totalaren kontzentrazioa.

1.24. Hurrengo taulak fakultate bateko ikasleen banaketa agertzen du altueraren arabera:

x_1	$\% f_i$
[1,50;1,60[20
[1,60;1,70[30
[1,70;1,80[40
[1,80;1,90[10

Eskatzen da:

- 1) Errepresenta ezazu banaketa hau grafikorik egokiena erabiliz.
- 2) Estima ezazu batezbesteko altuera, mediana eta gehien errepikatzen den altuera.
- 3) Kalkula ezazu desbidazio tipikoa eta aldakuntza-koefizientea.
- 4) Zein aldagai aldaketa erabiliko zenuke eragiketak errazteko?
- 5) Hurbil dagoen institutu batean batezbesteko altuera 1,60 m da eta desbidazio tipikoa 15 cm. Ruben Faro, 1,73 m, azalduko fakultatera doa eta bere anaia Ibon, 1,70 m, berriz, institutura. Bietatik zein da altuagoa bere kolektiboarekiko?

1.25. Ezaugarri estatistikoko diskretu batek, ondorengo balioak hartzen ditu: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10$. Badakigu, $f_1 = f_4$ dela eta $g_1(x) = 0$.

- 1) Lor ezazu (\bar{x}) batezbestekoaren balioa. Arrazona ezazu erantzuna.
- 2) Gainera $a_2(x) = 39,7$ dela jakinik, kalkula itzazu f_1 , f_2 , f_3 , f_4 balioak eta marraz ezazu dagokion adierazpide grafikoa.
- 3) $y = (x - 4)/3$ transformazioa kontsideratuz, lor itzazu ondorengo estatistikoak: \bar{y} , S_y^2 eta $g_0(y)$.

1.26. I.M.N.E.B.ren ordezkaritza probintzialeko enplegatuen hileroko soldatak honela banatzen dira:

40	enplegatuk	50.000	pezeta bakoitzak.
100	enplegatuk	100.000	pezeta bakoitzak.
40	enplegatuk	200.000	pezeta bakoitzak.
20	enplegatuk	500.000	pezeta bakoitzak.

Honakoa eskatzen da:

- 1) Barra-diagrama, enplegatuen soldaten arabeko banaketa grafikoki adierazteko.
- 2) Banaketa honen g_0 , aldakuntza-koefizientea, hain zuzen.
- 3) Lorenz-en kurba, soldaten/enplegatuen arteko banaketa aurkezteko.
- 4) GINI-ren indizea, kontzentrazio-maila neurtzeko.

1.27. Talde bateko 10 lagun beraien sarrera-mailen arabera sailkatu dira:

Klase-ordezkariek:	1	4	10
Lagunak:	5	4	1

- 1) Lor ezazu Gini-ren indizea, talde horretan sarreraren kontzentrazioa erakusteko.
- 2) Sarrera txikienak dituzten bi mailak sail batean hartzen baditugu:

Klase-ordezkarria :	x	y
Lagunak :	9	1

Zein dira x eta y-ren balioak Gini-ren indizeak lehenengo balioa eduki dezan?

1.28. Ondoko taulan, Elkarte Anonimo bateko akziodunen artean akzio-tituluen kopurua banaturik daukagu:

<u>Titulu kopurua/Akziodun</u>	<u>Akziodun kopurua</u>
25	4
5	40
1	100
100	1

Honakoa eskatzen da:

- 1) Banaketari dagokion Lorenz-en kurba, kontzentrazioa grafikoki aurkez dezagun.
- 2) Gini-ren indizea, banaketaren kontzentrazioa neur dezagun.

1.29. VD zerbitzu publikoaren sukurtsalaren banaketa estatuko 50 probintzietan, honako hau da:

<u>Sukurtsal kopurua/Probintzia</u>	<u>Probintzi kopurua</u>
1	30
20	3
10	5
5	12

Honakoa eskatzen da:

- 1) Banaketa horren Lorenz-en kurba marraztea.
- 2) Banaketaren Gini-ren indizea kalkulatzeko.

1.30. Ondoko 120 gazteen taldea sailkatuta daukagu, bakoitzaren disko kopuruaren arabera:

<u>Diskoak</u>	<u>Gazteak</u>
1 - 5	20
6 - 12	40
13 - 25	40
26 - 45	20

Honakoa eskatzen da:

- 1) Eraiki ezazu Lorenz-en kurba, talde horretako diskoen banaketa ikustarazteko.
- 2) Kalkula ezazu berari dagokion Gini-ren kontzentrazio-indizea.

1.31. Ondoko taulan, Estatuko probintzien banaketa datorkigu, bakoitzaren produkzio total garbiaren arabera, 1975. urterako eta milioika pezetatan:

<u>Mailak</u>	<u>Batezbesteko produkzioa</u>	<u>Probintzi kopurua</u>
150.000 baino gehiago	400.000	5
50.000 baino gutxiago	30.000	15
Beste gainerakoak	100.000	30

Honakoa eskatzen da:

- 1) Banaketa hau, histograma baten bidez, grafikoki aurkeztea.
- 2) Gini-ren indizea eta Lorenz-en kurbaren bidez 50 probintzietan produkzio totalaren kontzentrazioa aurkeztea.

1.32. Hiri batean bi mila familia bizi dira. Dituzten hileroko sarrerei buruz informazioa jaso da:

900 familiak	150.000-300.000	pta/hilabete jasotzen dute		
800 “	50.000-150.000	“	“	“
200 “	300.000-500.000	“	“	“
100 “	0- 50.000	“	“	“

Honakoa eskatzen da:

- 1) Familien banaketa adierazten duen histograma, “hileroko sarrera” aldagai estatistikoaren arabera.
- 2) Banaketa horren modaren estimazioa.
- 3) Bi mila familietan “hileroko sarrera” totalaren kontzentrazioa adieraziko duen Lorenz-en kurba.
- 4) Kontzentrazio hori neurtuko duen Gini-ren indizea.
- 5) Lortutako emaitzak aztertzea.

1.33. Mboene enpresa afrikarraren hileroko alokairuen banaketa (finkatuta dagoen herriari dagozkion pezetatan) ezagutzen dugu:

10 langilek	400.000 pta
40 langilek	137.500 pta
50 langilek	10.000 pta

Boe-Buba enpresa afrikarraren hileroko alokairuen banaketa ere badugu, finkatuta dagoen herriko pesotan:

20k	150.000	peso
80k	6.250	peso
100ek	15.000	peso

- 1) Konpara ezazu bi banaketen uniformetasun-maila, Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizearen bidez.
- 2) Komenta ezazu laburki lortutako emaitza.

1.34. Estatu konkretu batean eta data zehatz batean ondorengo informazioak hartu ditugu:

- 10 milioi familia ditu.
- Hilean 200.000 pezeta baino gehiago jasotzen duten 2 milioi familiek, estatuko famili errenta totalaren ehuneko 55a hartzen dute.
- Hilean 100.000 pezeta baino gehiago jasotzen duten 4 milioi familiek, estatuko famili errenta totalaren ehuneko 75a jasotzen dute.
- Hilean 50.000 pezeta baino gehiago jasotzen duten 8 milioi familiek, estatuko famili errenta totalaren ehuneko 95a jasotzen dute.

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lorenz-en grafikoa marraztea, famili errentaren banaketa adieraziz.
- 2) Dagokion Gini-ren kontzentrazio-indizea kalkulatzeko.

1.35. Berrehun langile dituzten A eta B enpresetan, langileak eta hileroko alokairuak honela banatzen dira:

A Enpresa		B Enpresa	
Alokairuak	Langileak	Alokairuak	Langileak
4.500	90	6.000	80
2.000	20	7.000	100
8.000	30	10.000	20
3.000	50		
10.000	10		

Honakoa eskatzen da:

- 1) Enpresa bakoitzaren batezbestekoa, mediana, desbidazio standarda eta aldakuntza-koefizientea.
- 2) Enpresa bakoitzaren alokairu-banaketari dagokion Gini-ren kontzentrazio-indizea.
- 3) Konpara itzazu bi alokairu-banaketak lortu dituzun estatistikoen arabera.

1.36. Ekonomialari bate, sektore bereko bi enpresaren alokairuen banaketaren parekatze-ikasketa egin nahi du. Bildutako datuak, hurrengo tauletan sailkatuta aurkezten dira (alokairuak milaka pezetatan adierazita daude):

Alokairua	Langile kop.	Alokairua	Langile kop.
80-100	60	80-150	600
100-130	48	150-250	480
130-175	32	250-300	320
175-225	10	300-350	100
	150		1500

Eskatzen da:

- 1) Banaketa horien aurkezpen grafikoak, zuzenki konparagarriak, berdintasunak edo ezberdintasunak komentatuz.
- 2) Enpresa bakoitzaren batezbesteko alokairua. Zein enpresatan da errepresentagarriagoa batezbesteko alokairua?
- 3) Enpresa bakoitzaren alokairuen kontzentrazio-maila eta bere aurkezpen grafikoa.
- 4) Komenta itzazu lortutako emaitzak.

1.37. UNISID enpresan hamar mila produktorek egiten dute lan. Beraien alokairuak, kategoria desberdinen arabera, honako hauek dira:

Alokairuak 10^3 pezetatan	Produktore kopurua
200 – 400	400
400 – 800	100
40 – 80	6000
80 – 160	3000
160 – 200	500

- 1) Azter ezazu UNISID-eko alokairuen sakabanatzea batezbesteko aritmetikoarekiko.
- 2) Azal ezazu, estatistiko egokiak erabiliz, zein uniformetasun gradu dagoen enpresa honetako alokairu masaren banaketan langileen artean.
- 3) Hobekien ordaindutako langileetako %5ak, nominako zein zati jasotzen du?

1.38. Bi herrialdetan lortutako banaketak, honako hauek dira:

A Herrialdea		B Herrialdea	
Errenta-maila 10 ⁶ pta-tan	Indibiduo kopurua	Errenta-maila 10 ⁶ pta-tan	Indibiduo kopurua
6.5 – 10	40	6.5 – 10	80
4.5 – 6.5	60	4.5 – 6.5	220
2.5 – 4.5	180	2.5 – 4.5	200
1.5 – 2.5	200	1.5 – 2.5	400
0.5 – 1.5	320	0.5 – 1.5	600
Guztira	800	Guztira	1500

Honakoa eskatzen da:

- 1) Baiezta ezazu herrialde bakoitzaren errenta totalaren kontzentrazioa ez dagoela errenta-mailaren menpe, maila horietan sartutako indibiduo kopuruaren menpe baizik. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 2) Irudika ezazu grafikoki, bi banaketetako errenta totalaren kontzentrazio-maila.
- 3) Kontzentrazio-maila kalkulatu bagenu, bi banaketen datuak batera hartuz, nolakoa izango litzateke lortutako balioa, bi aurrenekoen batura edo bien artekoa? Arrazona ezazu, laburki, zure erantzuna.

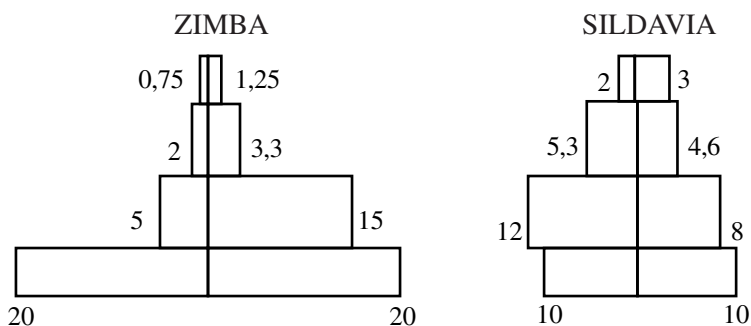
EBAZPIDEAK

1.1. $a_2 = 4,73$; $m_2 = S_x^2 = 1,42$; $a_{2,2} = 1,45$

Bariantza bigarren ordenako momentu zentralik txikiena bezala aurkezten zaigu. Bestalde, m_2 eta $a_{2,2}$ momentuek hurbileko balioak dituzte; $\bar{x} = 1,82$ eta 2 ere hurbilekoak baitira.

1.2.

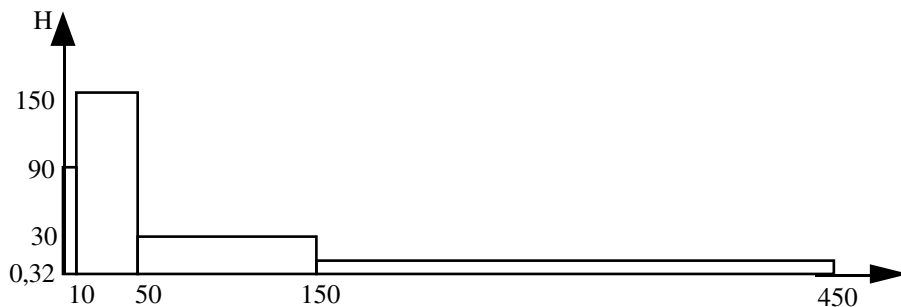
1) Populazio-piramideak



2) ZIMBAren soslaiak jaiotza-tasa garrantzitsua eta gizonezkoen emigrazio handia adierazten du. SILDAVIarenak, ordea, jaiotza-tasa eta hilkortasun txikiagoa. Halaber, gizonezkoen inmigrazio handia adierazten du.

1.3.

1)



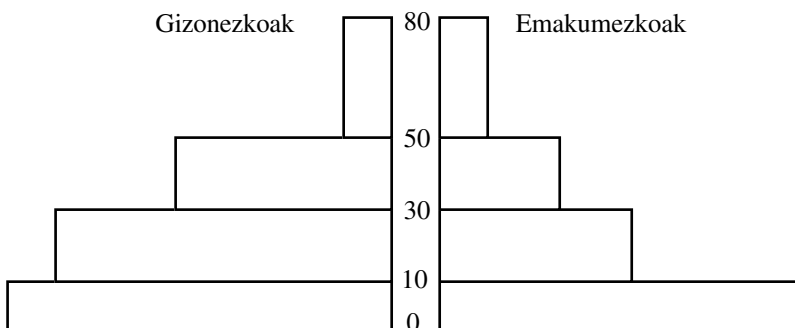
2) \bar{x}	= 51.450 biztanle	D_{Me}	= 28.737 biztanle
Me	= 37.333 biztanle	$D_{\bar{x}}$	= 34.101 biztanle
Mo	= 20.000 biztanle	S_x	= 42.369 biztanle
		g_o	= % 82,4

Banaketa, modabakarra eta eskuinerantz asimetrikoa izanik, $Mo \leq Me \leq \bar{x}$ betetzen da.

Halaber, $D_{Me} \leq D_{\bar{x}} \leq S_x$ betetzen dela ikusten dugu.

1.4.

1) Populazio-piramidea

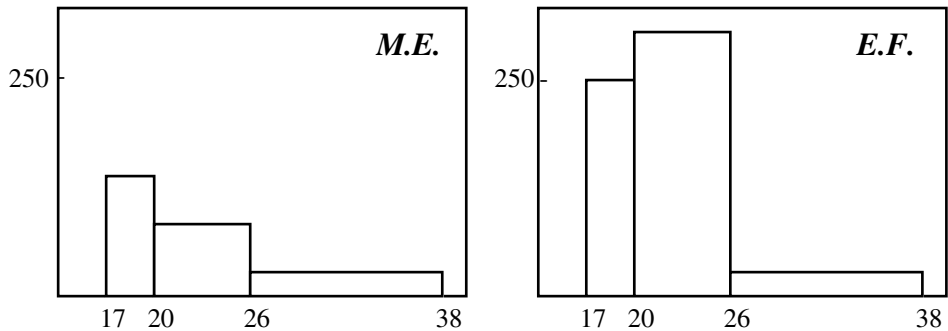


2)

Banaketa	\bar{x}	S_x^2	S_x	g_0
Emakumezkoena	21,67	297,9	17,26	% 80
Gizonezkoena	24,27	271,9	16,49	% 68

3) Zabaleria handia aurkezten du adierazpide grafikoak adin ertaineko gizonezkoen populazioan. Balio tipikoak kontutan hartuz, estatu gaztea dela antzeman daiteke. Halaber, gizonezkoen inmigrazio-maila nabaria da.

1.5.

Histogramak:

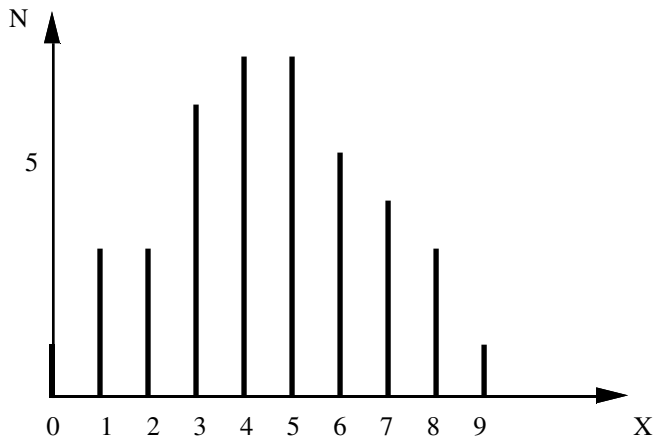
	\bar{x}	Me	Mo	S_x	g_0	R
M.E.	23	21,5	20	4,93	% 21	21
E. F	22,6	22,25	20,465	3,41	% 15	21

Zentrurako joeraren neurriak ez dira oso desberdinak. Bi kasuetan $Mo \leq Me \leq \bar{x}$ daukagu, eskuinerantz asimetrikoak direlako. Sakabanatzearen neurri txikiagoak ditu E.F. ikastetxeak M.E. ikastetxeak baino. Adibide honetan, desbidazio tipikoak konparagarriak dira, batezbesteko aritmetikoak berdintsuak direlako.

Halaber, histogramak ikusirik, E.F. banaketaren sakabanatzearen estatistikoak M.E. banaketarenak baino txikiagoak izango zirela aurrean genezakeen ikastetxe honetan, batezbestekoaren inguruan ikasle gehiago daudela argi ikusten baita.

1.6.

1)



2) $\bar{x} = 4,525$ puntu

Mo = 4,5 puntu

Me = 4,5 puntu

$S^2 = 4,65$ puntu²

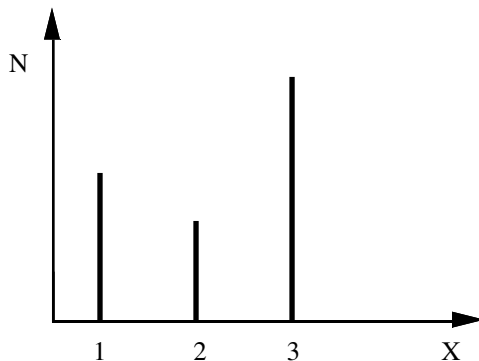
$g_0 = 0,48$

3) Zentrurako joeraren hiru neurriak berdintsuak dira, asimetria txikia duten banaketetan gertatzen den bezala.

Sakabanatzea, batezbestekoarekin parekatuz, ez da handia; % 48koa da.

1.7.

1)



2) $g_0 = \% 39,6$

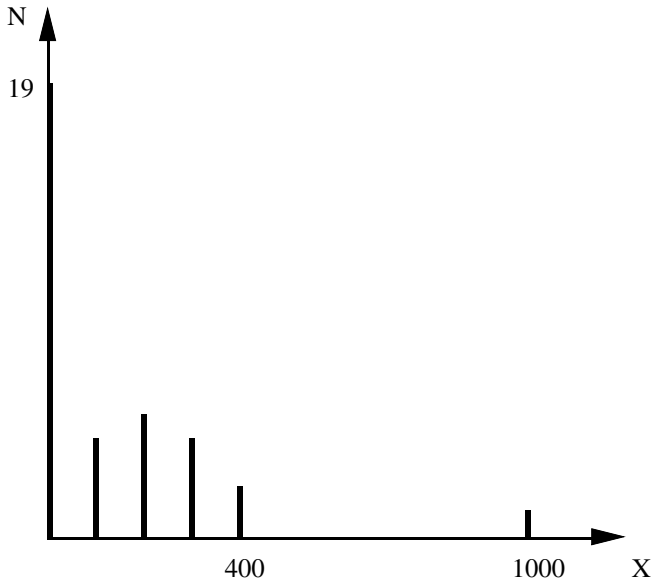
$g_1 = -0,40$

$g_2 = 1,43 - 3 = -1,57$

- 3) Aldakuntza-koefizienteak sakabanatze erlatiboa nahiko txikia dela esaten digu. Bestalde, asimetri eta kurtosi-koefizienteek ezkererantz zertxobait asimetrikoa eta nahiko zapala dela adierazten dute.

1.8.

1)



2) $\bar{x} = 125,7$ bizkaitar/urte $Me = Mo = 0$

$q_1 = 0$ $q_3 = 200$

3) $S_x^2 = 39.150$ bizkaitar²

$S_x = 197,8$ bizkaitar

$D_{Me} = 125,7$ bizkaitar

$D_{\bar{x}} = 142,4$ bizkaitar

$g_0 = 1,5 = \% 156$

$R = 1.000$ bizkaitar

$q_3 - q_1 = 200$ bizkaitar

Diagramak azaltzen duenez, neurri guztiek 126 bizkaitar/urte batezbesteko-arekiko sakabanatze handia erakusten dute.

1.9.

$\bar{x} = 18,45$ mila pezeta (gastuen grabitate-zentrua)

$S_x = 7,06$ mila pezeta (gastu gehienak 11,39 - 25,51 tartekoak dira)

$g_0 = 0,38$ (sakabanatze erlatiboa batezbestekoarekin konparatuz txikia da)

$Mo = 20 + 5 (15/35) = 22,14$ mila pezeta (gasturik errepikatuenak balio hau duela estimatzen da).

1.10.

Zabalera berdineko ondoko sei taldeak hartuz

Klaseak: $]1,30;1,40]$ $]1,40;1,50]$ $]1,50;1,60]$ $]1,60;1,70]$ $]1,70;1,80;]$ $]1,80;1,90]$

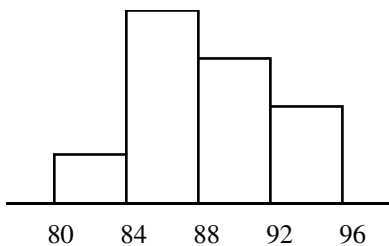
Klase-ordezkarriak:	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85
Maiztasunak:	1	1	5	7	1	5

 $\bar{x} = 1,65$ $M_o = 1,617$ $M_e = 1,64$ $S_x^2 = 0,0195$ $S_x = 0,139$ $R = 1,85 - 1,35 = 0,50$

Informazioa galdu arren, ezaugarria jarraia izanik ariketa taldekatuz ebatzi dugu.

1.11.

1) Klaseak	x_i	n_i
$80 \leq x < 84$	81,5	2
$84 \leq x < 88$	85,5	8
$88 \leq x < 92$	89,5	6
$92 \leq x < 96$	93,5	4



2,3)

Zentrurako joeraren estatistikoak	Sakabanatzearen estatistikoak
$\bar{x} = 87,9$ puntu	$S_x^2 = 13,42$ puntu ²
$M_e = 88$ "	$S_x = 3,66$ puntu
$M_o = 87$ "	$g_o = \% 4,16$

Beste sailkapen batez, emaitzak zertxobait desberdinak izango lirateke.

Taldekatu gabe ebatziz, emaitzak hauek dira:

 $\bar{x} = 88$, $S_x = 13,7$. Logikoa denez, taldekatuta sakabanatzea txikitu egiten da.Horri "taldekatze-ondorioa" deritzogu. g_1 ez da eskatzen, baina, estatistiko honi

dagokionez, lugin interesgarria da. Adierazpide grafikoak asimetria partzialak erakusten dizkigu. Hala ere, ia konpentsatu egiten dira eta emaitza $g_1 = 0,09$ da.

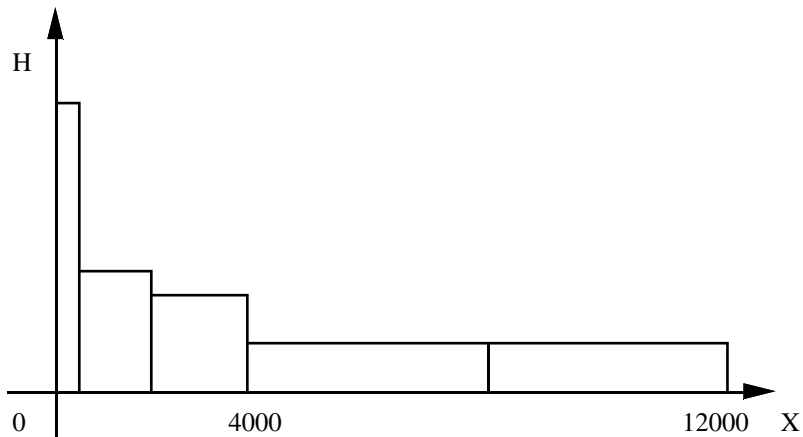
1.12.

1) Klaseak	x_i	n_i	f_i
(0 ; 500)	250	6	0,3
(500 ; 2.000)	1.250	7	0,35
(2.000 ; 4.000)	3.000	3	0,15
(4.000 ; 8.000)	6.000	2	0,10
(8.000 ; 12.000)	10.000	2	0,10

$$2) Me = 500 + 1500 \frac{4}{7} = 1.357\$$$

$$Mo = 500 \frac{2,33}{2,33 + 0} = 500\$$$

(Turkia eta Egipto hurrenez hurren eta gutxi gora-behera)



$$3) \bar{x} = 2.562,5 \$ \text{ (Jugoslaviako balioaren antzekoa)}$$

$$S_x = 2.992 \$ \quad g_0 = 1,17$$

(Datuak taldekatu gabe ebatziz gero, 2.400 \$, 3.189,4 \$ eta 1,33 dira emaitzak)

4) Eskuin alderantz oso asimetrikoa dela ikusten da. Baita oso puntaduna ere modaren altueraren arabera. Horren ondorioz, g_1 eta g_2 nahitaez positiboak izango dira.

1.13.

$$1) \bar{x} = 6,83 \cong 7 \text{ urte} \quad \text{Me} = 7 \text{ urte} \quad \text{Mo} = 7 \text{ urte}$$

2) Klaseak	x_i	n_i	N_i
[6 - 7)	6,5	35	35
[7 - 8)	7,5	49	84
[8 - 9)	8,5	14	98
[9 - 10)	9,5	2	100

$$\bar{x} = 7,33 \text{ urte} \quad \text{Me} = 7,30 \text{ urte} \quad \text{Mo} = 7,28 \text{ urte}$$

- 3) Aldagaia diskretua bezala kontsideratuta, hurbilketa-errorea daukagu. Ikasleen urteak beteberriak balira bezala hartzen ditugu eta balio tipikoen emaitzak benetakoak baino txikiagoak ditugu.

Aldagaia jarraia denez, klase-ordezkariek kontsideratuta grabitate-zentrua 0,5 eskuinerantz desplazatzen da, aldagaiaren balioak 0,5 handiagoak baitira.

1.14.

$$g_0 = 0,4 (\% 40) \quad g_1 = -5$$

Banaketa honen grabitate-zentrua, 10 balioan dago ($\bar{x} = 10$). Sakabanatzea $S_x = 4$ da absolutuki neurturik, hots, balio gehienak (6,14) tartean daude. Erlatiboki neurturik (batezbestekoarekiko) sakabanatzea %40koa da. Ezin esan ordea, handia denik. Asimetria, azkenik, ezker alderantz nabaria da; asimetri koefizientea $g_1 = -5$ baita.

1.15.

$$2) \bar{x} = 2,64 \quad S_x = 0,9715 \quad a_2 = 7,9286$$

$$a_3 = 25,7867 \quad a_4 = 88,5 \quad m_4 = 1,8098$$

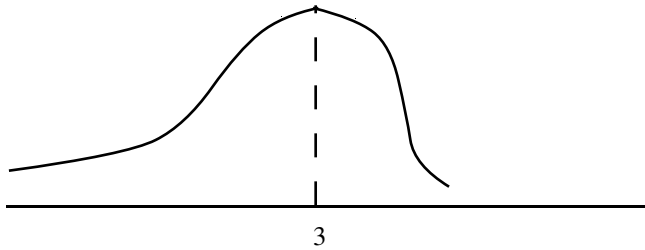
$$g_2 = 2,0317 - 3 = -0,968$$

Ikusten denez, banaketa honen kurtosia banaketa normalarena baino txikiagoa da, hots, zertxobait zapala da.

1.16.

$$1) S_x^2 = 9 \quad S_x = 3 \quad g_1 = \frac{-905}{27} = -33,514 \quad g_2 = \frac{243}{81} = 3$$

Ezkerrerantz argiro asimetrikoa eta kurtosiaren aldetik normala denez, banaketa honen soslaia gutxi gora-behera, ondokoa izango da:



1.17.

$$1) \quad S_x^2 = 9 \quad S_x = 30 \quad g_0(x) = 0,75$$

$$2) \quad \bar{y} = 300 \quad S_y^2 = 22.500 \quad S_y = 150 \quad g_0(y) = 0,50$$

1.18.

$a_i = 80$, $b_i = 98$ puntuak ezin ditugu parekatu, banaketa desberdinetako balioak baitira.

$$t_{a_i} = \frac{80 - 75}{10} = 0,50 < t_{b_i} = \frac{98 - 90}{15} = 0,53$$

Hots, bi balioak zentratu ondoren eta beren desbidazio tipikoekiko neurtuz, konparagarriak dira.

Hau da, balio tipifikatuak parekatuz dakusagunez, posturik onena, B asignaturan atera du.

1.19.

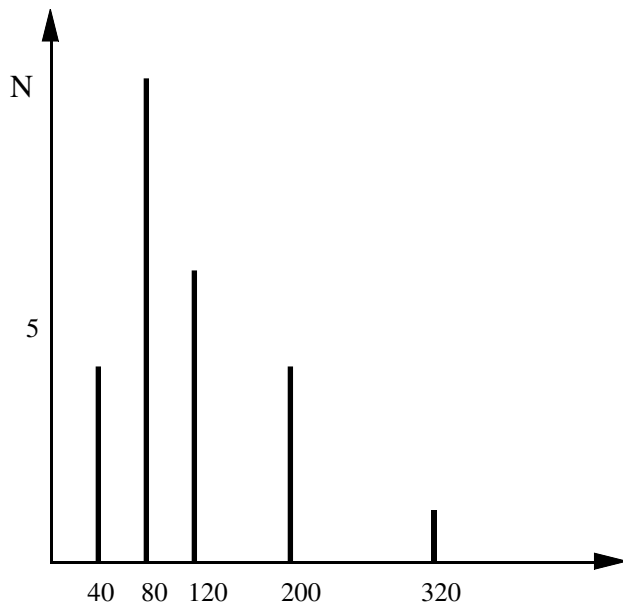
$$T_{x_i} = \frac{20.000 - 15.500}{3.500} = 1,285 > T_{y_i} = \frac{50.000 - 42.000}{7.500} = 1,066$$

Jolasaldi, atsedenaaldi eta aisialdiko kontsumo-maila altuagoa dauka familia horrek bere ohiko bizitzan. Horregatik, postu hobean dago bere auzoan oporrak igarotzen dituen tokian baino.

1.20.

1)	x_i	n_i	N_i	f_i
	40.000	4	4	0,16
	80.000	10	14	0,40
	120.000	6	20	0,24
	200.000	4	24	0,16
	320.000	1	25	0,04

2)



$$\begin{aligned}
 3) \quad \bar{x} &= 112.000 \text{ pta} \\
 Mo = Me &= 80.000 \text{ pta} \\
 q_1 &= 80.000 \text{ pta} \\
 q_3 &= 120.000 \text{ pta} \\
 \min(x) &= 40.000 \text{ pta} \\
 \max(x) &= 320.000 \text{ pta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad S_x^2 &= 4.224 \cdot 10^6 \\
 S_x &= 64.992 \text{ pta} \\
 g_o &= 0,58 \\
 R &= 280.000 \text{ pta} \\
 q_3 - q_1 &= 40.000 \text{ pta}
 \end{aligned}$$

5) Diagramako eskuin aldean adar bat ikusten da. Horregatik susmatzen dugu g_1 positiboa izango dela (kalkulatzean + 1,625 lortzen da).

Soslai zorrotza ere ikusten dugu (moda-mediana nola nabaritzen den, eskuineko adarra nola estutzen eta hedatzen den). Horregatik, g_2 ere positiboa izango dela kontsideratzen dugu (+2 lortzen da).

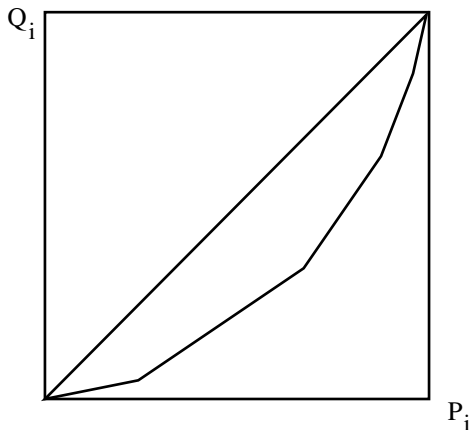
6)

z_i	t_i
-72.000	-1,1078
-32.000	-0,4923
8.000	0,1230
88.000	1,3540
208.000	3,2003

7)

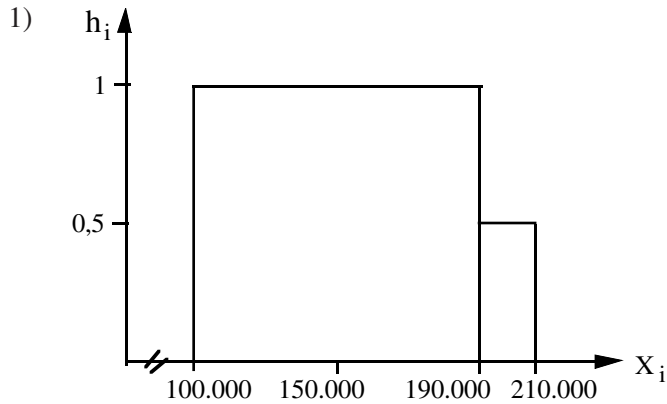
P_i	Q_i
16	5
56	34
80	60
96	88
100	100

$$I_G = 1 - 187/248 = 0,246$$



Kontzentrazio-mailaren adierazle biek, hileroko ordainketa nahiko uniformekoki banatuta dagoela ikustarazten digute.

1.21.

2) $\bar{x} = 150.500$ pta.

$$g_o(x) = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{25.256}{150.500} = 0,1678$$

$$S_x^2 = 6,3787 \cdot 10^8 \text{ pta}^2$$

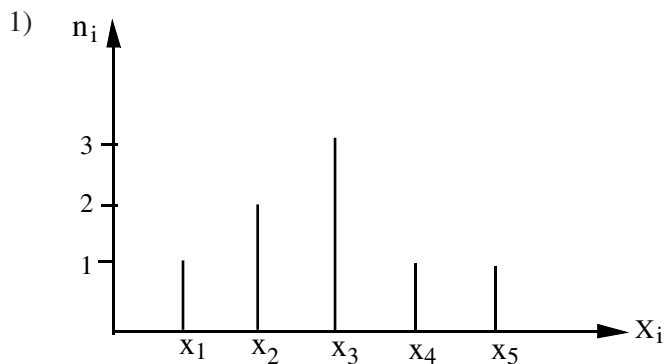
Desbidazio tipikoa batezbestekoa baino txikiagoa denez, batezbestekoa errepresentagarria dela esan dezakegu, beronen aldakortasuna ez baita oso handia.

3) $M_o = 190.000$ pta alderantzizko banaketa proportzionalaren irizpidez,
 $M_o = 160.000$ pta altueren alderaketaren irizpidez.

4) $M_e = 150.000$ pta.

5) Aldagai jarraia banaketa daukagu non batezbesteko aritmetikoa errepresentagarria den, modabakarrekota eta sakabanatze handirik gabekoa.

1.22.



$$x_i - x_{i-1} = 2 \quad \forall i$$

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 = x_1 + 2 \\ x_3 = x_2 + 2 = x_1 + 4 \\ x_4 = x_3 + 2 = x_1 + 6 \\ x_5 = x_4 + 2 = x_1 + 8 \end{cases}$$

$$2) \bar{x} = x_1 + 3,75$$

$$Me = x_3 = x_1 + 4$$

$$Mo = x_3 = x_1 + 4$$

$$3) R_x = 8$$

$$S_x = 2,33$$

$$4) u_i = x_i - x_1 \quad \text{bada,} \quad u_i = \{0,2,4,6,8\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = \bar{u} + x_1 \\ Me(x) = Me(u) + x_1 \\ Mo(x) = Mo(u) + x_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Estatistiko hauek } x_1 \text{ balioaren menpe daude,} \\ \text{lekuzkoak baitira eta traslazioekin aldatu} \\ \text{egiten dira}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_x = S_u \\ R_x = R_u \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Baina bi estatistiko hauek sakabanatzearen} \\ \text{balio tipikoak dira eta leku aldatzeek ez} \\ \text{dute eraginik beraiengan}$$

1.23.

1) Posiziozko 3 estatistiko:

$$\bar{x} = 2,95 \text{ seme}$$

$$Me = 3 \text{ seme}$$

$$Mo = 4 \text{ seme}$$

Sakabanatzearen 3 estatistiko:

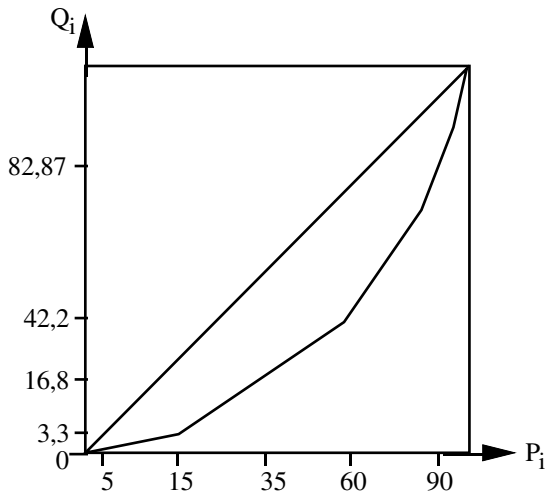
$$S_x^2 = 1,747 \text{ (seme)}^2$$

$$S_x = 1,32 \text{ seme (sakabanatzea, aldagaien unitatetan neurturik)}$$

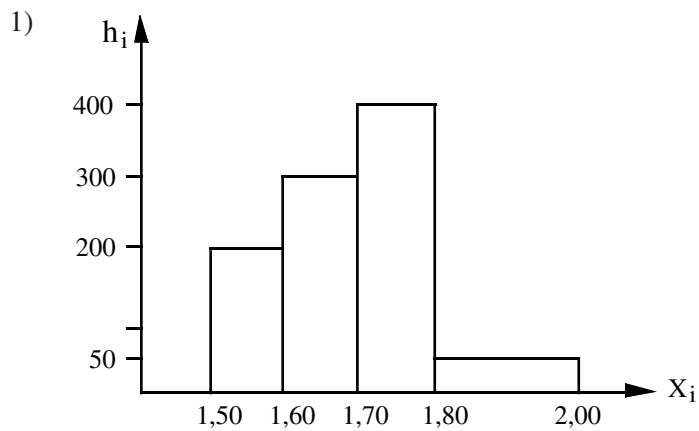
$$g_o(x) = \frac{S_x}{\bar{x}} = 0,45 \text{ (sakabanatzea, erlatiboki batezbestekoarekiko} \\ \text{neurturik, eta unitateekiko independentea)}$$

$$2) I_G = 0,29$$

Gini-ren indizeak nahiz Lorenz-en kurbak, uniformetasun-maila nahiko handia dela, adierazten digute.



1.24.



$$2) \bar{x} = 1,695 \text{ m}$$

$$Me = 1,70 \text{ m}$$

$$Mo = 1,714 \text{ m}$$

$$3) S_x = 0,101 \text{ m}$$

$$g_0(x) = 0,059$$

$$4) u_i = (x_i - 1,65) \cdot 10$$

$$5) \text{ Ruben} \Rightarrow x \quad t_x = \frac{1,73 - 1,695}{0,10} = 0,345 < t_y = \frac{1,70 - 1,60}{0,15} = 0,66$$

Ibon $\Rightarrow y$

Ibon altuagoa da bere kolektiboarekiko, anaien altuerak eskala berdinean jartzen baldin baditugu tipifikatuz, Ibon-en balioa Ruben-ena baino handiagoa baita.

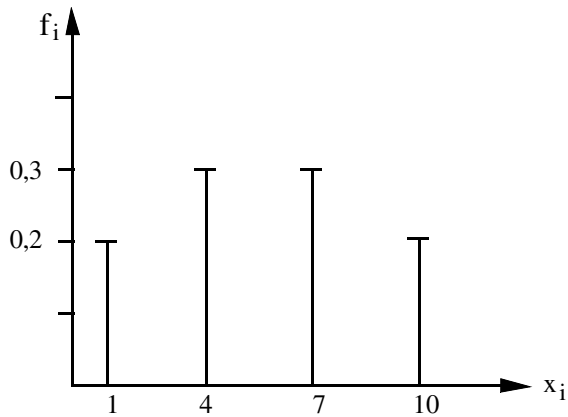
1.25.

1) $\bar{x} = 5,5$ Banaketa simetrikoa bada, $f_2 = f_3$ eta gainera maiztasun erlatibo guztien batura 1 denez, beraien balioak kalkula ditzakegu eta ondorioz batezbesteko aritmetikoa.

2)

$$f_1 = f_4 = 0,2$$

$$f_2 = f_3 = 0,3$$



$$3) y = \frac{x - 4}{3}$$

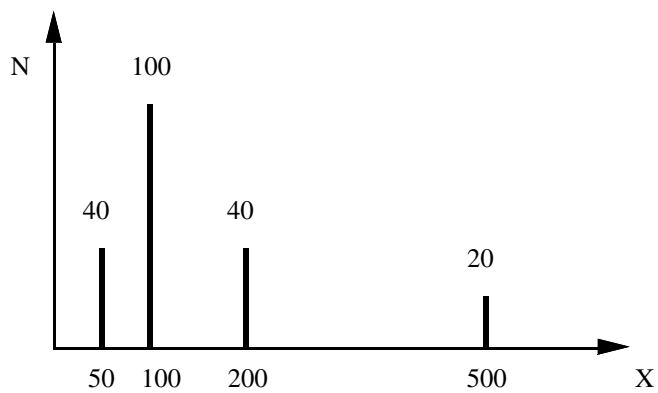
$$y = 0,5$$

$$S_y^2 = 1,05$$

$$g_o(y) = 2,049$$

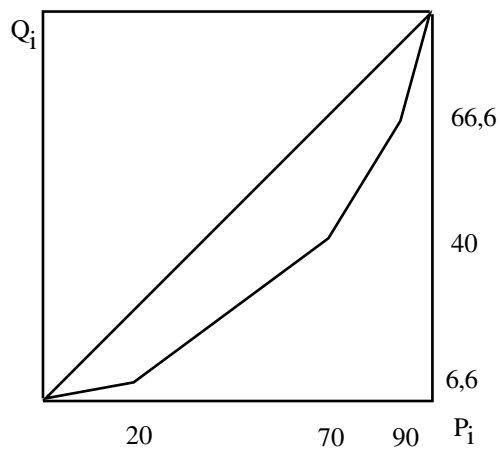
1.26.

1)



$$2) g_o = \frac{126.491}{150.000} = 0,84$$

3)



4)

P _i	Q _i
20	6,6
70	40
90	66,6
100	100

$$I_G = \frac{66,8}{180} = 0,37$$

1.27.

1)	$\frac{P_i}{50}$	$\frac{Q_i}{16}$
	$\frac{90}{100}$	$\frac{67}{100}$

$$I_G = 0,4$$

2) Bi ebazpide kontsideratuko ditugu:

a) "Sarrerak guztira" aurrenekoak izanik, hau da,

$$M = \sum_i x_i n_i = 31$$

	n_i	$x_i n_i$	N_i	M_i	P_i	Q_i
X	9	9x	9	9x	90	$900x / 31$
Y	1	$31 - 9x$	10	31	100	100

$$I_G = 0,4 \quad \begin{array}{l} x = 1,86 \\ y = 14,26 \end{array}$$

b) "Sarrerak guztira" $9x + y$ izanik

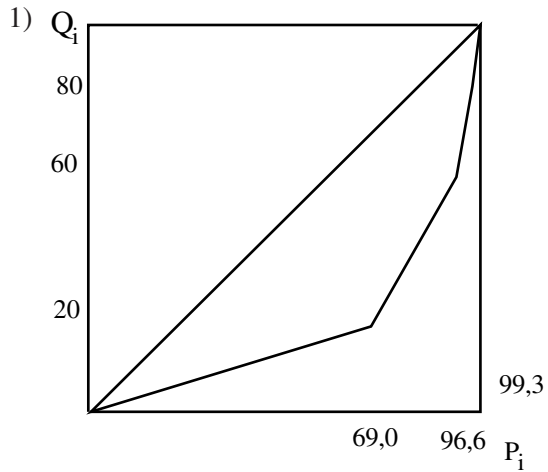
	n_i	$x_i n_i$	N_i	M_i	P_i	Q_i
X	9	9x	9	9x	90	$\frac{900x}{9x+y}$
Y	1	y	10	$9x+y$	100	100

$$9x+y$$

$$I_G = 0,4 \quad x = 0,13 y \quad \text{edota} \quad y = 7,67 x$$

Noski, kasu honetan, soluzioa mugatu gabe geratzen da.

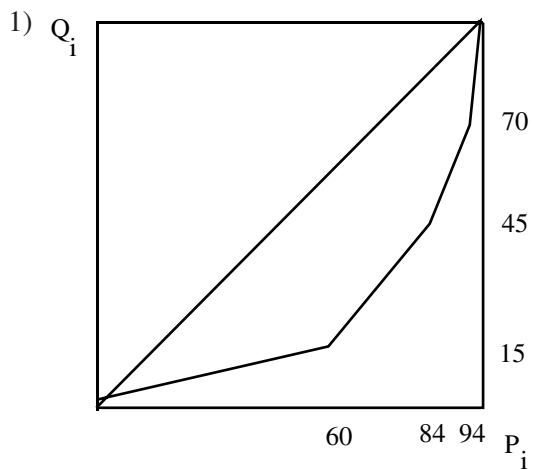
1.28.



$$2) I_G = \frac{104,9}{264,9} = 0,396$$

Kontzentrazio sakona (akziodun batek ehun akziodunek adina akzio ditu: Akziodun kopuruaren datua ez da nahikoa, elkarte anonimoa “herrikoia” dela ziurtatzeko...).

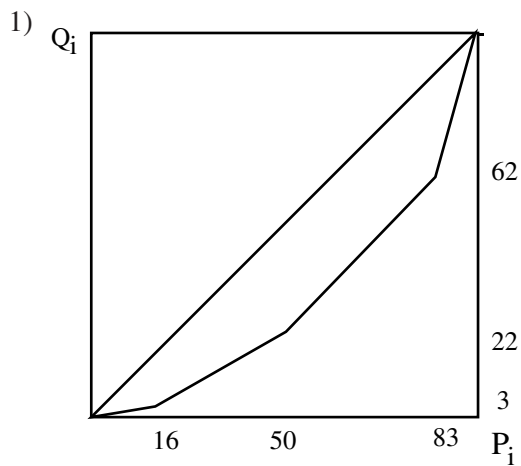
1.29.



P_i	Q_i	$P_i - Q_i$
60	15	45
84	45	39
94	70	24
100	100	

$$I_G = 108/238 = 0,45$$

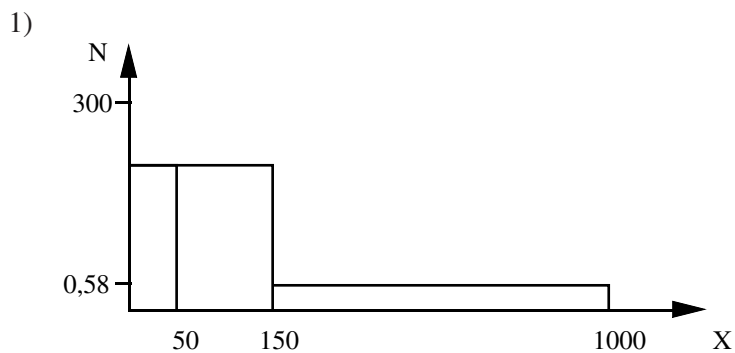
1.30.



P_i	Q_i	$(P_i - Q_i)$
16	3	13
50	22	28
83	62	21
100	100	

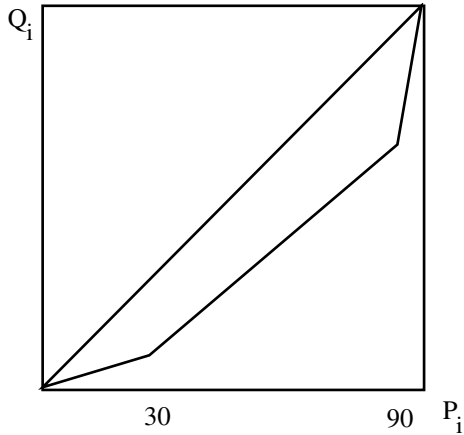
$$I_G = \frac{62}{149} = 0,41$$

1.31.



2)	$\frac{P_i}{}$	$\frac{Q_i}{}$	$\frac{P_i - Q_i}{}$
	30	8,25	21,75
	90	63,3	26,7
	100	100	

3)

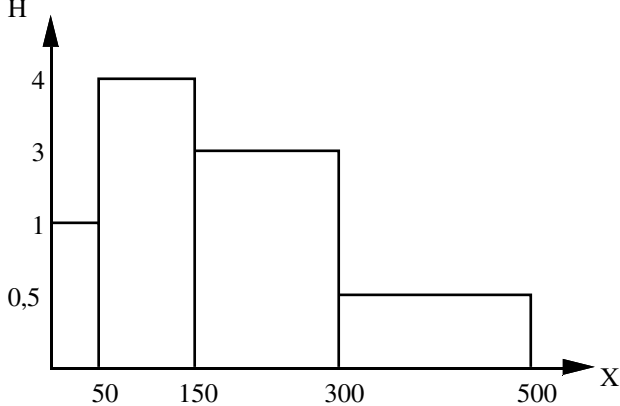


$$I_G = \frac{48,45}{149120} = 0,404$$

Histogramak probintzi produkzioen banaketa nahiko sakabanatua dela adierazten du. Horrek Estatuko produkzio totala probintzia batzuetan nahiko kontzentratua dagoela esan nahi du, Lorenz-en kurbak eta Gini-ren indizeak ere adierazten dutenez.

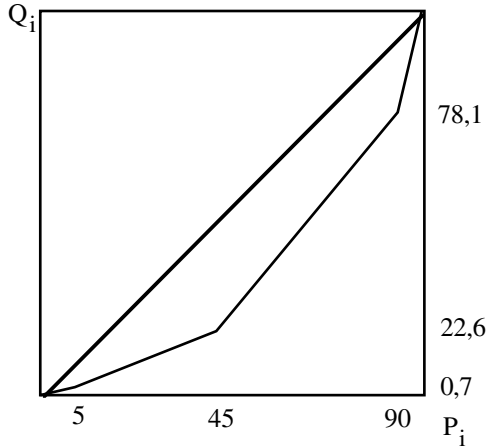
1.32.

1)



$$2) Mo = 50 + (3/4) 100 = 125$$

3)



4)

$$I_G = \frac{38,6}{140} = 0,27$$

5) Histograman ikusten denez, familia gehienak ez dira batabestearikiko oso desberdinak.

Horregatik, Gini-ren indizeak banaketa nahiko uniforme dela adierazten digu.

1.33.

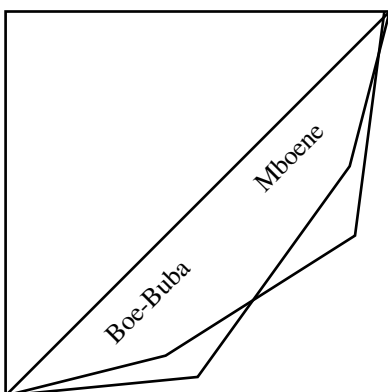
1)

<u>Mboene</u>	
<u>P_i</u>	<u>Q_i</u>
50	5
90	60
100	100

$$I_G = 0,536$$

<u>Boe - Buba</u>	
<u>P_i</u>	<u>Q_i</u>
40	10
90	40
100	100

$$I_G = 0,616$$



Kontzentrazioa, bi enpresetan, oso handia da, Boe-Buban-en zerbait handiagoa izanik.

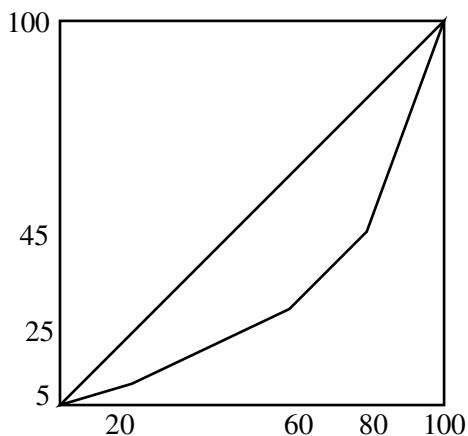
Kontzentrazioaren zehaztasuna Lorenz-en kurbak Gini-ren indizeak (multzo-neurri bakarrak) baino hobeto jasotzen du:

Mboenen erdiko klasea goi-mailakoari gehiago hurreratzen zaio, baina Boe-Buba baino gehiago urrutiratzen zaio behe-mailakoari.

1.34.

1)	Klaseak (milaka pta)	Familiak (milioika)	p_i %	Errenta %	q_i %	P_i %	Q_i %	$P_i - Q_i$ %
	0 ; 50	10 - 8 = 2	20	100 - 95 =	5	20	5	15
	50 ; 100	8 - 4 = 4	40	95 - 75 =	20	60	25	35
	100 ; 200	4 - 2 = 2	20	75 - 55 =	20	80	45	35
	200 ;	2	20		55			
		10	100		100	160	75	85

$$2) I_G = \frac{80}{160} = 1 - \frac{75}{160} = 0,53$$



Nahiz eta Estatuari dagokion indizea izan, altua da, hots, Estatu honetan famili errenta nahiko kontzentratuta dago. Datuak, biribilduak, 1.982koak dira eta Espainiako iturri "fidagarri" batzuetatik hartu dira.

Ohar gaitezen maila markak ariketa honetan ez direla beharrezkoak, errentaren portzentaia adierazburuak ematen baitizkigu.

1.35.

1)

	\bar{x} (pta.)	Me (pta.)	S_x (pta.)	g_o (%)
A	4.675	4.500	2.122,94	45,41
B	6.900	7.000	1.135,78	16,46

2) $I_G(A) = 0,2$ $I_G(B) = 0,08$

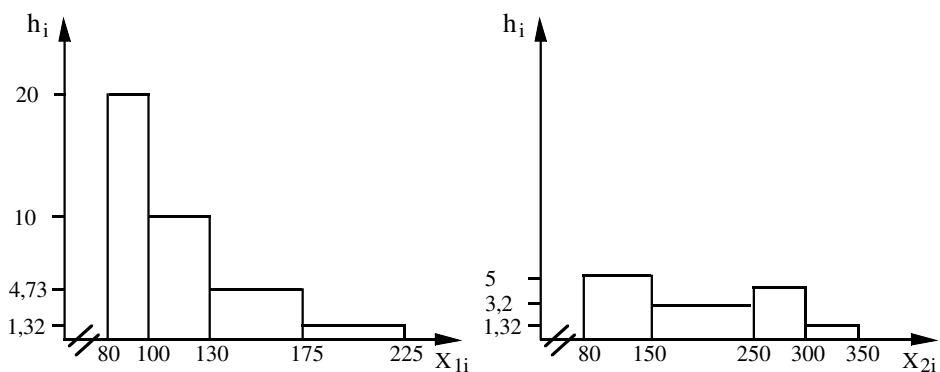
3) Alokairuen batezbestekoa txikiagoa da A enpresan B enpresan baino. Alderantziz gertatzen da desbidazio tipikoarekin. Horregatik, aldakuntza-koefizienteak %45,41 eta %16,46 dira hurrenez hurren.

Ohar daiteke aldagaiaren ibiltartea A enpresan B enpresan baino handiagoa dela. Giniren indizeak aurreneko emaitzekin ados daude. A enpresa nahiko uniformea da alokairuen arabera eta B enpresa ia gutziz uniformea da.

1.36.

1) Langile kopuru desberdina duten bi enpresa grafikoki parekatzeko, maiztasun erlatiboak erabili behar dira.

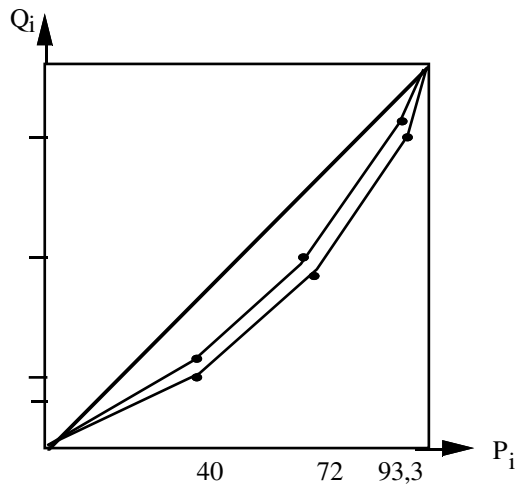
Aurkezpen grafikorik egokiena histograma da eta taldeak zabalera desberdinekoak direnez, altuerak kalkulatu behar dira.



Bi enpresetako alokairuak 4 taldetan sailkatuta daude, baina taldeak desberdinak izateaz gain, zabalera desberdinekoak dira. Lehen enpresetako histogramaren perfila zorrotzagoa da eta asimetria positiboa adierazten du. Bigarren enpresaren histograma, berriz, zapalagoa da.

- 2) $\bar{x}_1 = 118,66$ (10^3 pta) $g_o(x_1) < g_o(x_2) \Rightarrow$ 1. enpresaren
 $\bar{x}_2 = 190,33$ (10^3 pta) batezbesteko alokairua
 $S_{x_1}^2 = 1018,38$ (10^3 pta)² errepresentagarriagoa
 $S_{x_2}^2 = 5038,35$ (10^3 pta)² 2. enpresakoa baino
- $g_o(x_1) = \frac{S_{x_1}}{\bar{x}_1} = 0'2689$
 $g_o(x_2) = \frac{S_{x_2}}{\bar{x}_2} = 0'3729$

- 3) $I_G(1) = 0,121$
 $I_G(2) = 0,169$



- 4) 2. enpresan batezbesteko alokairua handiagoa da eta alokairuen banaketan sakabanatze handiagoa du.
 Uniformetasunari dagokionez, Gini-ren indizea txikiagoa denez 1. enpresan, alokairuen banaketa zuzenagoa da 2. enpresan baino. Lorenz-en kurbak aztertuz, ondorio berdinerira iritsiko ginateke.

1.37.

- 1) $S_x^2 = 5499$ (10^3 pta)²
 $S_x = 74,15$ (10^3 pta)
 $g_o(x) = 0,749$

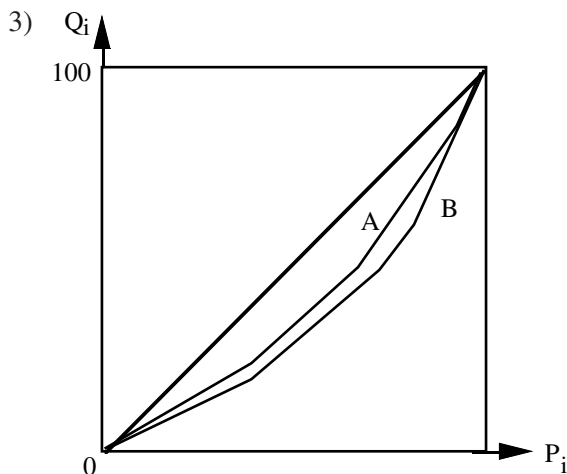
Bariantzak, desbidazio tipikoak eta aldakuntza-koefizienteak sakabanatzea adierazten dute batezbesteko aritmetikoarekiko ($\bar{x} = 99.000$ pta).
 Aldakuntza-koefizientea 1 baino txikiagoa denez, sakabanatze handia ez dagoela esan dezakegu eta, beraz, batezbesteko alokairua nahiko errepresen-
 tagarria izango da.

- 2) $I_G = 0,17$ 0-tik hurbil dagoenez, Gini-ren koefizienteak, alokairu-masa nahiko ongi banatuta dagoela esaten digu.
- 3) Hobekien ordaindutako lankideetako %5ak nominan % 18,2a jasotzen du.

1.38.

- 1) $I_{G_A} = 0,2957$ Maiztasun banaketetan bezala, kontzentrazioa-indibiduok
 $I_{G_B} = 0,3363$ balio posibletan nola banatzen denaren menpe dago.

Aldagai estatistiko jarraietan, klase zabalera bat edo bestea hartzeak multzoko neurrietan era batera edo bestera eragingo du, beti ere, datuen aldaketa bat suposatzen baitu. Kasu honetan zabalerak berdinak dira eta emaitzen desberdintasuna banaketan desberdintasunaren ondorioa da.



Bi banaketak antzekoak dira kontzentrazioari dagokionez, hala ere, B herrian errentaren kontzentrazio handiagoa dago.

- 3) Uniformetasun desberdina dituzten bi kolektibo batera hartuz, tarteko uniformetasuna lortuko genuke. hau da: $I_{G_A} < I_{G_{A+B}} < I_{G_B}$

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1. Urbanizazio baten erroldatik balio hauek atera ditugu:

10 urte baino gutxiagokoak: 500 emakumezko eta 500 gizonezko
 10 urtetik 30 urtera artekoak: 700 emakumezko eta 800 gizonezko
 30 urtetik 50 urtera artekoak: 500 emakumezko eta 500 gizonezko
 50 urtetik 80 urtera artekoak: 300 emakumezko eta 299 gizonezko

Honakoa eskatzen da:

- 1) Histogramak edo populazio-piramidea.
- 2) Batezbesteko aritmetikoa eta desbidazioa tipikoa gizonezko, emakumezko eta populazio totalarekiko, hurrenez hurren.

2. Normal jaiotako 20 haurren pisua neurtu da eta emaitzak hauek dira.

<u>Pisua (kilotan)</u>	<u>Haur kopurua</u>
2'15 - 2'55	1
2'55 - 2'95	3
2'95 - 3'35	9
3'35 - 3'75	5
3'75 - 4'15	1
4'15 - 4'55	1

Honakoa eskatzen da:

- 1) Banaketaren adierazpide grafikoa.
- 2) Batezbestekoa, moda, mediana, eta asimetriaren iritzia, grafika eta \bar{x} , Me, Mo-ren posizioa ikusirik.

3. Ondoko taulan 500 familiren senide kopuruaren araberrako banaketa daukagu.

<u>Senide kopurua</u>	<u>Famili kopurua</u>
0 - 2	110
2 - 3	100
3 - 6	190
6 - 10	100

Honakoa eskatzen da:

- 1) Familien batezbesteko senide kopurua.
- 2) Zein da maiztasun handieneko senide kopurua?
- 3) Familien %50 aparkalekuak dauzkagula eta hauek senide kopuru handiena daukatenei ematen zaizkiela suposatuz, aparkalekua lortzeko zenbateko senide kopurua eduki behar da?
- 4) Kalkula itzazu aldakuntza-koefizientea eta desbidazio tipikoa, lortutako emaitzak komentatuz.

4. A multzoan indibiduen erdiak automobil bat du eta beste erdiak ez du automobilik.

B multzoan laurdenak bina automobil dauka eta gainerakoak ez dauka automobilik.

Honakoa eskatzen da:

Pareka itzazu, grafiko eta estatistiko egokien bidez, banaketa horien zentzurako joeraren, sakabanatzearen, asimetriaren eta (ikaslea animatuko balitz) kurtosiaren ezaugarriak.

5. Hiri bateko familiek dituzten elikadura-gastuak ikertu nahian 1.000 familia lagindu dugu.

Ondoko banaketan, lagindutako familien erantzunak bilduta izanik:

<u>Gastua (milaka pta)</u>	<u>Famili kopurua</u>
(0 , 20)	100
(20 , 40)	300
(40 , 80)	500
(80 , 130)	100

Honakoa eskatzen da:

- 1) Histograma.
- 2) Aldagai zentratuaren eta tipifikatuaren balioak.
- 3) Aldagai zentratuaren, tipifikatuaren eta jatorrizko aldagaiaren desbidazio tipikoak.
- 4) Aldagai zentratuaren eta jatorrizko aldagaiaren aldakuntza-koefizienteak.
- 5) Komenta itzazu eskatutako balioen berezitasunak.

Oharra: klase-ordezkaritzat erdiko puntuak hartu behar dira.

6. X aldagaiaren ondoko momentu arruntak jakinik:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 2,4 \quad a_3 = 3,6$$

Lor ezazu:

- 1) X aldagaiaren asimetri koefizientea.
- 2) Z aldagaiaren aldakuntza-koefizientea, Z aldagaia X aldagaiaren ondoko konbinazio lineala izanik.
 $Z = 5 - 3X$

7. Ondoan X aldagai jarraiaren maiztasun erlatiboen banaketa daukagu:

<u>X</u>	<u>f_i</u>
[0;100)	0,2
[100;300)	f_2
[300;400)	f_3

Honakoa eskatzen da:

- 1) f_2, f_3 balioak $\bar{x} = 215$ izan dadin.
- 2) “ “ “ $Me = 215$ “ “
- 3) “ “ “ $g_1(x) = 0$ “ “

8. Ondoko banaketa emanik:

<u>X</u>	<u>f_i</u>
(-1,5; -0,5)	8
(-0,5; 0,5)	74
(0,5 ; 1,5)	n ₃
(1,5 ; 2,5)	n ₄

Honakoa eskatzen da:

n₃, n₄ maiztasunak aldi berean $Mo(x) = 0$ eta $\bar{x} = 0,2$ izateko baldintzaz.

9. Ondoko taulan, 1.982an 24 estatutan produzitutako tomatea daukagu.

<u>X_i (milaka tonatan)</u>	
(0 - 100)	4
(100 - 500)	6
(500 - 2.000)	7
(2.000 - 5.000)	5
(5.000 - 7.0000)	2

Honakoa eskatzen da:

- 1) Histograma, eta asimetriari buruz grafikoan ikusten duzunaz komentarioa.
- 2) Batezbesteko aritmetrikoa, moda eta mediana.
- 3) Bariantza eta batezbesteko desbidazioa.
- 4) Lortutako emaitzen komentarioa.

10. Lor ezazu momentu zentralen eta momentu arrunten arteko erlazioa (adierazpen orokorra edo laugarren ordenako momentuei dagokiona lor daiteke).

Ondoko momentuak emanik:

$$a_1 = 3,83 \quad a_3 = 79,70 \quad a_2 = 24,46 \quad a_4 = 400,2153$$

Lor itzazu asimetri eta kurtosi koefizienteak. Komenta itzazu lortutako emaitzak.

11. Ondoko taulan, UBI amaitu duten 50 emakumezko eta 50 gizonezkoen batezbesteko puntuazioen banaketa daukagu:

<u>Btb. Puntuazioa</u>	<u>Gizonezkoak</u>	<u>Emakumezkoak</u>
[5, 5.8)	23	13
[5.8, 6.5)	12	17
[6.5, 7.5)	8	8
[7.5, 8.5)	4	10
[8.5, 10)	3	2

- 1) Eraiki itzazu dagokien aurkezpen grafikoak.
- 2) Lor itzazu batezbesteko aritmetikoa, bariantza, eta aldakuntza-koefizientea banaketa bakoitzarentzat. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 3) Zein da batezbesteko puntuaziorik maizena (maiztasun handiena duena) emakumezkoen artean?
- 4) Unibertsitate eskola batean plaza edukitzeko 6,8-ko batezbesteko puntuazioa behar dela dakigu. Kolektibo horretatik, emakumezko gehiagok edo gizonezko gehiagok edukiko dute plaza? Zergatik?

12. Ondoko 1. eta 2. tauletan, hurrenez hurren munduko 100 enpresa handienak eta Espainiako 100 enpresa handienak ditugu salmenten arabera sailkatuta:

1.TAULA			2.TAULA		
Salmentak 10 ⁹ \$-tan	klase- -ordezkaria	Enpresa kopurua	Salmentak 10 ⁹ pta-tan	klase- -ordezkaria	Enpresa kopurua
≥ 25	40	24	≥ 60	200	26
$25 > x \geq 15$	20	25	$60 > y \geq 40$	50	23
$15 > x \geq 12$	13,5	19	$40 > y \geq 30$	35	21
$12 > x \geq 9$	10,5	32	$30 > y \geq 24$	27	30

Honakoa eskatzen da:

- 1) Pareka ezazu, Lorenz-en kurben eta Gini-ren indizeen bidez, bi banaketetan ikusten du salmenten kontzentrazio-maila erlatiboa.
- 2) Komenta itzazu, laburki, lortutako emaitzak.
Munduko estatu-talde baterako edo estatu bakar baterako daukagun kontzentrazio-maila erlatiboa berdintsua izango al da?

13. Ondoko taulan, urte bakoitzean herrialde batek azken 20 urteetan izan dituen euri-egunak ditugu.

125	200	115	135	108	150	95	98	140	85
115	175	140	97	180	65	170	150	110	143

Honakoa eskatzen da:

- 1) Taldeka itzazu datuak [50;100), [100; 125), [125; 150), [150; 200) taldeetan eta aurkez ezazu, grafikoki, datu taldekatu hauen banaketa.
- 2) Azter ezazu urte desberdinetako totalaren kontzentrazioa, Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizearen bidez.
- 3) Komenta ezazu, laburki, 1) ataleko grafikoak eta 2) ataleko adierazleek banaketa honi buruz ematen diguten informazioa.

14. Famili aurrekontuen inkestaren arabera, herri bateko familiak honela banatzen dira:

<u>Sarrera-tarteak</u>	<u>Klase-ordezkaria</u>	<u>Familien ehunekoa</u>
$0 \leq x < 10$	6	%50
$10 \leq x < 30$	20	%40
$30 \leq x \leq 200$	90	%10

Honakoa eskatzen da:

- 1) Banaketaren histograma.
- 2) Medianaren estimazioa eta interkuartil-ibiltartea.
- 3) Gini-ren indizea.
- 4) Komenta itzazu sarrera-banaketaren ezaugarriak.

15. Udondoko BILMA enpresaren nomina-zerrendan zortzi milioi pezeta honela banatzen dira:

500.000	pta	guztira	5 administrari
1.600.000	“	“	20 espezialista
400.000	“	“	gerentearen soldata
800.000	“	“	4 zerbitzu-zuzendari
800.000	“	“	5 lantegi-maisu
1.400.000	“	“	lehen mailako 10 ofizial
2.000.000	“	“	bigarren mailako 20 ofizial
500.000	“	“	10 peoi

(maila berdina daukatenek berdin irabaziz)

Honakoa eskatzen da:

- 1) Aurkez ezazu Lorenz-en kurbaren bidez, enpresa honen soldaten kontzentrazioa.
- 2) Berari dagokion Gini-ren indizea.
- 3) Komenta itzazu 1) eta 2) ataletan lortutako emaitzak.

Oharra: ahal den zero gutxien erabiliz lan egitea komeni da.

16. Hotel batek 5 gela-mota ditu. Ondoko taulan, gela bakoitzaren prezioa eta guztiz beteta dagoen egun batean lortutako sarrera totalak ditugu:

<u>mota</u>	<u>prezioa</u>	<u>sarrera totalak</u>
1.	300	24.000
2.	500	20.000
3.	750	30.000
4.	1.000	20.000
5.	x	26.000

Honakoa eskatzen da:

- 1) Zein izango litzateke x (gela garestienaren prezioa) gelen batezbesteko prezioa 600 pezetakoa izan dadin?
- 2) Zein izango litzateke x (gela garestienaren prezioa), sarrera totalen kontzentrazioa neurtzen duen Gini-ren indizea 0,272 izan dadin?

17. TAMEC enpresako 50 langileen alokairuak honela banatzen dira:

30 espezialista	100.000 pta/espezialista
Lehen mailako 10 ofizial	200.000 pta/ofizial
10 lantegimaisu	300.000 pta/maisua

Kalkula itzazu:

- 1) Zenbatekoa izan beharko luke lantegimaisuen alokairuak, beste bi kategoriakoenak mantenduz, alokairuen desbidazio tipikoa bikoizteko?
- 2) Zenbatekoa izan beharko luke lantegimaisuen alokairuak, beste bi kategoriakoenak mantenduz, alokairu totalen kontzentrazio-maila bikoizteko?

18. Ondoko banaketa, enpresa bateko hileroko sarrerei dagokio:

<u>Maila</u>	<u>Sarrerak (10^3 ptatan)</u>	<u>Langile kopurua</u>
I	100	60
II	200	30
III	400	10

Akordio baten bidez, aurrerantzean soldaten igoerak linealak (hau da, maila guztientzako igoera berdinak) izango direla erabaki dute.

- a) Zenbat igo beharko dute soldatak, banaketaren aldakuntza-koefizientea erdira jaitsi dadin?
- b) Eta zenbat, soldata totalen Gini-ren kontzentrazio-koefizientea erdira jaitsi dadin?

19. Aitona batek daukan dirua, 25 milioi hain zuzen, bere 10 iloben artean, jarraian azaltzen den bezala, banatzea erabaki du: dirutza horren %30a iloben %20aren artean, %15a iloben %30aren artean, %25a iloben %10aren artean eta beste %30a beste gainontzekoen artean (talde bakoitzeko iloba guztiek berdin jasotzen dute).

- 1) Kalkula itzazu, jasotako batezbesteko balioa eta iloben kopuru handienak jaso duen balioa.
- 2) Azter ezazu banaketa honen sakabanatzea.

- 3) Azter ezazu, grafikoki nahiz numerikoki, masa totalaren banaketak daukan kontzentrazio-maila.
- 4) Komenta itzazu lortutako emaitzak.

20. Maiztasunaz bat daukaten X_1, X_2, \dots, X_n balio-multzoa daukagu.

- 1) Kalkula eta komenta ezazu (I_G) Gini-ren indizearen balioa $X_1 = X_2 = \dots = X_n = c$ denean.
- 2) Kalkula eta komenta ezazu (I_G) Gini-ren indizearen balioa $X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1} = 0$ eta $X_n = c$ denean.
- 3) Aldatuko litzateke balioa $X_1 = \dots = X_{i-1} = X_{i+1} = \dots = X_n = 0$ eta $X_i = c$ balira? Zergatik?

21. Komunitate autonomo bateko 20 eskualdeek duten telefono-lerroen kopuruak ezagutzen dira 1989. urterako. Datu hauen arabera, eskualdeen % 40ak, 10 mila lerro baino gutxiago ditu eta % 45ak 10 milatik 50 milara tartean.

- 1) Zenbat eskualdek daukate 50 milatik 150 milara lerro eta 150 milatik 350 milara, telefono-lerroen kopuru totala 760 mila dela jakinik? (kopurua tarte bakoitzaren erdiko puntua klase-ordezkaritzat hartuz lortu da eta ez dago 350 baino lerro gehiago duen eskualderik).
- 2) Azal ezazu Gini-ren indizea eta Lorenz-en kurbaren bidez, komunitatearen telefono-lerroen totala eskualdeka uniformeki banatuta dagoen ala ez.

2. EZAUGARRI ESTATISTIKO BIKOITZAK

ADIERAZBURUAK

2.1. Ondoko taula hau emanik:

Y \ X	2	4	6
1	10	0	60
3	20	5	10
5	10	70	15

Honakoa eskatzen da:

- 1) $y = 4$ baldintzatutako maiztasun erlatiboen banaketa.
- 2) X eta Y aldagaiek, maiztasun banaketa independentea al dute? Zergatik?
- 3) Koerlazio-matrizea.

2.2. Ondoko taulan X, Y aldagaien 1971-1980 urte tarteko balioak ditugu.

X: 1970. urtearekiko farmazi sektorearen inbertsioen koefiziente biderkatzailea.

Y: 1970. urtearekiko inbertsio-errendimenduen koefiziente biderkatzailea.

Y: 0,5	0,1	0,4	0,9	1,1	2,1	3,2	4,6	8,8	3,9
X: 2,0	3,8	2,5	2,6	3,1	2,2	1,2	1,3	2,6	6,8

Honakoa eskatzen da:

- 1) (X,Y) aldagai estatistiko bikoitzaren adierazpide grafikoa.

Grafikoa ikusirik, arrazona ezazu X, Y-ren artean zure ustetan dagoen koerlazio-mailaz (sakona, ahula, ertaina, gutxi gora-behera zero....)

- 2) Lor ezazu koerlazio-koefiziente lineala eta komenta ezazu emaitza.

2.3. Euskal Herriko lau probintzi hauen kasuan, X aldagaiak populazio-igoera ematen digu ehunekotan 1973-1976 tartean eta Y aldagaiak “per capita” famili errentaren igoera urte-tarte berean.

	<u>X</u>	<u>Y</u>
ARABA	6	49
GIPUZKOA	2,5	46
NAFARROA	1	43
BIZKAIA	3,5	44

Honakoa eskatzen da:

- 1) Sakabanatze-diagrama edo puntu-hodeia.
- 2) X eta Y aldagaien batezbestekoak edo desbidazio tipikoak.
- 3) (X,Y) aldagaien kobariantza- eta koerlazio-koefizientea emaitzari irazkinak edo komentarioak eginez.

2.4. Zein da koerlazio-koefizientearen balioa, ondoko maiztasun absolutuen taula bakoitzerako?

<u>Y</u> X	y_1	y_2
x_1	3	0
x_2	0	2

<u>Y</u> X	y_1	y_2
x_1	0	1
x_2	1	0

<u>Y</u> X	y_1	y_2
x_1	1	2
x_2	2	4

Hiru taula hauetan $x_1 < x_2$ eta $y_1 < y_2$ dira.

2.5. Ondoko taulan, maiztasun-banaketa bat ematen da.

<u>Y</u> X	1	2	3
10	0	4	10
11	5	9	1
12	9	2	0

- 1) Lor itzazu bazter-banaketak eta banaketa-baldintzatu guztiak.
- 2) U, V aldagaiak honela ateratzen badituzu:

$$X = Ua + b, \quad Y = Ve + f$$
 zein da S_{xy} eta S_{uv} kobariantzen arteko erlazioa?
- 3) Kalkula ezazu koerlazio-koefizientea, laburrena den kalkulua eginez.

2.6. Populazio konkretu batean (X,Y) aldagai estatistiko bidimentsional baten banaketari dagokionez, ondoko momentuak ezagutzen dira:

$$a_{10} = 5 \quad a_{01} = 8 \quad a_{20} = 27 \quad a_{02} = 69 \quad a_{11} = 43$$

Atera itzazu:

- 1) Banaketa honen batezbestekoak, bariantzak, kobariantza eta koerlazio linealaren koefizientea.
- 2) Populazio horretarako baita ere, banaketaren (U,V) aldagaiaren batezbestekoak, bariantzak, kobariantza eta koerlazio linealaren koefizientea, aldagai hori (X,Y) aldagaiarekin ondoko berdintasunen bidez erlazionatuta badago:
 $U = 10X + 10 \quad V = 20Y - 10$

2.7. (X,Y) aldagai bikoitzaren ondoko momentuak dauzkagu:

$$a_{10} = 4 \quad a_{01} = -3 \quad a_{20} = 20 \quad a_{02} = 10 \quad a_{11} = -11$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) S_x , S_{xy} , r_{xy} estatistikoak.
- 2) $(X + Y)$ aldagaiaren bariantza, hau da, S_{x+y}^2 .
- 3) S_u^2 , S_{uv} , r_{uv} estatistikoak.

$U = 100 - 10X$, $V = -5Y$ izanik.

2.8.

- 1) Lor ezazu independentziaren baldintza beharrezko eta nahikoa, X eta Y aldagaien banaketazko independentziaren kontzeptutik abiatuz.
- 2) Ondoko taulan, O.I.T. erakundeak argitaraturik, 16 urte baino gehiago duten langabetuen sailkapena sektore ekonomikoen arabera (X) eta (Y) probintzien arabera daukagu, Euskal Autonomia Erkidegoa (zenbakiek, 1992ko ekaineko mila langabetu adierazten dute).

X \ Y	Araba	Gipuzkoa	Bizkaia
Nekazaritza	0	0.8	0.8
Industria	6	18.3	10.2
Eraikuntza	1.4	8	5.3
Zerbitzuak	7.5	45.1	17.9
1. enplegua bilatzen du	8	39.6	17.7

- * 1) Aurkez ezazu grafikoki 16 urte baino gehiago duten langabetuen sailkapena probintzien eta sektore ekonomikoen arabera, hurrenez hurren.
- * 2) Pareka ezazu, komentarioak eginez, langabetuen banaketa sektoreen arabera probintzi bakoitzerako. Bi aldagaien banaketa, kolektibo horretan, independentziaren kasutik hurbil al dago? Arrazona ezazu erantzuna.

2.9. Ondoko taulan, E.A.E.ko irakasleak, sexuaren eta irakaskuntza-mailaren arabera sailkatuta aurkezten dira (iturria: Irakaskuntzaren Estatistika 87-88, EUSTAT):

Maila	Sexua	
	Gizonezkoak	Emakumezkoak
Eskolaurrea	202	2893
OHO	3714	9616
BBB eta UBI	2138	2678
Lanbide H	2468	1253

Eskatzen da:

- 1) Sexu aldagaiaren, irakaskuntza-maila aldagaiaren sail bakoitzari baldintzatutako maiztasun erlatiboen banaketak.
- 2) Sexu aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketa. Irakasleen banaketa irakaskuntza-mailaren arabera sexuarekiko independentea dela uste al duzu? Arrazona ezazu erantzuna.
- 3) Azal itzazu, uste duzun balorazioak eginez, lortutako emaitzak.

2.10. Ondoko sarrera bikoitzeko taulak, "LOCSA" enpresaren 100 enplegatuen banaketa, adinaren arabera (urtetan) eta hileroko alokairuaren arabera (milaka pezetatan) biltzen du.

Alokairua/Adina	25-30	30-40	40-50	50-65
80-125	11	5	2	0
125-225	5	8	12	4
225-300	3	16	18	6
300-400	0	4	3	3

Eskatzen da:

- 1) Kalkula itzazu, bi aldagaien bazter-banaketen batezbesteko aritmetikoa eta bariantza (har ezazu tarte bakoitzaren erdiko puntua klase-ordezkaritzat).
- 2) Azter ezazu enpresa honen alokairu-banaketa kontzentrazio-indizea. Adinez nagusien direnen artean aztertzen baduzu, kontzentrazio-mailan desberdintasunak sortzen al dira? Justifika ezazu erantzuna.
- 3) Komenta eta pareka itzazu, aurreko ataletan lortutako emaitzak.

2.11. Ondoko taulak, Estatuko 50 probintzien banaketa biltzen du bi aldagai hauen arabera: itsasoarekiko kokapena eta guztirako produkzio garbia Km²-ko, pezetatan, 1987 urterako.

Probintziak / G.P.G.	0-tik 25-era	25-etik 100-era	100-etik 700-era
Kostaldekoak	1	11	11
Barrualdekoak	18	8	1

Eskatzen da:

- 1) Pareka ezazu kostaldeko eta barrualdeko probintzien banaketa G.P.G./Km² aldagaiaren arabera.
 - a) Sektore grafikoen bidez.
 - b) Moda eta mediana estimatuen bidez bi azpimultzoetarako.
- 2) Azal ezazu datu horietan kokapena itsasoarekiko eta G.P.G. gutxi gora-behera independenteki banatuta daudela kontsidera daitekeen ala ez.

2.12. Ondoko taulan, Arabako 51 udal, Bizkaiko 111 udal, Gipuzkoako 85 udal eta E.A.E.ko guztiak sailkatuta agertzen dira biztanle kopuruaren arabera.

Biztanle kopurua (X)	Araba	Bizkaia	Gipuzkoa	E.A.E.
$x < 500$	%43,1	%20,2	%25,3	%26,72
$x < 5000$	%94,1	%72,5	%65,5	%74,5
$x < 50000$	%98	%94,5	%97,7	%96,4
$x < 400000$	%100	%100	%100	%100

Ikus dezakezunez, sailkapenak portzentai metatuetan daude adierazita.

- 1) Aurkez ezazu, grafikoki, E.A.E.ren udalen banaketa biztanleen arabera. Grafiko honen aurrean, arrazona ezazu batezbestekoarekiko sakabana-tze-mailari buruz. Kontrasta ezazu zure iritzia estatistiko egoki baten bidez (oharra: erabil ezazu, beharrezkoa balitz, tartearen erdiko balioa klase-ordezkarizat).
Orain arte lortutako emaitzen bidez eta kalkulu gehiago egin gabe, zein izango da uniformetasunaren maila banaketa honetan?
Biztanle kopuru txikiena daukaten udalen %50ari dirulaguntza ematea pentsatu da polikiroldegia eraiki dezaten. Zein izango da udal handienaren biztanle kopurua dirulaguntza jasotzen dutenen artean?
- 2) (X,Y) aldagai bikoitza kontsideratuz, non X=biztanle kopurua eta Y=dagokion probintzia diren, azter ezazu bi aldagaien arteko independentziaren hurbiltasuna taula honetan. Arrazona ezazu erantzuna eta komenta itzazu lortutako emaitzak.

2.13. Bi sarreretako ondoko taulak kolektibo baten indibiduen banaketa biltzen du, bakoitzak betetzen duen enplegua eta lortutako ikasketa mailaren arabera:

Enplegua/Ikasketak	Lehen mailako ikasketak	BBB UBI	Lanbide Heziketa	Goi-mailako ikasketak
Langile ez kualifikatuak	39	6	7	0
Langile kualifikatuak	7	9	17	8
Teknikariak	2	14	16	29
Goi-mailako koadroak	0	0	6	50

Eskatzen da:

- 1) Lor itzazu enpleguaren banaketaren eta ikasketa-mailaren banaketaren adierazpide grafiko egokienak. Komenta itzazu lortutako grafikoak.
- 2) Zein izango lirateke enplegu modalak ikasketa-maila bakoitzean? Eta ikasketa-maila modalak enplegu-mota bakoitzean?
- 3) Taularen datuak ikusirik, azter ezazu enplegua eta ikasketa-maila aldagaien arteko banaketazko menpekotasun-maila. Komenta itzazu lortutako emaitzak.

EBAZPIDEAK

2.1.

$$1) \begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 3 & 5 \\ \hline f_{i/4} & 0 & 1/15 & 14/15 \end{array}$$

- 2) Ez. Ikusi daitekeenez, $f_{i/4}$ lortutako banaketa eta f_i maiztasun erlatiboen bazter-banaketa ez dira berdinak; ezta $f_{i/4}$ edota $f_{i/6}$ ere.

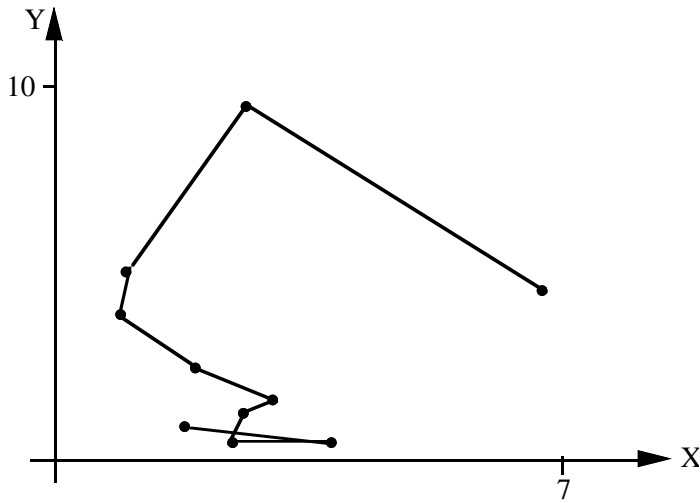
$$\text{Adibidez } f_i = \left[\frac{70}{200} \quad \frac{35}{200} \quad \frac{95}{200} \right]$$

3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,371 \\ -0,371 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.

1)



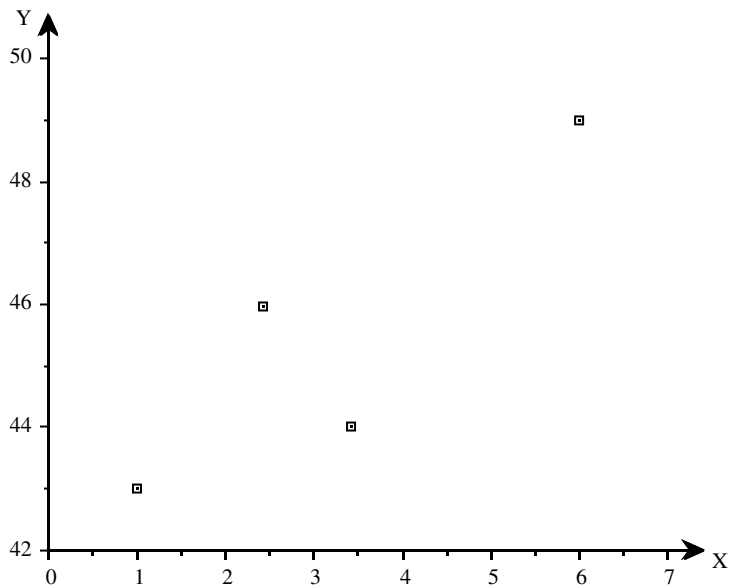
Lehen begiratuan, erlazioa alderantzizkoa eta ahula dela antzematen da, baina balioak denboran zehar ditugunez, marra batez puntuak lotzean, erlazioirik ez dagoela argi ikusten da.

2) $r_{xy} = 0,0008 \simeq 0$

Ikusten denez, koerlazio gabeak direla esan daiteke.

2.3.

1)



$$2) \bar{x} = \%3,25 \quad S_x = \%1,82$$

$$\bar{y} = 45,5 \quad S_y = 2,29$$

$$3) S_{xy} = 3,625 \quad r_{xy} = 0,86$$

Bi aldagaien arteko erlazioa zuzena eta nahiko nabaria da.

2.4.

Lehenengoak malda positiboa duen zuzen baten ganean ditu puntuak, hots, $r = 1$.

Bigarrenak, ordea, malda negatiboa duen zuzen baten ganean, hots, $r = -1$.

Hirugarrenak, azkenik, banaketa bikoitz independente bat aurkezten du, hots, $r = 0$ independentziak koerlazio eza halabehartzen baitu.

2.5.

1) Bazter-banaketak:

$$n_i: 14, 15, 11 \quad f_i: \frac{14}{40}, \frac{15}{40}, \frac{11}{40}$$

$$n_j: 14, 15, 11 \quad f_j: \frac{14}{40}, \frac{15}{40}, \frac{11}{40}$$

Banaketa baldintzatuak:

$$f_{i/1}: 0, \frac{5}{14}, \frac{9}{14} \quad f_{j/10}: 0, \frac{4}{14}, \frac{10}{14}$$

$$f_{i/2}: \frac{4}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{15} \quad f_{j/11}: \frac{5}{15}, \frac{9}{15}, \frac{1}{15}$$

$$f_{i/3}: \frac{10}{11}, \frac{1}{11}, 0 \quad f_{j/12}: \frac{9}{11}, \frac{2}{11}, 0$$

2) Kasu honetan, $X = U + 11$, $Y = V + 2$ direnez $S_{xy} = S_{uv}$ daukagu, aldagaietan jatorri-aldaketa bakarrik egin baitugu.

	V	-1	0	1
U				
-1		0	4	10
0		5	9	1
-1		9	2	0

taularen bidez,
 $r_{xy} = -0,7759$

2.6.

$$1) \quad \bar{x} = 5 \quad S_x^2 = 2 \quad S_{xy} = 3$$

$$\bar{y} = 8 \quad S_y^2 = 5 \quad r_{xy} = 0,95$$

$$2) \quad \bar{u} = 60 \quad S_u^2 = 200 \quad S_{uv} = 600$$

$$\bar{v} = 150 \quad S_v^2 = 2000 \quad r_{uv} = 0,95$$

2.7.

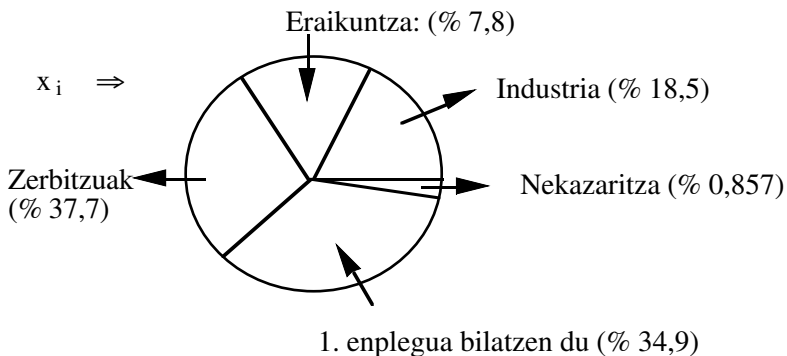
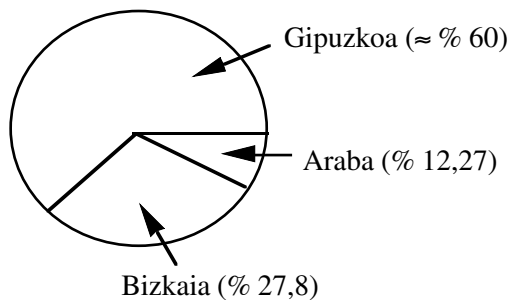
$$1) \quad S_x^2 = 4 \quad S_{xy} = 1 \quad r_{xy} = 0,50$$

$$2) \quad S_{(x+y)}^2 = 7$$

$$3) \quad S_u^2 = 400 \quad S_{uv} = 50 \quad r_{uv} = 0,5$$

2.8.

1)

 $y_j \Rightarrow$ 

2) $f_i / j = \text{Araba}$	$f_i / j = \text{Gipuzkoa}$	$f_i / j = \text{Bizkaia}$
0	0,0072	0,015
0,262	0,16	0,19
0,061	0,0715	0,10
0,327	0,40	0,345
0,349	0,35	0,341

Langabetuen banaketek sektoreen arabera, zenbait diferentzi dituzte probintzi batetik bestera, baina hiru banaketek ezaugarri berdinsuak azaltzen dituzte, eta hauek Euskadiko Autonomia Erkidego osoko banaketarekin bat egiten dute. Horrela, langabetuen banaketa sektoreen arabera probintziaren arabera independente izateko oso hurbil dago.

2.9.

1) $y_j/x = \text{eskolaurrea}$	$f_j/x = \text{eskolaurrea}$	$y_j/x = \text{OHO}$	$y_j/x = \text{OHO}$
Gizonezkoak	0,065	Gizonezkoak	0,278
Emakumezkoak	0,93	Emakumezkoak	0,721
$y_j/x = \text{BBB,UBI}$	$f_j/x = \text{BBB,UBI}$	$y_j/x = \text{L.H.}$	$y_j/x = \text{L.H.}$
Gizonezkoak	0,44	Gizonezkoak	0,663
Emakumezkoak	0,556	Emakumezkoak	0,337

2) y_j	f_j	
Gizonezkoak	0,34	Eraitza hauek E.A.E.-n irakasleen banaketa irakaskuntza-mailaren arabera independentea ez dela adierazten dute sexuarekiko, aztertutako mailetan, irakasleen banaketa sexuaren arabera desberdina baita eta sexuaren bazter banaketaren desberdina.
Emakumezkoak	0,658	

3) Orokorrean, emakumezkoak diren irakasleen portzentaia (% 65,8) gizonezkoena baino handiagoa da; baina maila desberdinak aztertuz, hori ez da beti horrela ematen. Eskolaurrean, % 93a emakumezkoak da, Lanbide Heziketan, non berezitasun teknikoak gehiengoa diren, 2/3-na gizonezkoa da. Lanaren aurrean emakumezkoa edo gizonezkoa izatea ez da berdina eta irakaskuntzan, nahiz eta emakumezko gehiago dihardun, ere ez. Gizarteak sexu desberdinei ematen dizkien rol desberdinak irakaskuntzan ere ageri dira.

2.10.

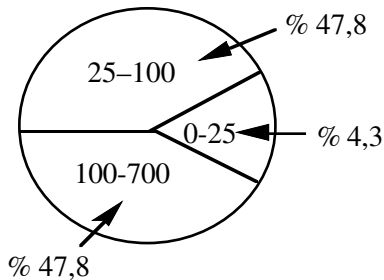
1) $\bar{x} = 217,075$ mila pta	$\bar{y} = 40$ urte
$S_x^2 = 5.530,50$	$S_y^2 = 98,5$

$$2) \left. \begin{array}{l} I_G = 0,198 \\ \text{Nagusien direnen artean} \end{array} \Rightarrow I_G = 0,168 \right\} \text{biak ez oso kontzentratuak}$$

3) Aldakuntza-koefizienteak kalkulatu bagenitu, $g_o(x) = 0,3425$ eta $g_o(y) = 0,23$, banaketetan sakabanatzea txikia dela ikusiko genuke, hau da, batezbesteko aritmetikoa errepresentagarria da. Sakabanatzea txikia bada, aurkituko ditugun banaketak nahiko uniformeak izango dira bigarren atalean ikusi dugun bezala.

2.11. X : kokapena itsasoarekiko
Y : G.P.G. Garbia / Km². (milaka pezetatan)

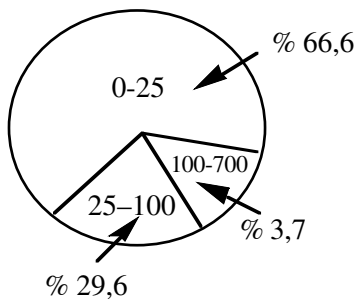
1) KOSTALDEKOAK:



$$Mo = 48,75. \text{ G.P.G. / Km}^2$$

$$Me = 96,59. \text{ G.P.G./ Km}^2$$

BARRUALDEKOAK:



$$Mo = 25. \text{ G.P.G. / Km}^2$$

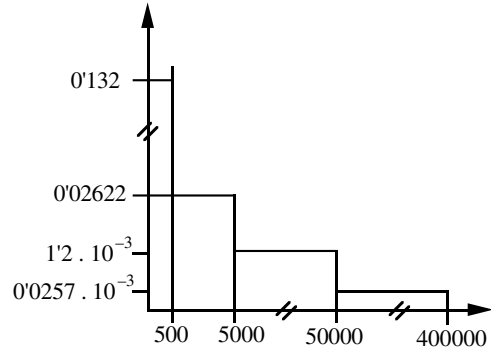
$$Me = 18'75. \text{ G.P.G./ Km}^2$$

2) Sektore grafikoak aztertuz, eta kostaldeko probintzien banaketa G.P.G. / Km²-ren arabera barrualdeko probintzien banaketaren desberdina da, beraz, bi aldagaiak ez dira independenteki banatzen kolektibo honetan.

Kostaldekoko probintzien banaketa eta barrualdeko probintzien banaketa parekatuz zeharo ezberdinak direla ikusi daiteke. Adibidez, G.P.G. / Km² balioen 0-25 klasearen kasurako kostaldeko probintziak % 4,3a dira eta barrualdeko probintziak % 66,6a. Argi dago itsasoarekiko kokapena eta G.P.G. aldagaiak banaketazko independentziatik oso urrun daudela taula honetan.

2.12.

1) Biztanle kopurua	h_i
[0 , 500]	0,132
[500 , 5000]	0,02622
[5000 , 50000]	$1,2 \cdot 10^{-3}$
[50000 , 400000]	$0,0257 \cdot 10^{-3}$



Grafika aztertuz, sakabanatze eta eskuinaldeko asimetria handia dagoela dirudi. Gainera aldakuntza-koefizientea $2,69 > 1$ denez, batezbestekoa ez da errepresentagarria izango.

Emitzak aztertuz, banaketa oso sakabanatua dela ikusten da. Eta kontzentrazioa dago, udal gutxitan populazio handia baitago. Beraz, uniformetasun eskasa dago.

$Me \approx 2.693$ biztanle edo gutxiago duten udalek dirulaguntza jasoko dute.

$\bar{x} \approx 15.503$ biztanle, grabitate-zentrua eskuinerantz alden du da nabari ($Me < \bar{x}$) asimetriaren arabera.

2) Baldintza nahikoa eta beharrezkoa: $\forall i, j \quad \frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{i.}}{N} \cdot \frac{n_{.j}}{N}$

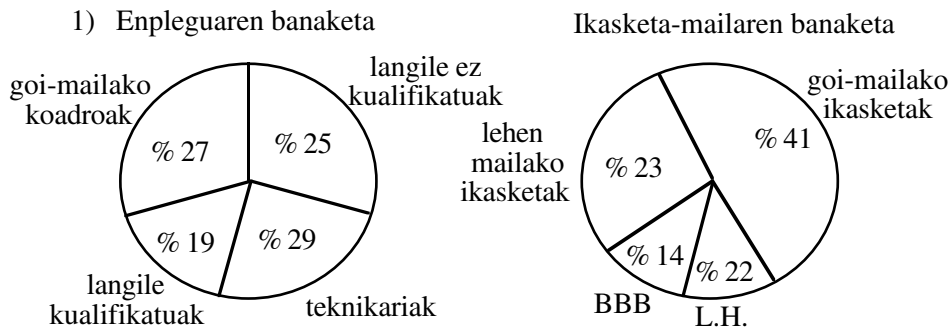
$$\frac{22}{247} \neq \frac{66}{247} \cdot \frac{51}{247} \rightarrow \text{dependentzia dago}$$

$$f(Y/x = 250): \quad \frac{22}{66}, \quad \frac{22}{66}, \quad \frac{22}{66} \quad \text{proportzio berbera hiru herrialdeetan}$$

$$f(Y/x = 2750): \quad \frac{26}{119}, \quad \frac{59}{119}, \quad \frac{34}{119} \quad \text{Bizkaiko proportzioak Arabakoa bikoizten du.}$$

Aurrera jarraitu gabe $f(Y/x = 250) \neq f(Y/x = 2750)$ dela ikusten dugu, hau da, independentziatik nahiko urrun daude.

2.13.



2) Enplegu modalak ikasketak-maila bakoitzean:

Lehen mailako ikasketak	→	Langile ez kualifikatuak
BBB eta UBI	→	Teknikariak
LH	→	Langile kualifikatuak
Goi-mailako ikasketak	→	Goi-mailako koadroak

Ikasketak-maila modalak enplegu-mota bakoitzean:

Langile ez kualifikatuak	→	Lehen mailako ikasketak
Langile kualifikatuak	→	LH
Teknikariak	→	Goi-mailako ikasketak
Goi mailako koadroak	→	Goi-mailako ikasketak

3) Bi aldagaien artean dependentzia argi bat espero da, ikasketak-maila handiagoarentzat, enplegu-maila hobea espero baitzaio.

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1. Ondoko datuak 1956, 1957,.....,1964 urteetako diru-joanectorriaren kopuruak eta prezio-indizeak baldin badira,

Urteak	Diru kop.	Pre.- ind.
1956	4.377	174,8
1957	4.244	167,9
1958	4.284	161,4
1959	4.346	167,7
1960	4.499	167,0
1961	5.013	169,8
1962	4.879	166,6
1963	4.788	159,1
1964	4.678	163,4

Kalkula ezazu koerlazio-koefizientea, datuak sinplifikatzeko ahal duzun aldaketa eginez.

2. 1976. urteko datu hauek ditugu Iran, Irak, eta Israelgo estatuetan:

	X_1	X_2	X_3
IRAN	2	5	0,7
IRAK	1,6	8,2	1,5
ISRAEL	7	44,5	2,5

X_1 aldagaiak ospitaleko ohe kopurua/biztanle adierazten du.

X_2 -k zinetoki-jezarlekuak/1.000 biztanle.

X_3 -k energi kontsumoa/biztanle.

Kalkula ezazu koerlazio-matrizea, koerlazio horien esanahia azalduz.

3. Ondoko taulan Estatuko 100 udal handien banaketa daukagu 1988. urtean banaketa daukagu, X, Y aldagai estatistikoaren arabera.

X: Biztanle kopurua milakatan.

Y: Udal aurrekontua milaka milioi pezetatan.

X/ Y	$150 \geq y \geq 10$	$10 > y \geq 5$	$5 > y \geq 2,5$	$2,5 > y \geq 1,5$
$x \geq 200$	14	7	0	0
$200 > x \geq 100$	3	14	16	0
$100 > x \geq 50$	0	2	20	24

Honakoa eskatzen da:

- 1) X aldagaiaren tarte bakoitzak baldintzatutako Y aldagaiaren banaketa baldintzatuen aurkezpen grafikoa.
 - 2) Estimaturako moda eta mediana banaketa baldintzatu bakoitzarentzat.
 - 3) Komenta itzazu laburki lortutako emaitzak. Zergatik aurrekontuak ez dira hain proportzionalak udalen biztanle kopuruekiko?.
4. Ondoko taulan EAJ/PNV-ri eta EA-ri Gipuzkoan eta Bizkaian botua eman zieten banaketa daukagu:

	EAJ/PNV	EA
Bizkaia	139.431	52.222
Gipuzkoa	44.427	61.031

- 1) Kalkula itzazu “hauteskunde-aukera” ezaugarriaren “probintzia” ezaugarriaren klaseei baldintzatutako maiztasun erlatiboen banaketa baldintzatuak.
- 2) Lortutako banaketak ikusirik, azal ezazu botuen banaketa bi koalizioetan eta bi herrialdeetan independentziaren kasutik hurbil dagoen ala ez. Nolabaiteko menpekotasuna ikusten baduzu, zein motakoa da, zuzena ala alderantzizkoa?
- 3) Aurkez itzazu, sektore-grafikoen bidez, 1) atalean lortutako bi banaketak. Zein abantaila edukiko genuke 2) erantzuteko, lehen 3) atalaren erantzuna emana izan balitz?

5. Hurrengo taulan, (X,Y) aldagaien maiztasun erlatiboen banaketa emanik:

Y	2	4	6
X	10	20	
	0,2	0,1	0,3
	0,2	0,2	0,3

non: X = indibiduoek egindako ikastaroen hilebete kopuruak, eta
Y = saldutako atoiuntzien kopurua, diren.

Honakoa eskatzen da:

- 1) a) X,Y aldagaiak independenteki banatuta al daude? Zergatik?
b) Atera ezazu maiztasun erlatiboen banaketa, bazter-banaketak mantenduz, independenteki banatuak izan daitezzen.
 - 2) Kalkula ezazu r_{xy} koerlazio-koefizientea a) eta b) kasuetarako. Aldagaien aldaketak egitea komenigarria da.
6. Ondoko taulan X,Y aldagaien baterako banaketa daukagu:
X: hiri batean, 100 enpresatetik bakoitzak daukan bezero kopurua da.
Y: bakoitzak daukan bulego -kopurua da.

X / Y	1	2	3	4
]0 ; 1000[10	7	6	1
[1000 ; 3000[12	9	5	3
[3000 ; 5000[9	10	8	2
[5000 ; 8000]	7	6	4	1

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor itzazu bezero kopuruak baldintzatutako bulego kopuruaren banaketa baldintzatuak.
 - 2) X,Y aldagaien banaketak, elkarren arteko independentziatik hurbil al daude taula honetan?
 - 3) Estima ezazu bezero kopuruaren moda.
 - 4) Estima ezazu bezero kopuruaren mediana.
7. Euskal Urtekari Estatistikotik, bizi direneko probintzien eta adin-taldean arabera, Euskal Autonomia Erkidegoko biztanleen sailkapena hartu dugu 1981. urtean finkaturik.

Batezbesteko datuak, mila biztanletara biribildurik agertzen dira:

	Adin-taldeak		
	0-19	20-49	50-89
ARABA	92	110	56
GIPUZKOA	240	287	167
BIZKAIA	406	492	292

Honakoa eskatzen da:

- 1) Marraz ezazu E.A.E.-ren biztanleen sailkapena probintzien arabera erakusten duen sektore-grafikoa.
 - 2) Marraz ezazu E.A.E.-ren biztanleen sailkapena adin-taldean arabera erakusten duen histograma.
 - 3) Estima ezazu adinaren moda probintzi bakoitzerako.
 - 4) Kalkula ezazu probintzi bakoitzak baldintzatutako adin-taldean maiztasun erlatiboan banaketa. Banaketak independentziaren kasutik hurbil aurkitzen al dira taula honetan?
8. Ondoko maiztasun-banaketa bikoitza emanik.

X \ Y	1	2
0	64	16
4	16	n_{22}

Lor ezazu arrazonatuz n_{22} maiztasunaren balioa ondoko hiru kasuetarako:

- 1) $\bar{x} = \bar{y}$ izan dadin.
- 2) Asimetri koefizientea $[g_1(x)]$ zero izan dadin.
- 3) X,Y aldagaien balioak independenteki bana daitezzen.

9. Ondoko maiztasun-taula emanik

X \ Y	1	2	3
3	6	4	4
5	4	3	2
7	4	2	0

Honakoa eskatzen da:

- 1) X aldagaiak baldintzatutako Y aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketak. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 2) Lor ezazu koerlazio-koefizientea ahal den era laburrenean, aldagaien aldaketaren bidez.

10. Izan bedi ondoko maiztasun-banaketa:

X \ Y	(-0,5, 0,5)	(0,5, 1,5)
(-1,5, -0,5)	2	6
(-0,5, 0,5)	2	n_{22}
(0,5, 1,5)	n_{31}	n_{32}

Indibuduo kopurua $N = 20$ izanik.

Lor itzazu n_{22} , n_{31} , n_{32} bide batez ondoko bi baldintzak bete daitezten:

- a) $M_e(x) = 0$
- b) $S_{xy} = 0,2$

Oharra: klase-ordezkaritzak erdiko puntuak hartu behar dira.

11. Ondoko taulan, X,Y aldagaien maiztasun-banaketa bikoitzaren datuak ditugu:

X \ Y	1	2	4
5	1	0	2
10	2	1	0
15	0	1	3

- 1) Lor itzazu (X, Y) aldagaiaren batezbesteko bektorea eta kobariantza-matrizea datu horietarako, ondoko transformazio linealak erabiliz.

$$x'_i = \frac{x_i - 10}{5} \quad y'_j = y_j - 2$$

- 2) Azter ezazu kolektibo horretan X eta Yren artean izan daitekeen independentzia. Eman ezazu erantzuna 1) atalean lortutako datuetan oinarriturik.

12. (X,Y) aldagaiaren ondoko momentuak ditugu:

$$a_{10} = 0 \quad a_{20} = 0,2 \quad a_{30} = 0 \quad a_{40} = 0,2 \quad a_{01} = 0,2 \quad a_{02} = 0,2 \quad a_{11} = 0$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) X aldagaiaren kurtosi koefizientea, emaitza komentatuz.
- 2) S_Z^2 bariantza, $Z = X + Y$ dela jakinik.

13. Hamasei makinetan X, Y aldagaiak neurtu dira, X, funtzionatzen igarotako urteak eta Y, edukitako aberiak, izanik:

X \ Y	3	4	5
1	0	2	3
2	6	0	0
3	0	2	3

Honakoa eskatzen da:

- 1) Y aldagaiaren maiztasun erlatiboen bazter-banaketa.
 - 2) $X = 2$ baldintzatutako Y aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketa.
 - 3) X eta Y aldagaiek banaketa independentea al daukate emandako taulan?
 - 4) r_{xy} koerlazio-koefizientea. Komenta ezazu lortutako emaitza.
14. Ondoko taulan, 1960. urtean hiri batean ospatu ziren ezkontzak, ezkongaien urteen arabera, gutxi gora-behera sailkatuta ditugu:

(Y) Em. adina	(18)	(25)	(35)	(45)	
(X) Giz. adina	16-20	20-30	30-40	40-50	ni.
(25) 20-30	100	1.200	50	10	1.360
(35) 30-40	35	250	125	25	435
(50) 40-60	15	50	75	65	205
n.j	150	1.500	250	100	2.000

Honakoa eskatzen da:

- 1) Bi bazter-banaketen aurkezpen grafikoak, berdintasunak eta ezberdintasunak azalduz.
- 2) Azter ezazu taula honetan daukagun banaketen dependentzia ala independentzia.
- 3) Egin ezazu taula honen menpekotasun linealaren azterketa.

3. KOERLAZIOA ETA ERREGRESIOA

ADIERAZBURUAK

3.1. Ondoko taulak zulatzaile izan nahi duen mila hautagairen sailkapena ematen digu bi aldagai hauen arabera:

X : hautagai bakoitzaren adina, urtetan emanik.

Y : bakoitzak proba batean egindako akats kopurua.

X \ Y	0-4	5-9	10-14	15-19
[20 ; 30)	20	100	130	50
[30 ; 40)	160	270	140	30
[40 ; 50)	20	30	30	20

Honakoa eskatzen da:

- 1) Y-ren X-ekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
- 2) X eta Y-ren arteko koerlazio-koefiziente lineala.
- 3) Komenta itzazu 1) eta 2) ataletan lortutako emaitzak.

3.2. Ondoko maiztasun-taulan Bizkaiko 10 udalen X, Y aldagaien balioak ditugu:

X : euskaldunen proportzioa ehunekotan.

Y : lehen sektorean lanean dihardutenen proportzioa ehunekotan.

X \ Y	30	40	80
10	1	0	0
50	2	2	1
80	0	1	3

Honakoa eskatzen da:

- 1) Y aldagaiaren X-ekiko eta X-en Y-ekiko batezbestekoaren erregresio-lerroak.

- 2) r_{xy} koerlazio-koefizientea.
- 3) Zein izango litzateke menpeko aldagaiaren bariantzaz estimatutako proportzioa X-en Y-rekiko karratu txikienen erregresio lineala egingo bagenu? Eta zein Y-ren X-ekiko karratu txikienen erregresio lineala egingo bagenu?

- 3.3. GREENFIELD HISPANIA enpresa TK-32 eultzkailu merkaturatzen ari da, azkeneko hiru urteetan 200 salmenta agenteen bidez eginez. Zuzendaritzak, agenteen gaitasun profesionalaren aurrerapena aztertu nahian, ondoko maiztasun-taula bikoitza lortu du:

		Urtean zehar lortutako kontratuak			
		2	3	4	5
Enpresan daramatzaten urteak	1	10	30	10	0
	2	10	10	60	20
	3	0	10	30	10

Honakoa eskatzen da:

- 1) Bi aldagaien arteko koerlazio-koefizientea.
 - 2) Bi aldagaien arteko erlazio-maila adieraztea.
 - 3) Karratu txikieneko bi erregresio-zuzenak lortzea eta grafikoki adieraztea.
 - 4) Lortutako kontratuen aldagaiak “enpresan daramatzaten urteak” aldagaia-
rekiko duen batezbestekoaren erregresioa lortzea eta grafikoki adieraztea.
 - 5) Komenta itzazu laburki erregresio-mota bakoitzaren abantailak.
- 3.4. 200 langile dituen MEZ.I lantegiko ekonomialariak produktibitatean eragina daukaten faktoreak aztertu behar ditu. Ikasketa hori hasteko 200 langileak X,Y ezaugarrien arabera sailkatu ditu.

X ezaugarriak, langileak muntaketak egiten daramatzan urte kopurua neurtzen du.

Y ezaugarriak, ordea, langileak 1983. urtean egindako muntaketa kopurua neurtzen du.

X \ Y	Y < 400	400 ≤ Y < 800	800 ≤ Y < 1200	1200 ≤ Y < 1600
1	20	30	0	0
2	20	30	40	0
3	0	0	40	20

Honakoa eskatzen da:

- 1) Langileen banaketari dagokion histograma muntaketa kopuruaren arabera egitea.
- 2) Lorenz-en kurba eta Gini-ren indizea, muntaketa guztien kopuruak 200 langileen artean daukan banaketaren kontzentrazioa aztertzeko.
- 3) X ezaugarriaren maiztasun erlatiboen bazter-banaketa eta $Y \in [800, 1200)$ baldintzatutako X aldagaiaren maiztasun erlatiboen banaketa baldintzatua. Marraz itzazu dagozkien barra-diagramak eta azter itzazu emaitzak.
- 4) Lor ezazu r_{xy} koerlazio-koefizientea eta komenta ezazu lortutako balioa.
- 5) Lor itzazu Y-ren X-ekiko karratu txikiaren erregresio lineala, batezbesteko errore koadratikoa edo hondar-bariantza eta erregresio honetan estimatzen den bariantzaren proportzioa.

3.5. Urteko bost aste zoriz hartuta, lastozko kapelak egiten dituen enpresa batek, ondoko informazioa lortu du:

Tenperatura (gradu zentig.tan)	Egindako kapelak
10	15
5	10
25	77
20	40
30	70

Enpresa honek planifika al dezake bere produkzioa egingo duen tenperaturaren funtzioan? Zergatik?

Zure erantzuna baiezkoa izan bada, zein izango litzateke 32°ko tenperaturarentzat balio estimatua?

3.6. $Y = 0,90X + 0,40$ Y-ren X-ekiko erregresio zuzena dela eta $S_x = 0,48$, $S_y = 0,60$, $\bar{x} = 30$ direla kontsideratuz, honakoa eskatzen da:

- 1) Koerlazio-koefizientea.
- 2) X-en Y-ekiko erregresio-zuzena.

3.7. Ondoko taulan, X,Y, hileroko errenta eta hileroko gastua hurrenez hurren, hiru familitan neurtu dira milaka pezetatan.

X	Y
100	80
60	65
180	125

Honakoa eskatzen da:

- 1) Y-ren X-ekiko erregresio zuzena.
- 2) Zein da, portzentaitan, azaldutako bariantza?
- 3) Zein da 200 mila pezetako errentari dagokion estimatutako gastua?

3.8. Hamar galsoro dituen lagin baten balio hauek ezagutzen dira:

X: uzta ondoren neurtutako errendimendu erreala.

Y: uzta egin aurretik ikerle koalifikatu batek egindako estimazioa.

Galsoroa:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X:	36	36	31	30	40	36	12	16	24	28
Y:	38	30	32	28	38	42	18	20	22	26

- 1) Errepresenta itzazu grafikoki, (X,Y) aldagai bikoitzaren datuak.
- 2) Atera ezazu bi aldagaien arteko koerlazio linealaren koefizientea.
- 3) Y-ren X-ekiko eta X-en Y-rekiko karratu txikienen doikuntza linealak.
- 4) Bi erregresio zuzen hauetan, zein da egokiena? Arrazona ezazu erantzuna.

3.9. Enpresa batean, egiten diren piezen diametroak eta pisuak neurtzen dira. Ondoan 5 piezen neurketak dauzkagu, eta seigarren piezaren diametroa 4m eta 10mm izan dela badakigu, baina pisuaren neurria galdu egin zaigu.

<u>Pieza</u>	<u>Diametroa</u>	<u>Pisua</u>
1	3 m 995 mm	114 kg
2	4 m 0 mm	118 kg
3	4 m 5 mm	120 kg
4	4 m 20 mm	122 kg
5	4 m 30 mm	126 kg

- 1) Zein izango da dauzkagun datuen bidez aurrean daitekeen pisua, karratu txikieneko erregresio lineala egiten badugu?
- 2) Eman ezazu doikuntza honen neurriren bat, zenbateraino ona den esateko.

3.10. Ondoko taulan, bost estaturi dagozkien analfabeto-portzentaia eta jaiotzean duten bizi-itzaropena adierazten dira:

<u>Estatuak</u>	<u>Analfabeto-portzentaia</u>	<u>Bizi-itzaropena</u>
A	40	55
B	80	30
C	4	65
D	50	20
E	10	70

Honakoa eskatzen da:

- 1) Aurrean ezazu jaiotzean 75 urteko bizi-itxaropena duen estatuko analfabeto-kopurua doikuntza linealaren bidez.
- 2) Lor ezazu bi aldagaien arteko koerlazio-koefiziente lineala eta azal ezazu emaitza datuen arabera.

3.11. Bizkaiko sei udalentzat balio hauek lortu dira, X_1 , (1960-1981) tarteko populazio-hazkuntzaren portzentaia eta X_2 , populazio totalarekiko 64 urte baino gehiago duen populazioaren portzentaia izanik.

	X_1	X_2
Ermua	490	4
Zornotza	90	7
Durango	80	8
Gernika	70	11
Ondarroa	40	8
Bermeo	30	9

Honakoa eskatzen da:

- 1) Karratu txikien metodoa aplikatuz, datuei ongien doitzen zaion $\hat{X}_2(X_1)$ zuzena lortzea.
- 2) 1960 eta 1981 urte bitartean Sopelako udaleko hazkuntza % 200ekoa izan dela jakinik, estima ezazu itsasaldeko udal horretan 64 urte baino gehiago duten pertsonen portzentaia 1) atalean lortutako zuzenaren bidez.

3.12. Hamar ikaslek M-I eta T-I asignaturetan atera dituzten notak, ondokoak dira:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M-I:	9	7,5	3	5	7	6,5	4,5	2	8	7,5
T-I:	6,5	8	4	4,5	6,5	6	4	3	7,5	8

- 1) Kalkula itzazu koerlazio-koefizientea eta mugatze-koefizientea.
- 2) Zein proportziotan azalduko litzateke bariantza erregresio linealaren kasuan?

3.13. X, Y aldagaien ondoko datuak emanez,

X	0	1	2	3
Y	3	0	2	4

Honakoa eskatzen da:

- 1) Karratu txikien metodoa erabiliz bigarren graduko polinomioa doitzea.

- 2) Hondar-bariantza eta doikuntzaren egokitasuna aztertzea.
- 3) Zein izango litzateke Y aldagaiaren bariantzaren mugatasunaren portzentaia, doikuntza lineala egingo bagenu?

3.14. Ondorengo taulak X eta Y aldagaien balioak ematen dizkigu lau pertsonentzat:

X:	0	-1	+2	+1
Y:	+2	0	0	+2

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu Y-ren X-ekiko doikuntza parabolikoa, karratu txikiaren metodoa erabiliz.
 - 2) Kalkula itzazu Y-ren balio estimatuak X-en balioentzat eta hondar-bariantza.
 - 3) Zein izango litzateke hondar-bariantza doikuntza linealaren kasuan?
- 3.15. Ondoko taulan, E.A.E.ko ospitaleen banaketa daukagu bi ezaugarrien arabera:

X = Ospitaleen edukiera (ohe kopurua)

Y = Probintziaren kokapena

X/Y	Bizkaia	Gipuzkoa	Araba	n_i
[1–100[14	8	1	23
[100–200[6	9	3	18
[200–500[3	4	2	9
[500–1000[2	2	1	5
[1000–2000[1			1
n_j	26	23	7	56

- 1) Aurkez ezazu grafiko egokienaren bidez, E.A.E.ko ospitaleen banaketa, beraien edukieraren arabera.
Kalkula ezazu, banaketa horren aldakuntza-koefizientea eta interpreta ezazu lortutako emaitza.
Ospitale handienak ertsiz, kopurua erdira murriztera behartuta ikusiko bagina, estima ezazu, ospitale handienaren edukiera, ertsi gabe mantendu beharko liratekeen artean.
- 2) Azter ezazu, X eta Y aldagaien arteko independentzia kolektibo horretan, independentziazatik hurbil dauden ala ez ikusiz. Interpreta itzazu, argi, lortutako emaitzak.
- 3) Lor ezazu Y aldagaiaren X aldagaiarekiko batezbestekoaren erregresioa.

3.16. Estatu espainiarreko nekazal azterketa batean ondoko datuak ditugu:

Data:	1946	47	48	49	50	51	52
Lur landuaren azalera (10^3 Ha):	50	51	52	54	58	63	64
Ekoiztutako Garia (10^6 QM):	2	2,4	2,3	2,6	2,5	2,9	3,3

Eskatzen da:

- 1) Ekoizpenaren azalarekiko karratu txikiaren erregresio lineala.
- 2) Erregresioaren aurkezpen grafikoa puntu-hodeian eta doikuntzaren egokitasunaren kalkulua, grafikoa interpretatuz.
- 3) Lor ezazu 50000 Ha-ri dagokion balio estimatua eta errorea edo hondarra, biak grafikoa interpretatuz.

3.17. 10 zerga aitorten dituen lagin aleatorio batetik, X urteroko sarrera gordina, milioika pezetatan, eta Y ordainduriko zerga pORTzentaiari buruzko datuak lortu dira:

X : 2,56 ; 4,22 ; 5,76 ; 9,88 ; 1,04 ; 2,93 ; 1,61 ; 1,80 ; 4,00 ; 3,01
 Y : 15,40 ; 16,80 ; 19,70 ; 21,70 ; 10,80 ; 15,20 ; 15,90 ; 12,00 ; 18,90 ; 14,1

Eskatzen da:

- 1) Egin ezazu datu hauen adierazpen grafikoa. Grafiko horren arabera, zer nolako erlazioa izan daiteke aldagaien artean?
- 2) Lor ezazu X eta Y aldagaien arteko koerlazio-koefiziente lineala. Aurreko galderan erantzundakoarekin bat al dator? Zein da aldagaiak tipifikatuko bagenitu koerlazio-koefiziente lineala?
- 3) Lor ezazu sarrera gordina jakinik, ordaindutako zerga portzentaia estimatuko ligukeen karratu txikiaren erregresio zuzena.
- 4) Zer adierazten du zuzen honen erregresio-koefizienteak? Zein da hondar-bariantza? Eta zein da doikuntzaren egokitasuna?

3.18. Ondorengo taulan 10 aita eta beraien seme zaharrenen altuerak zentimetrotan dauzkagu:

X (aitaren altuera) : 162 ; 158 ; 168 ; 160 ; 170 ; 155 ; 175 ; 165 ; 173 ; 168
 Y (semearen altuera): 168 ; 165 ; 170 ; 162 ; 173 ; 160 ; 173 ; 165 ; 175 ; 168

Eskatzen da:

- 1) Marraz ezazu banaketa bidimentsional hau errepresentatzen duen sakabanatze diagrama.
- 2) Lor itzazu Y-ren X-ekiko eta X-en Y-ekiko karratu txikiaren erregresio zuzenak, aurreko ataleko diagraman marratuz. Erlazioa ezazu bi zuzenek osatzen duten angelua doikuntzaren egokitasunarekin.
- 3) Hondar-bariantza berdina izango al da bi doikuntzetan? Arrazona ezazu erantzuna.

3.19.

- 1) Lor itzazu, arrazonatuz, $X_2 = b_{21} X_1 + b_{23} X_3 + a$ erregresio-planoaren koefizienteak.
- 2) $X_2 = -0,5X_1 + 1,3X_3 + 5$ erregresio-planoa izanik, zer esanahi daukate $-0,5$, $1,3$ eta 5 koefizienteek?

3.20. Ondoko taulan emandako gurinaren eta margarinaren datuen bidez,

URTEAK	GURINA		MARGARINA	
	P	K	P	K
0	20	98	10	90
1	20	100	11	95
2	21	101	12	100
3	27	101	22	101

Honakoa eskatzen da:

- 1) Prezio-indize ponderatuak Laspeyres eta Paasche-ren metodoaz, hurrenez hurren. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 2) Gurinaren prezioaren saldutako kopuruarekiko erregresio zuzena eta beren aurkezpen grafikoa.
- 3) Gurinaren prezioaren saldutako kopuruarekiko eta margarinaren prezioarekiko erregresio-planoa.
- 4) Azter itzazu bi erregresioak zuk uste duzun koefizienteak edo balioak parekatuz.

3.21. 490 ikasle dituen lagin bati buruzko ikerketa egin da, bi faktoreren bidez beraien emaitzak nola azaltzen diren ikus dezagun.

X_1 delakoa, lortu zituzten puntuak, X_2 adimen-koefizientea eta X_3 ikasketa-orduak/aste izango dira.

$$\text{Eta: } \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,5 \\ 100,6 \\ 24 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_1 = 11,2 & r_{12} = 0,60 \\ S_2 = 15,8 & r_{13} = 0,32 \\ S_3 = 6 & r_{23} = -0,35 \end{matrix}$$

Kalkula ezazu:

- 1) X_1 aldagaiaren X_2 eta X_3 aldagaiekiko erregresio-planoa.
- 2) Mugatze-koefizientea eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.
- 3) Emaitzen irazkina.

3.22. Lagin aleatorio batean bost familia hartu ditugu. Aurrezkiak, sarrerak eta kapitalak neurtuz, ondoko datuak ditugu:

Fam.	S: Aurrezkia	Y: Sarrera	W: Kapitala
1	600 \$	8.000 \$	12.000 \$
2	1.200	11.000	6.000
3	1.000	9.000	6.000
4	700	6.000	3.000
5	300	6.000	18.000

Honakoa eskatzen da:

- 1) S-ren Y-rekiko erregresio-zuzena eta, marraztu ondoren, a eta r^2 koefizienteak interpretatzea.
 - 2) S-ren, Y eta W-rekiko erregresio lineala. Kasu honetan Y-ren koefizientea desberdina al da? Zein da koefizienterik hoberena S eta Y-ren arteko erlazioa adierazteko?
 - 3) Zein izango da familia baten aurrezkia, kapitala 5.000 \$ eta sarrera 8.000 \$ izanik?
 - 4) Zein proportziotan igoko da aurrezkia, kapitala konstantea izanik, sarrerak 2.000 \$ igotzen badira?
 - 5) Zer gerta daiteke, sarrerak 1.000 \$ igotzen badira eta kapitala 3.000 \$?
 - 6) Zein proportziotan azaltzen da edota azaldu gabe geratzen da S-ren bariantza?
- 3.23. Aurreko ariketan daukagun lagin berbera kontsideratuz, beste aldagai bat kontutan hartuko dugu: N, haur kopurua, hain zuzen.

<u>Familia</u>	<u>N: Haurrak</u>
1	5
2	2
3	1
4	3
5	4

Kalkula ezazu:

- 1) S-ren Y, W, N-ekiko hiperplano tipifikatua.
 - 2) $r_{s,y,w,n}^2$ eta beronen esangura.
 - 3) Komenta itzazu laburki lortutako emaitzak.
- 3.24. Lau indibiduotan jaso diren balioak X_1 aldagaiarekiko hauek izan dira:

0 0 0 4

Indibiduo horientzat gainera X_1 aldagaiaren karratu txikiaren erregresio linealaren funtzioa X_2, \dots, X_n aldagaiekiko eta aurreneko bi indibiduoiei dagozkien hondarrak lortu dira.

Hondarrak $e_1 = -1$, $e_2 = +1$ izanik eta karratu txikiaren erregresio linealaren propietateak kontutan harturik,

Honakoa eskatzen da:

- 1) Beste bi hondarren balioak; e_3 , e_4 balioak, hain zuzen.
- 2) $r_{1.23\dots n}$ koerlazio anizkoitzaren balioa.

3.25. Garapen bidean dagoen lurralde-multzo batean, ondoko aldagai estatistikoei dagozkien balioak jaso dira:

X_1 : goi-mailako tituluen batezbesteko kopurua /milaka biztanle.

X_2 : "per capita" esportatutako balioa.

X_3 : Errenta erabilgarria/biztanle.

Datu-matrizearentzat, ondoko koerlazio-matrizea atera da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & +0,48 & +0,52 \\ +0,48 & 1 & +0,98 \\ +0,52 & +0,98 & 1 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) X_3 aldagaiaren X_1 aldagaiearekiko erregresio-zuzena (biak tipifikatuak daudela kontsideratuz).
- 2) X_3 -ren X_1 , X_2 aldagaiekiko erregresio-planoa (hiru aldagaiak tipifikatuak daudela kontsideratuz).
- 3) Konpara itzazu lortutako bi doikuntzak, beren egokitasunak aztertuz.

3.26. Lau estatutan ondoko ezaugarriak neurtu ditugu:

X_1 : Nazio Produktu Gordina / biztanle dolarretan.

X_2 : Biztanle-kopurua sendagile bakoitzeko.

X_3 : Zerbitzu-sektorearen produkzioa produkzio osoarekiko, ehunekotan.

X_1	X_2	X_3
1000	700	10
3000	700	50
5000	700	50
7000	300	50

Honakoa eskatzen da:

- 1) b_{12} eta b_{13} koefizienteak $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresiorako.
- 2) β_{12} eta β_{13} koefizienteak $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ erregresiorako.

- 3) Zein da erregresorerik garrantzitsuena erregresio honetan? X_2 ala X_3 ? Arrazona ezazu.
- 4) X_2 eta X_3 aldagaiak X_1 aldagaiaren erregresioan sartzeak, bat bakarrik sartu ordez, merezi al du? Neur ezazu lortutako abantaila.

3.27. Ondoko datu-matrizean, lau indibiduatori eta X_1 , X_2 , X_3 aldagaiei dagozkien datuak ditugu:

X_1	X_2	X_3
-1	+3	+6
-1	+3	+4
-1	+1	+2
+3	+1	0

Honakoa eskatzen da:

- 1) X_3 aldagaiaren X_1 , X_2 aldagaiekiko karratu txikieneko erregresio-planoa.
- 2) Erregresio-plano berbera baina aldagaiak tipifikaturik daudenean.
- 3) Erregresio-koefiziente guztien irazkin edo komentario laburra.
- 4) $r_{3,12}$ koerlazio-koefiziente anizkoitzaren balioa, r_{13} eta r_{23} balioekin parekatuz.
- 5) Erregresio honen hondarrak edo erroreak. Zein izango da beraien balioen karratuen batezbestekoa?
- 6) $r_{12,3}$ koerlazio-koefiziente partziala eta gero r_{12} koefizientearekin parekatzea.

3.28. Irakasle batek bi azterketa partzialetan eta azkeneko azterketan ateratako puntuazioen arteko erlazioa aztertu nahi du.

X_1 , X_2 , eta X_3 aldagaiek lehenengo partzialeko, bigarreneko eta azkeneko azterketako ikasleen puntuazioak, hurrenez hurren, errepresentatzen badituzte eta 100 ikasle dituen lagin batean emaitza hauek eduki baditugu:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = 6,9 & \bar{x}_2 = 7 & \bar{x}_3 = 74 \\ S_1 = 1,0 & S_2 = 0,8 & S_3 = 9 \\ r_{12} = 0,60 & r_{13} = 0,70 & r_{23} = 0,65 \end{array}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Kobariantza-matrizea.
- 2) Aurrean ezazu ikasle baten azkeneko azterketako puntuazioa, beste bi azterketetan 9 eta 7, hurrenez hurren, lortu baditu.
- 3) Koerlazio-koefiziente anizkoitza eta $r_{13,2}$ koerlazio-koefiziente partziala.

3.29. Lau indibiduotan lortutako datuak X_1 , X_2 , X_3 aldagaien arabera ondokoak dira:

X_1	X_2	X_3
1	1	1
2	1	1
3	2	1
4	2	3

Honakoa eskatzen da:

- 1) Batezbesteko-bektorea eta kobariantza-matrizea.
 - 2) Koerlazio-matrizea.
 - 3) X_1 aldagaiaren X_3 -rekiko eta X_2 -ren X_3 -rekiko erregresio-zuzenak. Bazter ezazu X_1 , X_2 aldagaietan X_3 aldagaia duen eragina edo efektua. Kalkula ezazu aldagai depuratu horien koerlazio-koefizientea.
 - 4) X_1 , X_2 -ren arteko koerlazio-koefiziente partziala.
 - 5) X_1 aldagaia X_2 , X_3 aldagaien konbinazio lineal bezala estimatzen duen karratu txikiaren erregresio-planoa.
 - 6) $r_{1.23}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza. Erlaziona ezazu planoari dagokion hondar-bariantzarekin.
- 3.30. Korporazio industrial bateko Pertsonal Departamentuak, asteko alokairua, zerbitzu-denbora eta enplegatuen adinen arteko erlazioa aztertu nahi du gerentzi-mailan. Horretarako 8 enplegatu aukeratu ditu eta ondoko datu-taula hau beraiei dagokie:

Asteko alokairua	Zerbitzu-denbora	Adina
52.000 pta.	27	46
56.000	31	57
44.000	18	41
41.000	21	45
43.000	29	55
34.000	7	28
32.000	3	28
42.000	18	46

Honakoa eskatzen da:

- 1) Alokairu-aldagaiaren beste bi aldagaiekiko erregresio-planoaren ekuazioa.
- 2) Erregresio-planoaren ekuazioa, aldagaia tipifikatuak izanik. Komenta itzazu erregresio horren koefizienteak beste erregresioaren koefizienteekin parekatuz.
- 3) Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna.
- 4) Zein da aurrikusten dugun alokairua, 15 urteko zerbitzu-denbora eta 47 urteko adina dituen enpleguarentzat?

5) Atera itzazu (Alokairu, Zerbitzu-denbora) eta (Alokairu, Adina) bikoteen koerlazio partzialak.

Konpara itzazu, halaber, koerlazio horiek koerlazio totalekin, aldagaien arteko elkar-aldaketak azalduz.

3.31. Ondoko sei urteko jarraietan, X_1 , X_2 , X_3 aldagaiek hartzen dituzten balioak dauzkagu:

X_1 : Nazio-Produktu Gordina	X_2 : Gasolina- -kontsumoa	X_3 : Elektrizitate- -kontsumoa
8	4	20
10	3	22
12	6	23
13	6	26
15	7	27
18	8	30

Honakoa eskatzen da:

- 1) $r_{12,3}$, $r_{13,2}$, $r_{23,1}$ koerlazio partzialak.
- 2) X_1 aldagaiaren erregresio-planoa eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.

3.32. X_1 , X_2 , X_3 aldagaietarako daukagun batezbesteko bektorea eta kobariantza-matrizea hauek dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) X_2 aldagaiaren X_1 , X_3 aldagaiekiko erregresio-planoaren ekuazioa.
- 2) Hondar-bariantza eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.
- 3) $r_{12,3}$ eta $r_{23,1}$ koerlazio partzialen koefizienteak r_{12} eta r_{23} koerlazio-koefizienteekin parekatu.
- 4) Komenta ezazu, laburki, X_2 aldagaiak X_1 , X_3 aldagaiekin dituen erlazioak.

3.33. Lau familiarako ondoko datuak ditugu:

X_1 : hileroko sarrerak milaka pezetatan.

X_2 : hileroko gastua ikuskizun publikotan milaka pezetatan.

X_3 : daukaten bideo kopurua.

X_1	X_2	X_3
100	8	0
120	9	0
130	9	0
170	2	1

Batezbesteko bektorea eta kobariantza-matrizeak hauexek dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 130 \\ 7 \\ 0,25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 650 & -62,5 & 10 \\ -62,5 & 8,5 & -1,25 \\ 10 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Baina \mathbf{L} matrizean bi errore ditugu.

Honakoa eskatzen da:

- 1) Zein dira errore horiek?
- 2) Ordezka itzazu egiazko balioez.
- 3) Ikuskizun publikotan egindako gastua beste bi aldagaien bidez azaltzen duen erregresio-plano tipifikatua.
- 4) Lor ezazu $r_{2,13}^2$, β_{ij} eta r_{ij} koefizienteen bidez.
- 5) Lor ezazu $r_{12,3}$ koerlazio partzialaren koefizientea, hau da, sarrera eta ikuskizun publikotan daukaten gastuen arteko koerlazio-koefizientea bideo kopurua kontrolatuz. Konpara ezazu r_{12} koefizientearekin eta komenta ezazu bi koefizienteen arteko desberdintasuna.

3.34. Bost urteko ondoko segidak emanez:

Urteak	Y	X_1	X_2	X_3
1955	20	4	10	2
1956	22	5	12	3
1957	23	7	13	5
1958	24	6	16	6
1959	26	8	19	9
1960	?	8	22	12

- non: Y = Nazio-Errenta, milaka milioi pezetatan.
 X_1 = Nekazal sektoreko produktu gordina, milaka milioi pezetatan.
 X_2 = Industri sektoreko produktu gordina, milaka milioi pezetatan.
 X_3 = Hezkuntz sektoreko aurrekontua, milaka milioi pezetatan.

Honakoa eskatzen da:

- 1) Nazio-Errenta eta Nekazal produkzioaren arteko koerlazioa, Industri produkzioa eta hezkuntz sektorea konstante izanik.

- 2) Nazio-Errenta eta Industri produkzioaren arteko koerlazioa Nekazal sektorea eta Hezkuntza sektorea konstante izanik.
- 3) Nazio-Errenta eta Hezkuntz sektorearen arteko koerlazioa X_1 , X_2 konstante izanik.
- 4) Nazio-Errentaren beste hiru aldagaiekiko erregresio-hiperplanoa.
- 5) $Y = N-E$ estimatua 1960. urterako, beste aldagaien balioak taulakoak izanik.
- 6) Y eta (X_1, X_2, X_3) multzoaren arteko koerlazioa.
- 7) Kalkula ezazu (X_1, X_2, X_3) ren bidez $N-E$ auresanda, dukagun batezbesteko errorea.

3.35. Ekialde Hurbileko bost estaturentzat, ondoko aldagai jarraiei dagozkien balioak ditugu:

X_1 : hazkuntza demografikoaren portzentaia.

X_2 : zineko jarlekuen batezbesteko kopurua/milaka biztanle.

X_3 : esportatutako balioa/biztanle dolarretan.

	X_1	X_2	X_3
Afganistan	2,5	0,7	13
Jordania	3,2	8,4	63
Libano	3,1	33,0	244
Siria	3,3	7,6	140
Turkia	2,4	31,5	36

Honakoa eskatzen da:

- 1) X_2 aldagaiaren X_1 eta X_3 -ekiko karratu txikienen erregresio-planoa.
- 2) Zein izango litzateke erregresio-planoa, hiru aldagaiak tipifikatuak izango balira?
- 3) Doikuntzaren egokitasunaren azterketa.
- 4) Ondoko koerlazio-koefiziente partzialak; $r_{12,3}$ eta $r_{23,1}$, hain zuzen.
Konpara itzazu koerlazio horiek r_{12} , r_{13} koerlazio-koefiziente totalekin.

3.36. X_1 , X_2 , X_3 aldagaien ondoko estatistikoak ezagutuz:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_1 = 1 \\ S_2 = 5 \\ S_3 = 20 \end{matrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,4 \\ 0,4 & 1 & 0,4 \\ -0,4 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Lor itzazu X_3 aldagaiaren X_1 , X_2 aldagaiekiko erregresio-planoa eta erregresio-plano tipifikatua.
- 2) Komenta itzazu lortutako b eta β koefizienteak, beraien arteko desberdintasunak adieraziz.

3) Lor ezazu $r_{12,3}$ koerlazio-koefizientea eta komenta ezazu beraren esan-gura.

3.37. Bost automobil-motan ondoko aldagaiak neurtu dira:

X_1 : prezioa milaka milioi pezetatan

X_2 : zerotik ehun kilometro/ordu abiadurara pasatzeko azelerazio-denbora.

X_3 : potentzia Z.P.tan.

X_1 :	1	2	3	4	5
X_2 :	15	15	10	10	5
X_3 :	60	90	110	130	160

1) Datu horiei dagozkien estatistikoak ondokoak dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 48 \\ -5 & 14 & -120 \\ 48 & -120 & 1060 \end{bmatrix}$$

baina, errore bat dagoenez, ikasleak kalkulurik egin gabe zein den ikusi behar du.

Zergatik ezin du balio horrek egiazkoa izan?

- 2) Kalkula itzazu egiazko balio hori eta $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio-planoa.
- 3) Konpara itzazu X_1 aldagaiaren erregresioan X_2, X_3 erregresore bakoitzak daukan eragina “ β ” koefizienteen bidez.

3.38. Bost unitate estatistiko dituen talde batentzat X_1, X_2, X_3 aldagaiak neurtu dira, kobariantza-matrizea ondokoa delarik:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 16 & 10 \\ 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

X_3 -ren X_1, X_2 -ekiko karratu txikiaren erregresio lineala kontsideratuz.

Honakoa eskatzen da:

- 1) S_e^2 ; hondar-bariantza eta $r_{3,12}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza.
- 2) Erregresio horren lehen hiru hondarrak $e_1 = 1, e_2 = -2, e_3 = 0$ izanik, lor itzazu e_4 eta e_5 .

3.39. 1) Defini ezazu X_1, X_2 aldagaien arteko koerlazio partzialaren koefizientea X_3, \dots, X_n aldagaien eragina baztertuz.

2) Lau indibiduo dituen multzo baterako kobariantza-matrize adjuntua ondokoa izanik:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} 18 & -36 & 0 \\ -36 & 288 & \mathbf{L}_{23} \\ 0 & \mathbf{L}_{23} & 8 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

lor ezazu \mathbf{L}_{23} adjuntua, X_2 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko erregresioaren hondarrak ondokoak izanik:

$$\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}$$

eta, X_3 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko erregresioarenak ondokoak izanik:

$$4, 4, 0, -8$$

EBAZPIDEAK

3.1.

1) Klase-ordezkarri bezala $x = 25$ balioak baldintzatutako Y aldagaiaren banaketa ondokoa da:

$$\begin{array}{l} y_i = \quad 2 \quad \quad 7 \quad \quad 12 \quad \quad 17 \\ n_i = \quad 20 \quad 100 \quad 130 \quad 50 \\ f_{i/25} = \frac{1}{15} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{13}{30} \quad \frac{1}{6} \end{array}$$

banaketa baldintzatuaren bidez $\bar{y} / (x = 25) = 10,5$ lortu dugu analogikoki

$$\bar{y} / (x = 35) = 7,3$$

$$\bar{y} / (x = 45) = 9,5$$

azkenik, batezbesteko erregresioaren puntuak:

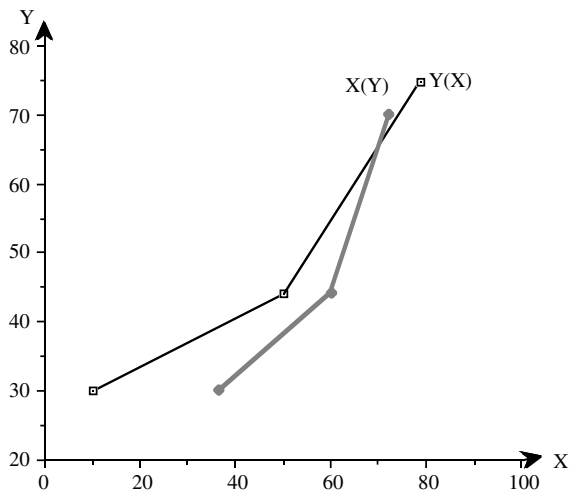
x	25	35	45
\hat{y}	10,5	7,3	9,5

2) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$ matrizetik $r = -0.185$ lortzen da

3) Batezbestekoaren erregresioak, datuen erlazio lineala oso ahula dela detektatzen du, baita koerlazio-koefizientearen balio absolutuak ikusterazten duelarik ere.

3.2.

1) $x = 10$	50	80
$\hat{y} = 30$	44	70
$y = 30$	40	80
$\hat{x} = 36,6$	60	72,5



2) $r = 0,62$

3) Bi kasuetan proportzio berdina : % 38,4koa.

3.3.

1) X aldagaia, enpresan daramatzaten urteak eta Y aldagaia, urtean zehar lortutako kontratuak izanik.

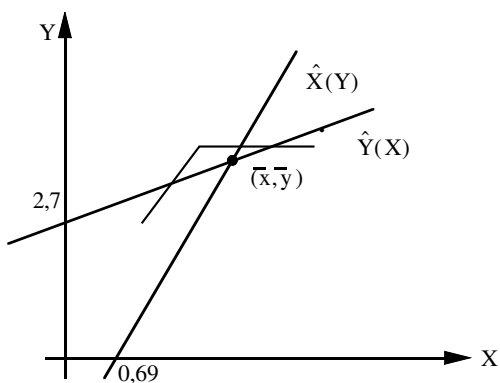
$$r_{xy} = 0,420$$

2) $r_{xy}^2 = 0,176$ (%17,6) azaldutako bariantza

Bi balioek erlazio ahula adierazten dute.

3) $\hat{Y} = 0,5X + 2,7$

$$\hat{X} = 0,35Y + 0,697$$



4)	X	1	2	3
	Y	3,2	7,33	3,46

(Puntu-lerroa, grafikoan adierazi)

- 5) Erlazio linealak eredu bat dagoela esan nahi du, dagoen erlazioarentzat oso eredu sinplea izanik.

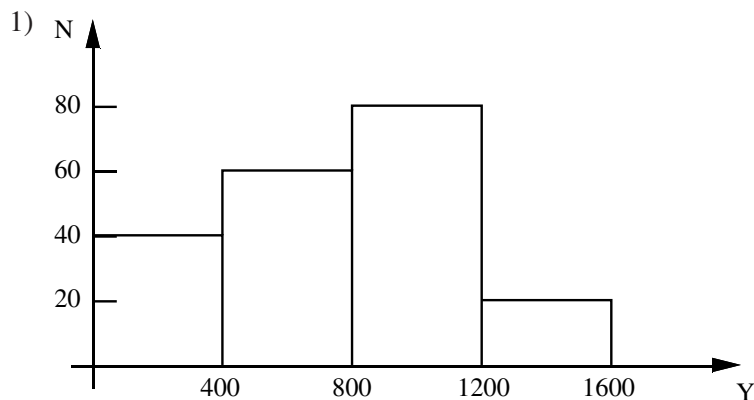
Batezbestekoaren erregresioa erlazio-eredu bati lotuta ez egonik, datuei jarraitzeko askeagoa da.

Erregresio-lerroak, irudian ikusten dugunez linealki nahitaez jarraituta emaitza arraroak erakusten dizkigu.

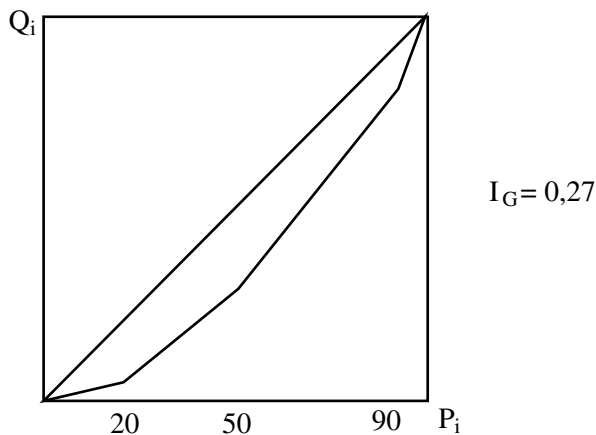
Lagin-espaziotik urrunduta, hauxe ikusten dugu: “enpresan -1 urte izanik gutxi gora-behera 2 salmenta kontratu” (“200 urte izanez, 103 lortutako kontratuak”...).

Bestalde, batezbestekoaren erregresioaren ibilbidea, ez da proportzionalki igotzen. Malda lehenengo zatian askoz handiagoa da.

3.4.

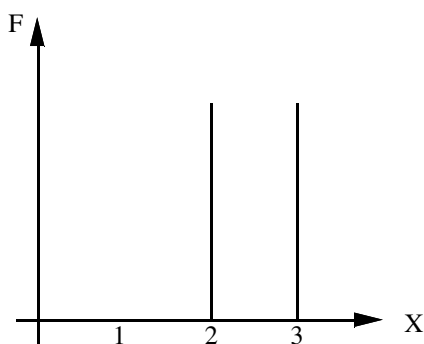
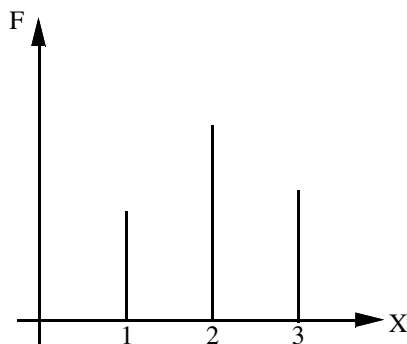


2)	P_i	20	50	90	100
	Q_i	5,26	28,9	81,5	100



3)

x_i	f_i	$f_i(x_i/y \in [800;1200])$
1	0,25	0
2	0,45	0,5
3	0,30	0,5



Ikusten denez maiztasun erlatiboen banaketa hauek oso desberdinak dira. Bazter-banaketari dagokionez honakoa esan dezakegu: langileen %50ak bi urte daramatza enpresan eta beste %50ak ia zati berdinetan urte bat edo hiru. Banaketa baldintzatuari dagokionez, ordea, honakoa ikusten dugu: [800; 1200) tartean egindako muntaketak dituztenetatik %50ak bi urte daramatzala enpresan eta beste %50ak hiru.

4) $r_{xy} = 0,707$

Erlazio zuzena eta nabaria adierazten du koerlazio-koefizienteak, taula ikusita ere pentsa daitezkearik.

5) $Y = 350,68 X + 41,09$

$S_e = 67334,4$, $r_{xy} = 0,499 \approx 0,5$

Azaldutako bariantza % 50ekoa da.

3.5.

$r = 0,95$, $r^2 = 0,90$ izanik, aldagaien arteko erlazio lineala sakona dela esan daiteke. Ondorioz, enpresa honek bere produkzioa egingo duen tenperaturaren arabera planifika dezake, laginak hartutako datuak fidagarriak eta nahikoak kontsideratzen baditu.

Temperatura : X, Egindako kapelak : Y, deiturik.

$$\bar{x} = 18 \text{ gradu} \quad S_x = 9,27 \text{ gradu} \quad S_{xy} = 241,8$$

$$\bar{y} = 42,2 \text{ kapela} \quad S_y = 27,44 \text{ kapela}$$

$$Y = 2,8138X - 8,449$$

$$x = 32^\circ \Rightarrow \hat{y} = 81,6 \cong 82 \text{ kapela izango litzateke estimatutako balioa.}$$

3.6.

$$1) r_{xy} = 0,72$$

$$2) \hat{X} = 0,576Y + 14,22$$

3.7.

$$1) \bar{x} = 113,33 \quad S_x = 49,88 \quad S_{xy} = 1266,6$$

$$\bar{y} = 90 \quad S_y = 25,88$$

$$\hat{Y} = 0,51X + 32,33 \quad \hat{y} = 134,33$$

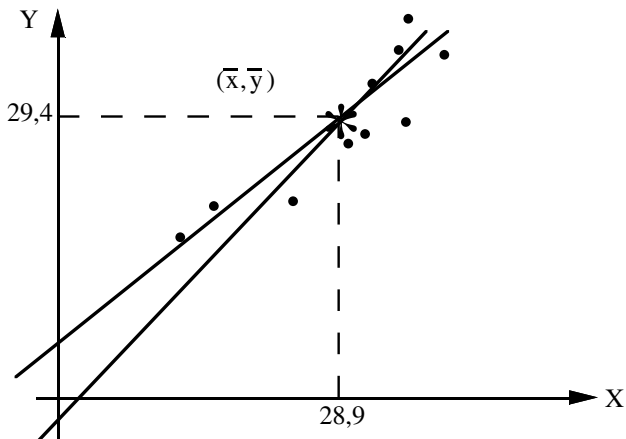
$$2) r = 0,9958 \quad r^2 = 0,9917 \quad \%99,17$$

Ia guztiz azalduta geratzen da bariantza.

$$3) x = 200 \Rightarrow \hat{y} = 258,892$$

3.8.

1)



$$2) r_{xy} = 0,901$$

$$3) \hat{Y} = 0,8024X + 6,208$$

$$\hat{X} = 1,0116Y - 0,843$$

4) $r^2 = 0,812$ bi doikuntzetan bariantzaren %81,2 gelditzen da mugatuta.

3.9.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4,01 \text{ m.} \\ 120 \text{ kg.} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,00017 & 0,05 \\ 0,05 & 16 \end{bmatrix}$$

Zuzenean lortutako estatistiko horien bitartez (egokiena kalkulagailuaz egiten denean) edo ondoan daukagun bezala aldagaien aldagetak eginez:

$$\bar{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 6,8 & +5 \\ +5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X' = \frac{1000(X - 4)}{5}$$

izanik

$$Y' = \frac{Y - 120}{2}$$

(egokiena kalkulagailurik gabe eginez)

Honakoa lortzen da:

$$\hat{P} - 120 = 294,12 (D - 4,01) \text{ nondik } \hat{P} (4,01) = 120 \text{ Kg.}$$

2) $r = 0,9587$, % 92an P aldagaiaren bariantzatik azaltzen delarik.

3.10.

1) Ondoko hauen bidez:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 36,8 \\ 48 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 768,96 & -454,4 \\ -454,4 & 386 \end{bmatrix}$$

Honakoa lortzen da:

$$\hat{X}_1 - 36,8 = -1,17(X_2 - 48)$$

$$\hat{X}_1(75) = 5,21$$

2) $r = -0,834$ bost estatuen multzoan, deskribatutako bi aldagaientzat, alderantzizko erlazio lineala nahiko sakona dela adierazten du.

3.11.

Hauen bidez

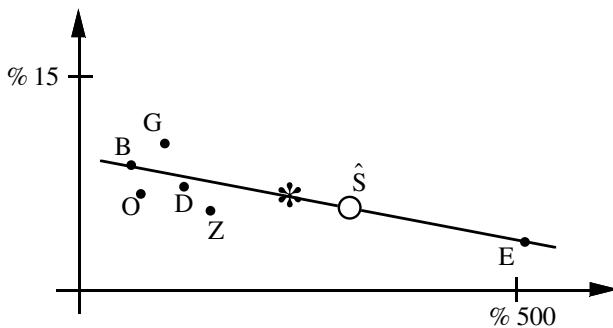
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 133,3 \\ 7,83 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 25.888,8 & -279,4 \\ -279,4 & 4,472 \end{bmatrix}$$

lortzen da:

$$1) \hat{X}_2 = 9,27 - 0,0108 X_1 \quad \hat{X}_2(200) = \%7,11$$

(Urtekari estatistikoak Sopelako aiton-amonen proportzio erreala ematen digu: zifra biribilduta, % 7)

Taldekatu gabeko datuen ariketetan paregabekoa da puntu-hodeiaren balio deskribatzailea.



Komentatu behar dena hau da: nahiz eta lortutako koerlazioa handia izan, udal kopurua txikia dela eta Ermuak doikuntzan duen eragina gehiegizkoa.

Ondorioak ateratzeko lagin zabalagoak beharko dira. Sopelarekiko dena dela, asmatzen du.

3.12.

$$\bar{m} = 6 \quad \bar{t} = 5,8 \quad S_m = 2,168 \quad S_t = 1,720 \quad S_{mt} = 3,35 \quad r = 0,898$$

% 83,7 adierazita eta % 16,3 adierazi gabe geldituko lirateke.

3.13.

$$1) \hat{Y} = 2,75 - 3,25X + 1,25X^2$$

$$2) S_e = 0,3125 \quad S_y^2 = 2,1875 \quad S_e^2 / S_y^2 = \%14,3$$

Doikuntza parabolikoak, Y-ren bariantzaren %85,7a aurrezaten du.

3) $r^2 = 14,28$ (doikuntza lineala askoz txarragoa da eta nahikoa litzateke puntu-hodeia marraztea horretaz ohartzeko).

3.14.

1) $\hat{Y} = 2 + X - X^2$

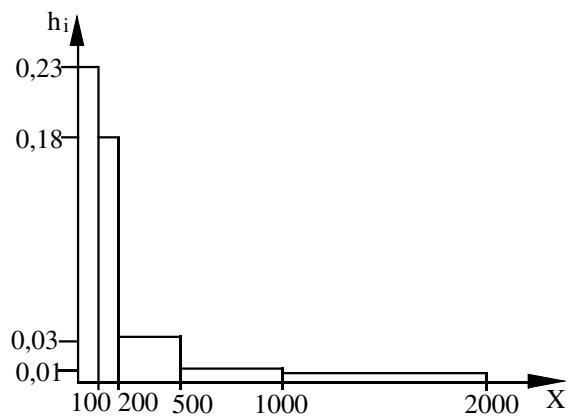
2) $+2, 0, 0, +2$ $S_e^2 = 0$ (%100 ondo doituta dago)

3) $r_{xy} = 0$ $S_e^2 = 1$ (errorea %100ekoa da)

3.15.

1)

x_i	h_i
[1-100)	0,23
[100-200)	0,18
[200-500)	0,03
[500-1000)	0,01
[1000-2000)	0,001



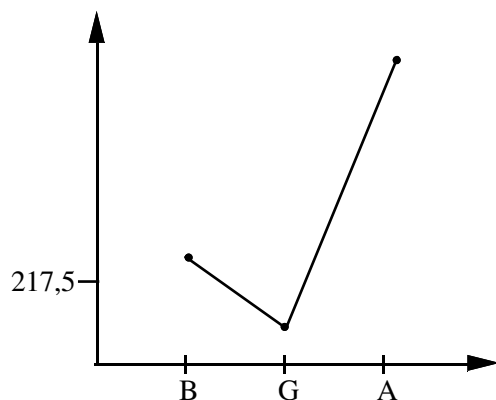
$g_0(x) = 1,21 \Rightarrow$ Sakabanatze handia dago batezbestekoarekiko; beraz, batezbestekoa ez da adierazgarria.

$Me(x) = 127,8$ (ohe) ≈ 128 ohe.

2) X eta Y aldagaiak ez dira independenteki banatzen kolektibo honetan, ospitaleen banaketa edukieraren arabera desberdina baita probintzia bakoitzean eta E.A.E.ko banaketaren desberdina.

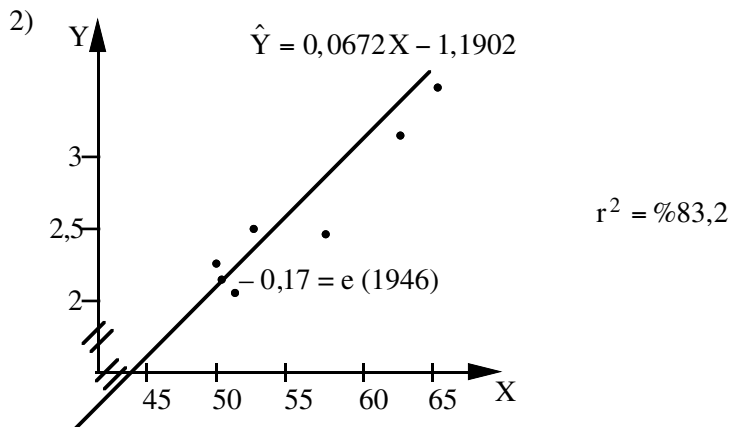
3)

\hat{y}	$\hat{x} = \bar{x} / y = y_j$
Bizkaia	$\hat{x}_B = 217,5$
Gipuzkoa	$\hat{x}_G = 202,34$
Araba	$\hat{x}_A = 278,64$



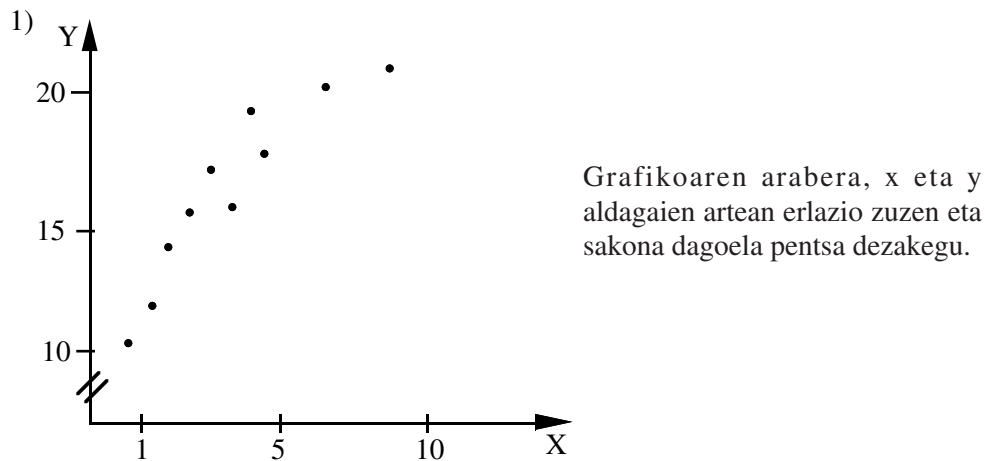
3.16.

- 1) X : Azalera $\hat{Y} = 0,0672 X - 1,1902$
 Y : Ekoizpena



- 3) $\hat{y} (50) = 2,17 (10^6 \text{ Qm})$ $e(1946) = 2 - 2,17 = -0,17 (10^6 \text{ Qm})$

3.17.



- 2) $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0,907 \Rightarrow$ Aldagaien arteko erlazio lineala nahiko sakona da eta zuzena. Beraz, grafikoarekin bat dator.

$$T_x = \frac{X - \bar{x}}{S_x} \quad r_{txty} = r_{xy} = 0,907$$

$$T_y = \frac{Y - \bar{y}}{S_y}$$

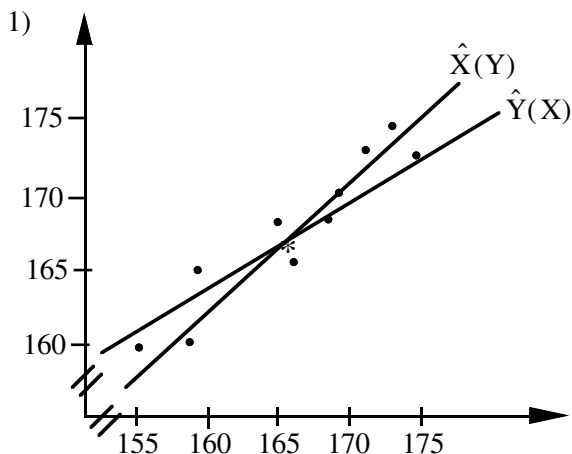
$$3) \hat{Y} = 1,1847X + 11,69 \quad \text{K.T.E.L.}$$

$$4) b_{yx} = \frac{S_{yx}}{S_x^2} = 1,1847 \Rightarrow \text{Sarrera gordina unitate batetan handitzen bada, ordainduriko zergaren portzentaia 1,1847 - an handituko litzateke.}$$

$$S_e^2 = S_y^2(1 - r^2) = 1,8243$$

$$r_{xy}^2 = 0,8226 \quad \text{K.T.E.L. zuzena nahiko ongi doitzen da puntu hodeian.}$$

3.18.



$$2) \hat{X} = 1,215Y - 38,59$$

$$\hat{Y} = 0,691X + 53,6$$

$$\bar{x} = 165,4$$

$$\bar{y} = 167,9$$

Bi zuzenen arteko angelua oso txikia da, beraz koerlazio-koefizientea batetik hurbil egongo da, malda positiboa baitute.

$$r_{xy} = 0,92 \sim 1$$

3) Bi doikuntzen egokitasuna % 84a da ($r^2 = 0,84$), eta menpeko aldagaiaren bariantza proportzio berberean dago azalduta.

$S_e^2 = S_y^2(1 - r^2) \neq S_x^2(1 - r^2)$, hau da, hondar-bariantzak desberdinak dira baina beraren proportzioa menpeko aldagaiaren bariantzarekiko berbera da.

3.19.

2) Koefizienteen esanahia hau da:

X_2 aldagaiaren aurreanean X_1 aldagaiaren unitate bakoitzetik erdia jeisten dela eta X_3 aldagaiaren unitate bakoitzetik, 1,3 gehitzen dela. Halaber, 5 balioa plano horren jatorriaren ordenatua da. Hots, $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \hat{x}_2 = 5$ eta adibidez $x_1 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow \hat{x}_2 = 5,8$.

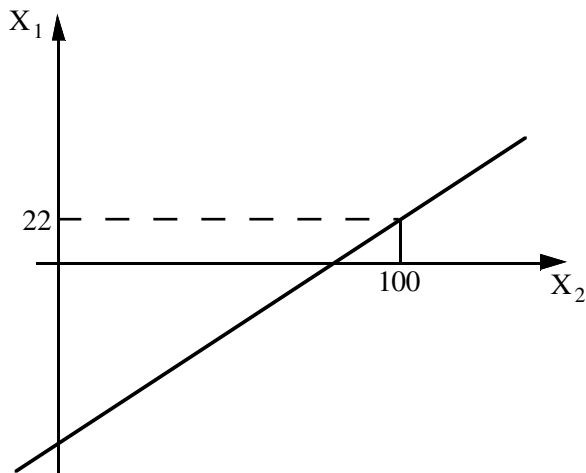
3.20.

1) t	L_t	P_t
0	100	100
1	103,15	103,22
2	109,72	109,97
3	161,75	163,33

Dakusagunez, emaitzak oso antzekoak dira; urtez urte kopuruen proportzioak ez baitira oinarritzko denborarekiko oso desberdinak.

2) X_1 : P (Gurina), X_2 : K (Gurina) izanik

$$\hat{X}_1 - 22 = 1,33 (X_2 - 100)$$

3) X_1, X_2 aurrenekoak eta X_3 : P (Margarina) izanik

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 22 \\ 100 \\ 13,75 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8,5 & -2 & 14 \\ & 1,5 & 3,5 \\ & & 23,18 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_1 - 22 = -0,117 (X_2 - 100) + 0,622 (X_3 - 13,75)$$

4) Mugatze-koefizienteak parekatuz:

$$r^2 = 0,31 \quad \text{eta} \quad r_{1,23}^2 = 0,996$$

Ikusten denez, zuzenaren kasuan, menpeko aldagaiarentzat azaldutako bariantza % 31koa bakarrik da. Planoaren kasuan, ordea, % 99,6koa.

Hortik ateratzen dugun ondorioa hau da: gurinaren prezioen aurranean ondasun honen kopurua ez dela garrantzitsua eta margarinaren prezioa, aldiz, erabakiorra dela.

3.21.

1)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,32 \\ 0,6 & 1 & -0,35 \\ 0,32 & -0,35 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X}_1 - 18,5 = -\frac{12,2}{15,8} \cdot \frac{\mathbf{R}_{12}}{\mathbf{R}_{11}} (X_2 - 100,6) - \frac{11,2}{6} \cdot \frac{\mathbf{R}_{13}}{\mathbf{R}_{11}} (X_3 - 24)$$

$$\hat{X}_1 - 18,5 = 0,575 (X_2 - 100,6) + 1,127 (X_3 - 24)$$

$$2) \quad r_{1,23} = 0,82 \quad r_{1,23}^2 = 0,68$$

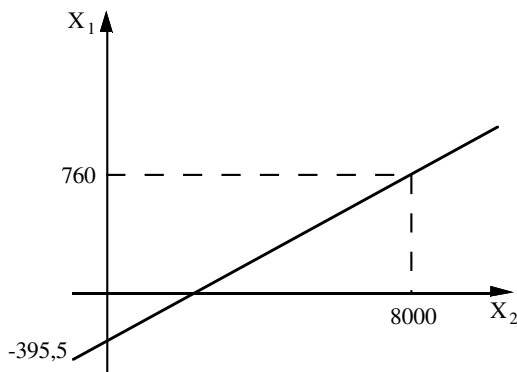
3) $r_{12}^2 = 0,36$ izanik, hau esan dezakegu: lortutako puntuak adimen-koefizientearen menpe kontsideratuta bariantzaren % 36a bakarrik mugatzen dela. Aldagai horrekin batera ikasketa-orduak erregresore bezala kontsideratuta, ordea, % 68a mugatzen da.

Argi dago, bada, errealitatean lagin honetan bezala gertatzen bada ikasketa-orduak guttiz garrantzitsuak direla emaitza onak lortzeko.

3.22.

1) Aldagaiak X_1 , X_2 , X_3 , hurrenez hurren, izendatuz

$$\hat{X}_1 = -395,5 + 0,144 X_2 \quad r_2 = 0,76$$



$a = -395,5$ izateak honakoa esan nahi du: sarrerak zero izanik familiak, lagin eta eredu honen arabera, 395,5 dolarretan zorpetzen direla.

$r^2 = 0,76$ izanik, Aurrezkiaren bariantza % 76 azalduta geratzen da.

$$2) \hat{X}_1 = 105 + 0,115 X_2 - 0,0292 X_3$$

Ereduan, erregresore bat gehiago sartuta, nahitaez erregresioa hobetu egiten da. Ondorioz, 0,115 da koefizienterik onena aurrezki eta sarreraren arteko erlazioa adierazteko.

$$3) \hat{X}_1(8000,5000) = 878 \$$$

$$4) 230 \$$$

$$5) 26,8 \$$$

$$6) r_{1,23}^2 = 0,98; \text{ \% } 9,8 \text{ azaldua eta \% } 2 \text{ azaldu gabe.}$$

3.23.

$$1) \text{ Aldagaiak } X_1, X_2, X_3, X_4, \text{ hurrunez hurren izendatuz } \hat{T}_1 = 0,635 T_2 - 0,42 T_2 - 0,14 T_2$$

$$2) r_{1,234}^2 = 0,998; \text{ aurrezkiaren bariantzaren \% } 99,8 \text{ mugatuta geratzen da hiru erregresore horien bidez, hau da, ia guztiz mugatuta.}$$

3) Erregresio tipifikatua egitearen abantailaz ohartu behar da, hots, neurri-unitateen eragina bazterturik geratzen da edota aldagai bakoitza bere desbidazio tipikoarekiko neurturik, guztiak eskala berean ipinita daudelarik.

Erregresio-koefizienteek, bada, honakoa esaten digute: sarrera 0,635eko indar erlatiboaz sartzen da zentzu positiboaz aurrezkiaren auresanean, kapitala eta haurrak 0,42 eta 0,14 indar erlatiboaz eta zentzu negatiboan, hurrenez hurren.

3.24.

1) Erroreak zentratuak eta balio estimatuekin koerlazio gabeak direnez, $e_3 = \mp 1$, $e_4 = \pm 1$ lortzen dugu.

$$2) r_{1,23..n}^2 = 1 - \frac{Se^2}{S_1^2} = 0,66 \quad r = 0,816$$

3.25.

1) $\hat{T}_3 = 0,52 T_1$

2) ($R_{33} = 0,77$; $R_{31} = -0,05$; $R_{32} = -0,73$) Adjuntuen bitartez.

$$\hat{T}_3 = 0,064 T_1 + 0,95 T_2$$

3) Lehenengo kasuan,

0,52² = 0,27 (% 27) izanik, doikuntza ahula da.

Bigarrena, askoz hobea da:

1- 0,0280/0,7696 = 0,964 (% 96,4) emaitza honen zergatia, bigarren erregresoreari dagokio, berak bakarrik X_3 -ren bariantza % 96 batean mugatzen baitu.

3.26.

1) $b_{12} = -7,501$ $b_{13} = 75,005$

2) $\beta_{12} = -0,581$ $\beta_{13} = 0,581$

3) Bi erregresoreek garrantzi berdina daukate erregresioan, biek X_1 aldagaiaren auresanean indar erlatibo berdinez parte hartzen baitute.4) $r_{12}^2 = r_{13}^2 = 0,60$ mugatze-koefizientea aldagai bat bakarrik sartuz.

$r_{1,23}^2 = 0,90$ da mugatze-koefizientea plano kontsideratuz, hau da, % 30eko abantaila daukagu.

3.27.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & +2 \\ -3 & +2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,577 & -0,774 \\ -0,577 & 1 & +0,894 \\ -0,774 & +0,894 & 1 \end{bmatrix}$$

Estatistiko hauen bidez lortzen da:

$$1) \hat{X}_3 = 1,5X_2 - 0,5X_1$$

$$2) \hat{T}_3 = 0,671T_2 - 0,387T_1$$

3) b_{32} b_{31} baino hiru bider handiagoa da alde batetik, erregresioan zeregin handiagoa daukalako (β_{32} benetan β_{31} baino handiagoa da), baina bestetik X_2 aldagaia eskala txikiagoarekiko aldatzen delako ($S_1^2 = 3$; $S_2^2 = 1$).

$$4) r_{3.12}^2 = 1 - \frac{1}{5,2} = 0,9 \text{ edota}$$

$$r_{3.12}^2 = -0,387 \cdot (-0,0774) + 0,671 \cdot (0,894) = 0,9$$

$$5) +1, -1, 0, 0. \quad \overline{e^2} = 1/2$$

$$6) r_{12.3} = 0,405$$

X_1 eta X_2 -ren arteko koberazio negatiboa, X_3 aldagaia baztertuta positibo bihurtu da.

3.28.

1)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0,48 & 6,3 \\ 0,48 & 0,64 & 4,68 \\ 6,3 & 4,68 & 81 \end{bmatrix}$$

$$2) \hat{X}_3 - 74 = 4,3647 (X_1 - 6,8) + 4,0479 (X_2 - 7)$$

$$x_1 = 9, x_2 = 7 \Rightarrow \hat{x}_3 = 83,6$$

$$3) r_{3.12} = 0,757 \quad r_{13.2} = 0,5$$

3.29.

1)

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

2)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

3) $\hat{X}_1 = X_3 + 1$ $\hat{X}_2 = X_3 / 3 + 1$

X_3	\hat{X}_1	\hat{X}_2	$e_{13} = X_1 - \hat{X}_1$	$e_{23} = X_2 - \hat{X}_2$
1	2	4/3	-1	-1/3
1	2	4/3	0	-1/3
1	2	4/3	1	2/3
3	4	2	0	0

$$r_{e_{13}e_{23}} = \sqrt{3} / 2$$

4) $r_{12,3} = \sqrt{3} / 2$

5) $\hat{X}_1 = \frac{3}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}$

6) $r_{1,23} = \sqrt{1 - \frac{S_e^2}{I_{11}}} = \sqrt{1 - \frac{1/8}{5/4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = 0,948$

$$S_e^2 = \frac{1}{8}$$

3.30. Alokairua milakotan harturik

1)

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 43 \\ 19,25 \\ 43,25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 57,25 & 63,50 & 62,50 \\ & 89,19 & 91,81 \\ & & 101,94 \end{bmatrix}$$

2)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,889 & 0,818 \\ & 1 & 0,963 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Estatistiko hauen bidez lortzen da:

$$1) \hat{X}_1 = 1,11X_2 - 0,385X_3 + 38,283$$

$$2) \hat{T}_1 = 1,39T_2 - 0,51T_3$$

$$3) r_{1.23}^2 = 0,81$$

4) 36.830 pta. gutxi gora-behera.

$$5) r_{12.3} = 0,65 \text{ eta } r_{12} = 0,889$$

$$r_{13.2} = -0,31 \text{ eta } r_{13} = 0,818$$

Adibide honetan, hiru aldagaiak beraien arteko kobariazio positibo sakona aurkezten dute, baina “alokairu” eta “adina”-ren arteko erlazioa ($r_{13} = 0,818$) faltsua dela kontsidera daiteke, alokairua igo egiten baita adinarekin batera zerbitzu-denbora dela medio, hau da, X_2 aldagaiaren eragina baztertuta, konstantea balitz bezala kontsideratuz $r_{13.2} = -0,31$ daukagu.

3.31.

1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,9155 & 0,9851 \\ & 1 & 0,8873 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r_{12.3} = 0,516 \\ r_{13.2} = 0,9307 \\ r_{23.1} = 0,2033 \end{array}$$

$$2) \hat{X}_1 = -8,8947 + 0,3684X_2 + 0,7894X_3$$

$$r_{1.23}^2 = 0,978 \quad r_{1.23} = 0,988$$

Erlazio-maila sakona adierazten du.

3.32.

$$1) \hat{X}_2 = 0,156X_1 - 0,187X_3 + 2,28$$

$$2) S_e^2 = 0,468 \quad r_{2.13} = 0,729$$

$$3) r_{12.3} = 0,39 \text{ eta } r_{12} = 0,5$$

$$r_{23.1} = -0,60 \text{ eta } r_{23} = -0,66$$

X_3 aldagaiaren eragina kontrolatuta X_1 eta X_2 -ren arteko koerlazioa txikiagotu egiten dela ikusten dugu: X_3 aldagaiak koerlazio negatiboa zuen biek.

Neurri txikiagoan X_1 aldagaiaren eragina baztertua X_2, X_3 -ren arteko koerlazio negatiboa ere murriztu da balio absolutuan.

Koerlazio partzial eta erregresio partzialeko koefizienteen arteko erlazioa ikusten dugu erregresio-planoan.

3.33.

- 1) Kobariantza-matrizean, bi erroreak argiro ikusten dira, $S_{23} = S_{32}$ izanik benetako balioa $S_{23} = S_{32} = -1,25$ izango da datu-matrizean X_2, X_3 aldagaien balioak alderantziz dihoazela ikusten baita. Bestalde, S_3^2 bariantza izanik, negatiboa ezin du izan.

Kalkuluak eginez:

$$S_{23} = S_{32} = -1,25, \quad S_3^2 = 0,1875$$

2)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 650 & -62,5 & 10 \\ -62,5 & 8,5 & -1,25 \\ 10 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3) \hat{T}_2 = 0,3123T_1 - 1,2730T_3$$

$$\begin{aligned} 4) r_{2.13}^2 &= r_{12} \beta_{21} + r_{23} \beta_{23} = \\ &= (-0,8408) \cdot 0,3123 + (-0,9901)(-1,2730) = \\ &= 0,9978 \quad \%99,78 \text{ da azaldutako bariantza.} \end{aligned}$$

$$5) r_{12.3} = 0,94 \quad r_{12} = 0,84$$

Ikusten denez, bideo kopurua kontrolatuz agertzen zaigu sarrerek eta ikuskizun publikotan egindako gastuek daukaten koerlazio positiboa, hots, argi dago gehien irabazten dutenek ikuskizun publikotan gutxiago gastatzen badute bideoa daukatelako dela.

3.34.

Aldagaiak Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 berrizendaturik

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,9193 & 0,9803 & 0,9798 \\ & 1 & 0,8497 & 0,9238 \\ & & 1 & 0,9812 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

1) $r_{12,34} = 0,9974$

2) $r_{13,24} = 0,9980$

3) $r_{14,23} = -0,9938$

4) $\hat{Z}_1 = 8 + Z_2 + Z_3 + Z_4$

5) $\hat{Z}_1 = \hat{Y} = 8 + 8 + 22 - 12 = 26$ mila milioi pta.

6) $r_{1,234} = 0,999$ $r_{1,234}^2 = 0,9998 \simeq 1$

7) $S_e^2 = 0,0259$

3.35.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \%2,9 \\ \%16,24 \\ 99,20\$ \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,14 & -0,774 & 20,1 \\ & 178,274 & 546,65 \\ & & 7073,36 \end{bmatrix}$$

$r_{12} = -0,155$

$r_{13} = 0,639$

$r_{23} = 0,487$

Estatistiko hauen bidez lortzen da:

1) $\hat{X}_2 = 82,09 + 0,157X_3 - 28,08X_1$

2) $\hat{T}_2 = 0,99T_3 - 0,79T_1$

3) $r_{2,13}^2 = 1 - \frac{0,234}{0,592} = 0,6045$

Menpeko aldagaiaren bariantzaren proportzio nabaria azaltzen da.

Hala ere, hondarra gelditzen da eta honek, datu-matrizean dagoen zerbaitetan zergatia dauka, hain zuzen. Afganistan eta Siriak zine-jarleku aldagaiarekiko duten balioa oso txikia eta Turkiak, aldiz, oso handia.

Bestalde estatu oso esportatzaileak sartu dira; seguraski, “per capita” errenta hobia izango litzateke erregresore bezala esportatutako balioa baino.

4) $r_{12,3} = -0,694$

Ahalmen esportatzailearekin daukaten kobariazioa kenduz, hazkuntza demografikoa eta zine-jarlekuen arteko erlazioa are eta aurkakoagoa bihurtzen da.

$$r_{23,1} = 0,771$$

Aldiz, hazkuntza demografikoarekin daukaten kobariazioa baztertuz, erlazio zuzena sakondu egiten da.

3.36.

$$1) \hat{X}_3 = 86,73 - 13,3X_1 + 2,6X_2 \quad \hat{T}_3 = 0,6 (T_2 - T_1)$$

2) Kasu honetan, X_3 -ren erregresioan, erregresore bakoitzak indar erlatibo berdinez hartzen du parte, baina aurkako zeinuaz.

Aldiz, b_{31} bost bider handiagoa da balio absolutuan, b_{32} baino, S_1 S_2 baino bost bider txikiagoa delako.

3) $r_{13,2} = -0,6$ $r_{13} = 0,4$ izanik, X_2 -ren eragina kontrolatuz (koerlazio positiboa baitu biek) X_1 eta X_3 -ren arteko koerlazioa are eta negatiboago bihurtzen dela ikusten dugu.

3.37.

1) Argi dago hirugarren batezbestekoak ezin duela 17 balioa izan, aldagaiaren balio-multzotik at baitago.

$$2) \bar{x}_3 = 110$$

$$\hat{X}_1 = -0,0217X_2 + 0,039X_3 - 1,065$$

$$3) \beta_{12} = -0,05 \quad \beta_{13} = 0,94$$

β_{13} hemeretzi bider handiagoa da balio absolutuan β_{12} baino. Honek zera esan nahi du: X_2 , X_3 aldagaiek erlazio horretan daukatela eragina X_1 aldagaiaren aurreanean, hau da, potentzia askoz garrantzitsuagoa da azelerazio-denbora baino automobilen prezioa auresateko.

3.38.

$$1) S_e^2 = 2 \quad r_{3,12} = 0,8819$$

$$2) S_e^2 = 2 \quad \text{eta} \quad \sum e = 0 \quad \text{izanik}$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad e_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.39.

$$r_{23,1} = r_{e_{21} e_{31}} = \frac{-L_{23}}{(L_{22}L_{33})^{1/2}} = \text{izanik}$$

$$r_{23,1} = 0,5 \quad \text{eta} \quad L_{23} = -24$$

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1. Bost urtetan, hurrenez hurren eta milaka pezetatan, ondoko sarrerak eta gastuak izan baditugu,

Sarrerak:	35	40	50	70	80
Gastuak:	33	37	40	52	60

Honakoa eskatzen da:

- 1) Koerlazio-koefizientea, bere esanahia azalduz.
 - 2) Atera ezazu egokiena izango litzatekeen erregresio-zuzena, datuak nahikoak eta errepresentagarriak balira bezala jokatu.
 - 3) Zertarako balio du aurreko atalean ateratako zuzenak?
2. 100 produktu elektromekanikoren multzoan bi aldagai estatistiko diskretu honela banatzen dira:

	Y	120000	126000	132000
X				
1525000		25	0	0
1475000		5	10	0
1425000		0	10	5
1375000		0	5	40

Honakoa eskatzen da:

- 1) Kalkula ezazu koerlazio-koefizientea, laburrena den kalkulua eginez.
 - 2) Lor ezazu Y-ren X-ekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa eta pareka itzazu 1), 2) ataletan lortutako emaitzak.
3. Sail bateko liburutegian dauden 4.000 liburuak bizkar-luzeraren arabera taldekatu dira. Orrialde kopurua ere ezagututa ondoko taula lortu dugu:

		Orrialdeak			
Luzera		(0,300)	(300,600)	(600,900)	(900,1200)
A		200	500	300	0
B		200	1.000	800	500
C		100	300	100	0

Honakoa eskatzen da:

- 1) Orrialde kopuruaren luzera desberdinekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa (200, 450, 750, 1000, klase-ordezkaritzat hartu behar dira)

- 2) Banaketa bikoitz honen batezbesteko-bektorea eta kobariantza-matrizea ondokoak izanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 23,25 \text{ zentimetro} \\ 577,5 \text{ orrialde} \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 12,9375 & 43,125 \\ 43,125 & 56.368,75 \end{pmatrix}$$

lor ezazu orrialde kopuruaren luzera desberdinekiko karratu txikiaren erregresio-zuzena.

- 3) Marraz itzazu bi erregresio-lerroak grafiko berean eta azal ezazu bakoitzaren egokitasuna emandako banaketarako.

Oharra: $\bar{\mathbf{x}}$ eta \mathbf{L} lortzeko (A, B, C) taldeetan, 18 zm, 24 zm eta 30 zm hartu dira klase-ordezkarizat.

4. Ondoko taulan 50 autogidari sailkatuta daude X,Y aldagaien arabera, X = adin-tarteak eta Y = azkeneko 5 urteetan edukitako istripuak izanik:

X/Y	1	2	3	4	5
(18-25)	4	4	2	4	3
(26-31)	2	3	4	2	4
(32-51)	1	1	1	3	1
(52-81)	3	2	3	1	2

Honakoa eskatzen da:

- 1) Froga ezazu bi aldagaien arteko dependentsia ala independentzia maiztasun-banaketa horretarako.
 - 2) Lor ezazu istripuen adinarekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
5. Ondoko taulan hiru komunitate autonomo udaletako biztanleen arabera banatuta ditugu:

Populazioaren tartea (milaka biztanletan)	klase - -ordezkaria	CANTABRIA	EUSKAL AUTONOMIA ERKIDEGOA	NAFARROA
$X < 1$	0,4	25	90	190
$1 \leq X < 5$	2	60	75	60
$5 \leq X < 50$	20	15	60	14
$50 \leq X$	100	2	10	1

- 1) Lor ezazu Gini-ren indizea komunitate bakoitzeko populazioaren kontzentrazioa aztertzeko.
- 2) Lor ezazu populazio-ezaugarriak komunitate autonomoko ezaugarriarekiko duen batezbestekoaren erregresio-lerroa.

6. Ondoa (X,Y) aldagaiaren 6 balio-bikote emanik,

X	1	2	3	5	6	7
Y	0	3	4	6	6	11

Honakoa eskatzen da:

- 1) Puntu-hodeia eta berari legokiokoen r_{xy} koerlazio-koefizientearen komentarioa.
 - 2) Y aldagaiaren X-ekiko erregresio-zuzena.
 - 3) Bazter-aldagaien balio tipifikatuak eta puntu-hodei tipifikatua.
 - 4) r_{xy} koerlazio-koefizientea eta erregresio-zuzen tipifikatua.
7. Ondoko taulan, urte-tarte ezberdinetarako,
 X_1 : Arabako inmigranteen populazioa, eta
 X_2 : Gipuzkoako inmigranteen populazioa daukagu milaka inmigrantetan neurturik.

	1951-55	56-60	61-65	66-70	71-75	76-80
X_1	7	14	25	26	27	17
X_2	19	36	46	54	55	41

Datu horiei dagozkien batezbesteko bektorea eta kobariantza-matrizea ondokoak dira:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 19,3 \\ 41,83 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 53,55 & +86,72 \\ +0,72 & 149,138 \end{pmatrix}$$

Estatistiko horietan *errore bat* zuzentzeko egonik.

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu X_2 aldagaiaren X_1 aldagaiarekiko karratu txikiaren erregresio-zuzena.
 - 2) Marraz ezazu zuzena puntu-hodeiaren barruan.
 - 3) Doikuntza horren hondar-bariantza eta egokitasunaren neurriren bat.
8. Merkatari batek erostetxe edo magazin bat erosi du, sarrerak, gutxi gora-behera linealki, auzoko biztanleriaren menpe daudela suposatuz. Hipotesi hau baieztatzeko aldameneko 10 erostetxeen datuak ditu:

Biztanleria:	70	35	55	25	28	43	15	33	23	4
Sarrerak:	198	209	197	156	85	187	43	211	120	62

Honakoa eskatzen da:

- 1) Karratu txikiaren erregresio-lerroa (azaldutako erlazioari dagokiona).
- 2) Doikuntzaren egokitasuna bere esangura azalduz.
- 3) Zein da erosleak itxaron behar duen sarrera, doikuntza honen arabera, bere erostetxea dagoen auzoko bizanleriaren balioa 20 izanik?.

9. Ondoko taulan, ekonomi sektore bateko azkeneko urteetako produkzioak eta esportazioak ditugu neurturik:

<u>Urteak</u>	<u>Produkzioak (milioika pta-an)</u>	<u>Esportazioak (milioika ptatan)</u>
1983	400	80
1984	420	80
1985	440	90
1986	480	92
1987	500	98

Honakoa eskatzen da:

- 1) Dispersio-diagrama edo puntu-hodeia, bi aldagaien arteko erlazioa ikus dezagun. Hodei horren arabera, zein izango litzateke esperoko genukeen doikuntza linealaren egokitasuna? Zein erlazio-mota ikusten dugu aldagaien artean?
- 2) Datu tipifikatuaren puntu-hodeia. Lor ezazu, datu tipifikatuertarako, karratu txikiaren erregresio-zuzena eta adieraz ezazu grafikoki puntu-hodeian.
- 3) Lor ezazu doikuntzaren egokitasunaren neurriren bat eta esan ezazu, datu tipifikatu gabeen doikuntzarenarekiko parekatuz, handiagoa ala txikiagoa izango den.

10. Ondoko taulan, bost enpresetarako 1986. urteko X, Y aldagaien balioak ditugu:

–X baliabide propioen 10^9 pezetako duten langile kopurua.

–Y balio erantsiaren 1.000 pezetako duten mozkina.

	<u>X</u>	<u>Y</u>
Petronor	20	130
Altos Hornos	600	-350
Firestone	400	40
Eroski	240	230
Aurora Polar	90	200

Honakoa eskatzen da:

- 1) Enpresa baten x balioa 500 dela jakinik, zein izango litzateke legokiokeen y balioa ongien doitzen den erregresio-zuzenaren bidez?

- 2) Kalkula ezazu estimatutako bariantza eta batezbesteko errore koadratikoa. Doikuntza hobea izango al litzateke datu tipifikatuena bidez egingo balitz? Zergatik?
11. Berrehun familia dituen lagin baten bidez, (X, Y) aldagai bikoitzeko ondoko banaketa lortu dugu: X: familiaren tamaina, Y: etxebizitzaren gela kopurua izanik:

Y \ X	3	4	5
4	25	18	6
5	29	41	30
6	9	24	18

Honakoa eskatzen da:

- 1) Etxebizitzako gela kopuruaren, familiaren tamainarekiko erregresio lineala.
 - 2) Azter ezazu, aldagaien arteko menpekotasun linealaren maila, lagin honetarako.
 - 3) Baliagarria izango ahal litzateke doikuntza hau, 3 senitartekoen familia baten etxebizitzak zenbat gela edukiko lukeen auresateko? Arrazona ezazu. Sartuko al zenuke beste aldagairen bat erregresio-eredu honetan?
12. Edari freskagarrien faktoria batean, urtean zehar hamar aste harturik, temperaturak eta saldutako freskagarrien datuak jaso dira:

Batezbesteko tenperatura: 10 28 12 31 30 19 24 5 15 9
 Freskagarri kopurua: 21 65 19 72 75 34 67 11 24 12

- 1) Irudika ezazu banaketa bikoitz honi dagokion aurkezpen-grafikorik egokiena. Egokia al litzateke banaketa bakoitzaren moda kalkulatzeko? Eta mediana? Azal itzazu emandako erantzunak.
 - 2) Egokia izango al da faktoriarentzat produkzio-maila tenperaturaren arabera planifikatzea? Azal ezazu erantzuna.
 Erantzuna baiezkoa izan bada, gara ezazu metodorik egokiena, ondoren estimazio batzuk eginez.
13. 45 langile dituen enpresa batean honako bi ezaugarri ikertu dira:

X : alokairua pezetak/eguneko

Y : lanbide kategoria

Datuak honako taulan dauzkagu:

Kategoria Alokairua	Ikasle	Peoi	Ofizial
[700, 1500[5	0	0
[1500, 2500[11	0	0
[2500, 3500[7	8	0
[3500, 4500[0	7	7

- 1) Kalkula ezazu nola banatzen den alokairua 3 lanbide kategorietan. Bi aldagaiak independenteki banatzen direla esango al zenuke? Egokia izango al litzateke enpresa honetako langileetatik %30a ikasle edo peoi dela esatea?
 - 2) Gonbara itzazu ikasleen eta ofizialen alokairuen kontzentrazioa, bakoitzaren Gini-ren indizea erabiliz (klase-ordezkaritzat har ezazu klasearen erdiko puntua).
 - 3) Lor ezazu alokairuaren kategoriarekiko batezbesteko erregresioa.
14. 5 seme-alaba dituzten 100 familik osatutako lagin batekin, honako datuak lortu dira:

X = mutilak / Y = neskak	0	1	2	3	4	5
5	6	0	0	0	0	0
4	0	18	0	0	0	0
3	0	0	34	0	0	0
2	0	0	0	27	0	0
1	0	0	0	0	13	0
0	0	0	0	0	0	2

Eskatzen da:

- 1) Batezbestekoak, bariantzak eta bazter aldagaien kobariantzak.
 - 2) Y-ren X-ekiko eta X-en Y-rekiko karratu txikiaren erregresio zuzenak eta koerlazio-koefiziente lineala.
 - 3) Lor itzazu, aldagaiak tipifikatuz, aurreko ataleko erregresio-zuzenak.
 - 4) Azal itzazu 2) eta 3) ataletako erantzunak emandako taularen arabera.
15. Ondoren, X: ezkontza kopurua (milakotan) eta Y: jaiotze kopurua E.A.E.n (milakotan) datozte urte desberdinetan:

	X	Y
1980	11,5	27,6
1982	11,5	25,7
1984	10,4	22,4
1986	9,52	20
1988	9,45	18

- 1) Kalkula ezazu 1980tik 1988ra bitarteko ezkontza eta jaiotze kopuruen batezbesteko hazkunde-tasa metakorra.
- 2) Aurkez itzazu (X,Y) aldagai bidimentsionalaren balioak grafikoki. Komenta ezazu lorturiko grafikoa.
- 3) Lor ezazu Y-ren X-ekiko karratu txikienen erregresio lineala, baita hondar-bariantza eta doikuntzaren egokitasuna.

X eta Y-ren balio guztiak K konstante batez biderkatuko bagenitu, erregresio zuzena aldatuko al litzateke? Aldatuko al litzateke jatorria ordenatuan? Azal ezazu erantzuna.

16. Adina lau mailatan dituen 100 gizasemek osatutako lagin baterako edukitako automobil istripu kopuruari buruzko 1990eko datuak bildu dira.

X = adina / Y = istripu kop.	0	1	2	3	n_i
18–30	0	5	10	15	30
31–45	2	6	10	10	28
46–60	6	8	8	0	22
61–70	4	7	8	1	20
n_j	12	26	36	26	N = 100

Maila bakoitzaren klase-ordezkaritzat 24, 38, 52 eta 66 urte harturik, ondoko estatistikoak lortu dira: $\bar{x} = 42,48$ urte, $\bar{y} = 1,76$ istripu, $S_x^2 = 238,95$, $S_y^2 = 0,9424$.

Eskatzen da:

- 1) Kalkula ezazu bi aldagaien arteko kobariantza.
 - 2) Istripu kopuruaren adinarekiko batezbestekoaren erregresioa.
 - 3) Istripu kopuruaren adinarekiko karratu txikienen erregresio lineala.
 - 4) 40 urte dituen pertsona batentzat, karratu txikienen erregresio linealaren bidez estimatutako balioa.
 - 5) Lortutako bi erregresio lerroen aurkezpen grafikoak ikusirik, azter ezazu erregresioen parekatzea, linealtasunari buruz komentarioak eginez.
17. Izan bitez, X eta Y bi aldagai estatistiko, non beroriei dagozkien datuak ondoko kontingentzi taulan, maiztasun erlatibotan, agertzen diren:

X / Y	3	16	50
1.35	0	0,05	0,18
1.50	0,050	f_{22}	0,02
1.65	0,2	f_{32}	0

- 1) Kalkula itzazu f_{22} eta f_{32} , $\bar{x} = 1.55$ dela jakinik. Aurkez ezazu grafikoki, Y aldagaiaren bazter banaketa.
 - 2) Lor ezazu Y aldagaiaren X aldagaiarekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
 - 3) Lor ezazu $\hat{Y}(X)$ K.T.E.L.ren zuzena. Aurkez ezazu grafikoki, batezbesteko erregresioarekin batera. Zein da erregresio horren bidez, estimatutako balioen bariantza? Zein da doikuntzaren egokitasuna? Transformazio linealen bidez, eragiketak labur ditzakezu.
 - 4) Komenta itzazu lortutako emaitzak.
18. Heziketarako psikologo batek (X) arrazonamendu abstraktoa eta (Y) errendimendu matematikoaren arteko erlazioa aztertu nahi du. Horretarako taula batean, bi ezaugarri hauetarako, 10 bizilagunek lortutako puntuazioak biltzen ditu:

X	Y
2	2
2	1
1	1
4	4
5	7
5	6
4	3
4	9
8	10
9	9

- 1) Aurkez ezazu grafiko baten bidez, aldagai bakoitza bere aldetik. Kalkula ezazu aldagai bakoitzaren moda. Grafiko hauek aztertuz, zein aldagaiak uste duzu edukiko duela kurtosi-koefiziente handiagoa? Arrazona ezazu erantzuna.
 - 2) Aurkez ezazu grafikoki, (X,Y) aldagai bikoitza. Grafiko horren aurrean, uste duzu X eta Y aldagaiak koerlazio gabeak izango direla?
 - 3) Kalkula ezazu $\hat{Y}(X)$ K.T.E.L.ren zuzena. Uste duzu zuzen honen bidez lortutako estimazioak, balio errealei hurbilduko zaizkiela? Arrazona ezazu erantzuna. Kalkula ezazu zerrendaren 4. indibiduoari dagokion errendimendu matematikoaren estimazioaren errorea eta doikuntza honen hondar-bariantza.
19. Ondoko taulan, (X,Y) aldagai estatistikoaren balioak ditugu 1991 urteko hilabete bakoitzerako:

Hiruhilekoa	X	Y
1.	4	1
2.	4,15	y_2
3.	4,5	y_3
4.	3,5	2

- 1) Kalkula itzazu y_2, y_3 balioak, $y_2 < y_3$, $\bar{x} = 4,04$, $\bar{y} = 2,5$, $S_x^2 = 0,13$, $S_y^2 = 1,25$ direla jakinik, zeinek dauka sakabanatze erlatibo gehiago batezbestekoa-
rekiko?
 - 2) Aurkez itzazu grafikoki, (X,Y) aldagai bakoitzaren balioak. Datu hauetan, karratu txikiaren doikuntza lineala egingo bagenu eta egindako grafika ikusirik, zein izango litzateke itxarongo genukeen egokitasuna? Kontrasta ezazu emandako erantzuna estatistiko egokienaren bitartez.
 - 3) Lor ezazu $\hat{Y}(X)$ doikuntza lineala. $\hat{X}(Y)$ doikuntza lortuko bazenu, hobe izango litzateke? Arrazona ezazu erantzuna.
20. 100 indibiduo dituen multzo baterako (X,Y) ezaugarriak aztertu dira, emaitzak hurrengo kontingentzi taulan agertzen direlarik:

X/Y	117	132	147
[0-2,5)	0	5	15
[2,5-5)	13	20	7
[5-7,5)	7	18	0
[7,5-10)	25	0	0

Eskatzen da:

- 1) Aurkez ezazu grafikoki X aldagaiaren bazter-banaketa. Kalkula ezazu banaketa horren mediana.
 - 2) Kalkula ezazu, eragiketak gehien laburtzen dituen transformazio lineala erabiliz, bi aldagaien arteko koerlazio-koefizientea. Azal ezazu koefizientearen esangura. Froga ezazu aldagaien unitate-neurrien aldaketaz koerlazio-koefizientearen emaitza ez dela aldatzen.
 - 3) Kalkula eta aurkez ezazu X aldagaiaren Y aldagaiarekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa. Estima dezakezu X aldagaiaren balioa $y = 120$ baliorako erregresio honen bidez? Arrazona ezazu erantzuna eta azal ezazu zer egin beharko zenukeen estimazio hori emateko.
- 21.
- i) $W = X + Y$ eta X,Y kolektibo batean independenteki banatzen diren bi aldagai izanik, froga ezazu, W aldagaiaren bariantza X eta Y aldagaiaren bariantzen batura dela.

- ii) Izan bitez W eta Z bi aldagai estatistiko, non berorien maiztasun banaketa ondoko taulan daukagun.

W/Z	1	2	3	4	6
3	1	1	0	0	0
4	0	0	1	1	0
6	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1

- 1) Azter ezazu W eta Z aldagaien independentzia kolektibo horretan.
 - 2) Kalkula eta aurkez ezazu grafikoki Z-ren W-rekiko batezbestekoaren erregresioa.
 - 3) Lor ezazu Z-ren W-rekiko karratu txikiaren erregresio zuzena. Pareka ezazu, aurreko atalean egindako erregresioarekin.
 - 4) Zein da egindako K.T.E.L-ren doikuntzaren egokitasuna? Zein da hondar-bariantza eta estimatutako bariantza?
22. Ondoko taulan, kontsumitzaileen ondasun eta zerbitzutan egindako gastuaren banaketa (X) eta haien errenta (Y), 1984-1993 urte tartarako bilioika pezetatan ditugu:

Urteak	1984	85	86	87	88	89	90	91	92	93
Gastuak	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	2,2	1,2	1,5	1,6
Errenta	0,9	1,0	1,2	1,4	1,5	1,7	1,9	2,1	2,5	2,7

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = 1,69, S_x = 0,3334, S_y = 0,58$$

Ekonomi teoriak dioen bezala, kontsumoa errentaren funtzioa bada eta erlazioa errazago egiteko, menpekotasun linealean pentsatzen badugu:

- 1) Lor ezazu menpekotasun horri dagokion zuzena.
- 2) 1994 urterako “per capita” errenta 21.000 pezetakoa, 36 milioi pertsona dituen populazio baterako izango dela jakinik, zein izango da ondasun eta zerbitzutan estimatutako gastua urte horretarako?
- 3) Lor ezazu aurreaera horren egokitasunaren neurri bat. Aurreaera hori fidagarria dela iruditzen zaizu?
- 4) Hirugarren aldagai bat kontsideratzen badugu, ($S = Y - X$) aurrezkoa hain zuzen, lor itzazu batezbestekoa, bariantza eta S_{xy} kobariantza, X eta Y aldagaien batezbestekoa, bariantzak eta kobariantzaren funtzioan (froga ezazu teorikoki).
- 5) Kalkula ezazu (S) aurrezkiaren K.T.E.L., (Y) errentaren funtzioan. Froga ezazu $\hat{Z} = Y - \hat{X}$ dela.

23. Ondoko taulak, Y hileroko errentaren maila (milaka pezetatan) eta S kontsumatutako arrain izoztua (Kg-tan), aldagaien datuak ditu 5 familiak osatutako multzo baterako:

Y: errenta	S: kontsumoa
60	20
100	16
140	10
200	5
220	2

Kobariantza matrizea $L(Y, S) = \begin{pmatrix} 4480 & \\ -498 & 55 \end{pmatrix}$ dela jakinik

- 1) Lor ezazu, kontsumatutako arrainaren estimazio lineala errenta-mailaren funtzioan. Zein da doikuntza honen egokitasuna?
 - 2) Lor ezazu, orain, kontsumatutako arrainaren estimazio lineala baina errenta-mailaren alderantzizko balioaren funtzioan. Zein da doikuntza berri honen egokitasuna? Egin dezakezu errenta balioen unitate aldaketaren bat egokia kontsideratzen baduzu.
 - 3) Konpara itzazu lortutako bi erregresioak, egokiak iruditzen zaizkizun komentarioak eginez.
24. Segidako 4 urtetako 3 aldagaien batezbesteko balio hauek kontutan izanik,

Urtea	Langabezi-tasa	Produktibitate aldakuntzaren %	Alokairua/enplegatu aldakuntzaren %
1989	17,3	0,9	9,3
1990	16,1	1,6	10,1
1991	15,2	1,3	9,6
1992	14,2	1,1	8,3

Eskatzen da:

- 1) Planteatu ezazu aldagai bat beste bien menpean azaltzen duen erregresio-eredu egokiena. Menpeko aldagaiaren balioaren estimazioan zein aldagai independente da garrantzitsuagoa? Zergatik?
- 2) Iker ezazu egindako doikuntzaren egokitasuna eta konpara ezazu aldagai independente bakar batekin geldituko bagina izango genukeen doikuntza posible hoberenarekin.

25. X_1, X_2, X_3 aldagai estatistikoei dagozkien ondoko matrize estatistikoa emanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 12 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) Lor itzazu $\hat{X}_1(X_2, X_3)$, $\hat{X}_2(X_1, X_3)$ eta $\hat{X}_3(X_1, X_2)$ karratu txikiaren erregresio linealak.
- 2) Lor itzazu, halaber, dagozkien erregresio tipifikatuak.
- 3) Azal itzazu lortutako emaitzak, aldagaien artean ikus daitezkeen erlazioetan oinarriturik.
- 4) Indibiduo edo oharpen kopurua 100 dela jakinik, aurkez itzazu, grafikoki, $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$, $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3)$ eta $(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ bektore bikoteen erlazioak.

26. E.A.E.ko 10 herritarako hiru aldagaien datuak ditugu:

X_1 = produktibitatea (milaka ecutan)
 X_2 = kostua/langile (milaka ecutan)
 X_3 = kostua/produzitutako unitate (ecutan)

Datu horiei ondoko estatistikoak dagozkie:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 24,85 \\ 17,26 \\ 67,54 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,98 & 0,68 \\ & 1 & 0,76 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 00,42 & -0,46 & 0,006 \\ & 0,54 & -0,09 \\ & & 0,04 \end{pmatrix}$$

$$S_{x_1}^2 = 71,05, \quad S_{x_2}^2 = 40,48, \quad S_{x_3}^2 = 43,80$$

- 1) Zein izango da Espainiarako estimatutako kostua/produzitutako unitatea, bere produktibitatea 19,7 (milaka ecutan) eta kostua/langile 10,5 (milaka ecutan) baldin badira? Lor ezazu, karratu txikiaren metodoaz, datu hauei hobekien doitzen zaien hiperplanoa.
- 2) Iker ezazu lortutako estimazioaren fidagarritasuna.
- 3) Erregresioan ditugun bi aldagai azaltzaileetatik zeinek du eragin handiagoa?

27. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresiorako, ondoko datuak lortu dira: $m = 5$, $S_{x_1}^2 = 25$, $S_{x_2}^2 = 6,25$, $S_{x_3}^2 = 9$, $|L| = 264$

$$\mathbf{A}_L = \begin{pmatrix} 12,5 & 4,3 & 3,8 \\ & 14,2 & -7,5 \\ & & 19,3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_1 = 4, \quad \hat{x}_2 = 6, \quad \hat{x}_3 = 2$$

- 1) Lor ezazu planoaren ekuazioa batezbestekoen funtzioan, erregresio-koefizienteen esangura azalduz.
- 2) Komenta ezazu doikuntzaren egokitasuna.
- 3) Lor itzazu \hat{x}_4 eta \hat{x}_5 estimazioa, $\bar{x}_1 = 5$ dela jakinik.

28.

- A) Froga ezazu $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ K.T.E.L.ren kasurako daukagun honako erlazio hau:

$$r_{1.23}^2 = \beta_{12}r_{12} + \beta_{13}r_{13}$$

- B) Ondoko datuak, errealak lehen urteetarako eta estimatuak besteentzako, E.A.E.ko esparru makroekonomikoari dagozkionak dira (iturria: Confebask aldizkaria Azar./Aben. 1992).

	Kontsumo Pribatua	Kontsumo Publikoa	Enplegua (1985=1)
1990	3,9	7,5	1,15
1991	3,1	8,1	1,16
1992	2,7	7,0	1,15
1993	1,5	5,6	1,14
1994	1,1	4,9	1,13
1995	1,9	5,5	1,13

Datu horien bidez lortutako kobariantza- eta koerlazio-matrizeak ondokoak dira:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,929 & & \\ 1,024 & 1,359 & \\ 0,008 & 0,012 & 0,0001 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0,912 & 1 & \\ 0,792 & 0,9613 & 1 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) Enpleguaren karratu txikiaren doikuntza lineala beste bi aldagaien funtzioan. Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna.
- 2) Karratu txikiaren doikuntza lineala, dagozkien aldagai tipifikatueterako. Azter ezazu kontsumo-mota bakoitzaren posizioa erregresore bezala, bere garrantzia kontutan harturik.

- 3) Erregresore bat baztertzea erabakiko bagenu, zeinekin geratuko ginateke? Zein izango litzateke doikuntzaren egokitasuna kasu honetan? Pareka ezazu lortutako egokitasuna, lehengo atalean lortutakoarekin. Idatz itzazu egokiak iruditzen zaizkizun komentarioak.
- 4) Azken urteetako datuak gutxi gora-behera errealak izango balira eta doikuntza onargarria izango balitz, zein izango litzateke enpleguaren indizea, 1996. urterako, kontsumo pribatu eta publikoaren balioak, 2,5 eta 7, hurrunez hurren, izango balira?
29. E.E.E.ko enpresa handi batzuren multzo baterako ondoko informazioa jaso da:

X_1 = egindako salmentak milaka ecutan

X_2 = aktiboa milioika ecutan

X_3 = irabazi garbia milioika ecutan

$$\text{Multzorako ondoko neurriak lortuz: } \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 350 \\ 6790 \\ 5190 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,43 & 0,87 \\ & 1 & 0,64 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Lor ezazu erregresio-planoa, bide batez honako hau aztertzeko: enpresen irabazi garbiaren erlazioan, egindako salmentekiko eta daukaten aktiboekiko halaber, azken bi aldagai hauetatik, zein da pisu erlatibo handiena daukana lehenengoan (irabazi garbian).
- 2) Kalkula itzazu egindako doikuntzaren mugatze-koefizientea eta hondar-bariantza. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 3) Hobeia izango zen, irabazi garbia aldagai bakar baten bidez azaltzea, hots, erregresore baten bidez? Arrazona ezazu erantzuna.
30. Sektore ekonomiko bateko 10 enpresa zoriz aukeratu dira. Bakoitzarentzat, X_1 , X_2 eta X_3 ezaugarriei dagokien informazio kuantitatiboa hartu da. Lortutako datuekin ondoko taula izanik:

X_1	100	800	200	80	60	120	100	40	900	600
X_2	5	10	7	4	4	8	6	5	10	11
X_3	-3	11	-1	-3	0	4	1	-2	2	11

($\bar{\mathbf{x}}$) batezbestekoen bektorea, (\mathbf{L}) kobariantza-matrizea eta (\mathbf{R}) matrizearen (\mathbf{A}_R) matrize adjuntua emanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 300 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 99600 & & \\ 682 & 6,2 & \\ 1096 & 10,5 & 24,6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0,277 & & \\ \mathbf{R}_{12} & 0,51 & \\ 0,04 & -0,24 & 0,24 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) X_2 , X_3 ezaugarriak, X_1 ezaugarriaren gain eragina daukatela uste bada, estima ezazu X_1 aldagaiaren ekuazioa X_2 , X_3 aldagaiekiko.
 - 2) Azter ezazu erregresore bakoitzaren unitate baten aldaketaren eragina (bestea konstante mantenduz) menpeko aldagaian, eta halaber, aldagai azaltzaile bakoitzaren eragin erlatiboa X_1 aldagaiairengan.
 - 3) Kalkula ezazu X_1 aldagaiaren mugatze-koefizientea X_2 , X_3 aldagaiekiko eta lor ezazu hondar-bariantza koefiziente horren funtzioan.
 - 4) Lor ezazu $r_{13,2}$ koerlazio partzialaren koefizientea eta komenta ezazu bere esangura.
31. Ordenagailu modelu desberdinetan hiru aldagai desberdin kontutan izanik egindako ikerketa baten ondorioz, hau da, memoriara sartzeko denbora, X_1 , manosegundotan neurtuta, datuak kanpora bidaltzeko abiadura, X_2 , bytes segundokotan eta prezioa, X_3 , milaka pezetatan, honako estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = (20,25, 38,4, 261)^T$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -0,9 & -0,97 \\ & 1 & 0,95 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & 0,115 \\ & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{R}_{23} \\ & & 0,19 \end{pmatrix}$$

$$S_1^2 = 14,21, \quad S_2^2 = 660, \quad S_3^2 = 10400$$

Eskatzen da:

- 1) Egin ezazu prezioari buruzko datuak kanpora bidaltzeko abiadurarekiko erregresioa.
 - 2) Egin ezazu prezioaren beste bi aldagaiekiko erregresioa. Kalkula ezazu doikuntzaren egokitasuna eta konpara ezazu aurreko atalean kalkulaturako egokitasunarekin. Azal itzazu lortutako erantzunak.
 - 3) Azter ezazu aurreko atalean egindako erregresioan zein aldagai independentek duen eragin handiago. Azal ezazu beta koefizientearen eta b koefizientearen arteko diferentziaren zergaitia.
32. O.N.U.ko urtekari estatistikotik ondoko datuak atera ditugu, 1976. urtea harturik:

	X_1	X_2	X_3
Birmania	0,69	5	96
Bangladesh	0,23	5	112
Sri Lanka	3,85	38	214
Indonesia	0,75	61	234
Thailandia	1,56	69	351
Malaysia	2,93	322	825

X_1 : aldagaia, ospitale-ohelak/1.000 biztanle
 X_2 : esportatutako balioa/biztanle (dolarretan)
 X_3 : Nazio-errenta erabilgarria (dolarretan).

Eskatzen da:

- 1) X_3 -ren X_1 eta X_2 -rekiko erregresio lineala.
- 2) Koerlazio-koefiziente anizkoitza.
- 3) Zein da aldagai independenteek X_3 -ren bariantzatik azaltzen duten proportzioa?
- 4) Komenta itzazu laburki lortutako emaitzak.

33. \mathbf{X} , ondoko datu-matrizea emanik:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Batezbesteko-bektorea.
- 2) Kobariantza-matrizea datu-matrize zentratuaren bidez.
- 3) Datu-matrize tipifikatua.
- 4) \mathbf{A}_L eta \mathbf{A}_R , \mathbf{L} eta \mathbf{R} -ren matrize adjuntuak.
- 5) $|\mathbf{L}|$ eta $|\mathbf{R}|$ determinanteak.
- 6) Ondoko arrazoiak azaltzea:

$$\frac{|\mathbf{L}|}{|\mathbf{R}|}, \frac{\mathbf{L}_{22}}{\mathbf{R}_{22}}, \frac{\mathbf{L}_{34}}{\mathbf{R}_{34}}$$

- 7) \mathbf{Y} datu-matrizea $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$ izanik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 8) \bar{y} batezbesteko-bektorea, \bar{x} batezbesteko-bektorearen bidez.
 9) $L(Y)$ kobariantza-matrizea $L(X)$ kobariantza-matrizearen bidez.
 Oharra: X , Y datu-matrizeen arteko erlazioa hauxe da:

$$Y = XA^T + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} b^T$$

34. Hamar etxebizitzatarako ondoko datuak hartu ditugu:

X_1 : beroketa-zerbitzuan erabilitako propano-kontsumoa.

X_2 : inguruko tenperatura Fahrenheit gradutan.

X_3 : sabaiaren isolamendua zentimetrotan.

X_1	X_2	X_3
270	40	2
360	25	2
160	40	10
50	75	6
95	65	6
230	40	6
370	10	6
300	10	6
240	25	10
125	70	2

Honakoa eskatzen da:

1) $\hat{X}_1(X_2, X_3)$, karratu txikienez doitutako erregresio-planoa.

2) Konstantea (jatorriaren ordenatua) eta erregresio-koefizienteen esanahia azaltzea.

35. FORD, RENAULT eta CITROEN automobilen saldutako kopuruak ditugu. Halaber, lortutako koerlazio-matrizea eta desbidazio tipikoak.

F	R	C
46	60	14
31	45	14
61	75	14
58	80	22
43	65	22
73	95	22
70	100	30
55	85	30
85	115	30

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,97 & 0,62 \\ & 1 & 0,80 \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} S_1 = 15,86 \\ S_2 = 20,41 \\ S_3 = 6,53 \end{array}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) FORD automobilen salmentak ongien aurrestaten duen erregresio-zuzena eta doikuntzaren egokitasuna.
- 2) FORD automobilen salmentak aurrestaten duen erregresio-planoa eta doikuntzaren egokitasuna. Zenbatekoa da ehunekotan azaldutako bariantzaren irabazia aurreneko doikuntzarekin parekatuz?

36. (Y, X_1, X_2) aldagaien ondoko balioak emanik:

Y: ondasun eta zerbitzuen inportazio-indizeak.

X_1 : Nazio-Produktu Gordinaren indizeak.

X_2 : inportazioen prezio-indizeak.

URTEAK	Y	X_1	X_2
1970	21	52	120
71	30	58	120
72	40	64	116
73	50	69	109
74	56	73	105
75	72	78	98
76	82	84	96
77	81	88	94
78	86	93	100
79	100	100	100
80	?	110	103

Honakoa eskatzen da:

- 1) Datu haueetan $\hat{Y}(X_1, X_2)$ ongien doitzen den erregresio-planoa.
- 2) Bi erregresoretan zein da garrantzitsuena erregresio honetan? Arrazona ezazu.
- 3) 1980. urterako NPG 110 eta inportazioen prezio-indizea 103 izanik, zein da erregresio-planoaren bidez estimatutako ondasun eta zerbitzuen indizea?

37. Ondoko taulan, X_1, X_2, X_3 aldagaien datuak ditugu:

X_1	X_2	X_3
2	4	2
3	5	4
6	10	6
8	11	7
10	15	10

Lor itzazu:

- 1) Ongien doitzen den $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio-planoa, karratu txikiaren irizpideari jarraituz.

- 2) Erregresioaren mugatze-koefizientea.
 3) Pareka ezazu, $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioa $\hat{X}_1(X_2)$ eta $\hat{X}_1(X_3)$ erregresioekin.

38. Ondoko taulan (L) latitudea gradutan, (A) altuera metrotan, eta (T) urteroko betezbeteko tenperatura itsasertzeko sei hiriburutarako dauzkagu.

	L(X ₁)	A(X ₂)	T(X ₃)
Gijon	44	22	13
Vigo	43	45	14
Bartzelona	41	95	16
Valentzia	39	24	17
Almeria	37	6	18
Cadiz	36	30	18

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 40 \\ 37 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8,67 & 26 & -5,5 \\ 26 & 805,33 & -10 \\ -5,5 & -10 & 3,67 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Eraiki eta interpreta ezazu erregresio-eredu bat tenperatura beste bi aldagaien menpe dagoela lortzeko.
 - 2) Kalkula itzazu mugatze-koefizientea eta hondar-bariantza.
 - 3) Aurrean ezazu Tortosa-ren batezbesteko tenperatura bere datuak ondokoak direla jakinik: L = 40, 5; A = 50m. (INERen datuak).
 - 4) Esan al daiteke erregresio honetan latitudea altuera baino garrantzitsuagoa dela?
39. Ondoko taulan, Arabako sei eskualdeetarako EUSTATEk ematen dizkigun lau aldagaien datuak ditugu:

X₁: langabeen %

X₂: pertsonal zuzendari eta teknikarien %

X₃: biztanleria okupatuaren %, industrian.

X₄: biztanleria okupatuaren %, zerbitzutan.

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
Errioxa arabarra	10,9	5,2	29,4	28,3
Arabako ibarrak	12,3	6,3	20,7	28
Arabako mendialdea	13,7	4,7	22,8	25,3
Gorbeiako inguruak	15,6	9,1	40,7	36,1
Arabako lautada	18,9	12,4	43,7	47,7
Kantauri arabarra	22,2	6,7	59,5	29,1

Datu horien bidez lortutako estatistiko bakunak eta bikoitzak hauexek dira:

$$S_1 = 3,89$$

$$S_2 = 2,64$$

$$S_3 = 13,45$$

$$S_4 = 7,58$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 15,6 \\ 7,4 \\ 36,13 \\ 32,4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,50 & 0,91 & 0,43 \\ 0,5 & 1 & 0,46 & 0,98 \\ 0,91 & 0,46 & 1 & 0,40 \\ 0,45 & 0,98 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ondokoa, \mathbf{R} koerlazio-matrizearen matrize adjuntua izanik.

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0,0286 & -0,0158 & -0,0239 & 0,01276 \\ & 0,14004 & 0,0026 & -0,1314 \\ & & 0,0261 & -0,0027 \\ & & & 0,1289 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Langabeen portzentaia beste aldagaien bidez estimatuko duen erregresio-hiperplanoa lortzea.
 - 2) Langabeen portzentaiaren beste aldagaiekiko hiperplanoa, aldagai tipifikatueterako.
 - 3) Lortutako b eta β koefizienteen azterketa. Halaber, doikuntzaren egokitasunarena.
 - 4) Nola justifikatuko zenuke r_{14} eta β_{14} koefizienteen arteko ezberdintasuna?
40. Ekonomialari batek, galsoroen (X_1) errendimenduan faktore batzuen eragina aztertu behar du, konkretuki, ondoko faktoreen lehentasunak erabakiz:
- X_2 = potasio eta azido fosforikoarena.
 X_3 = nitrogenoarena.
 X_4 = Lurraren pH-arena.

Hamar sorotan errendimenduak neurtu ondoren, alboan daukagun koerlazio-matrizea lortu da.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,736 & 0,523 & 0,383 \\ & 1 & 0,012 & 0,758 \\ & & 1 & -0,341 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Erregresiorik egokiena, finkatutako helbururako.
- 2) Lortutako emaitzaren komentarioa, doikuntzaren egokitasuna aztertu ondoren.

41. Hamar parkineko kate baten jabeak, sarreretan eragina daukaten faktoreak, inguruko familien bizi-maila eta hirilurraren urritasuna direla uste du.

Hamar parkinei dagozkien ondoko hiru aldagaien balioak ditu:

X_1 : hileroko sarrerak/biztanle, 10^3 pezetatan, parkinaren barrutian.

X_2 : biztanle-kopurua/ha., parkinaren barrutian.

X_3 : parkinen sarrera totalak, 10^6 pezetatan.

Aldagaien balioen bidez lortutako estatistikoak hauexek dira:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_1^2 = 140 \\ S_2^2 = 900 \\ S_3^2 = 20 \end{matrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & +0,20 & -0,20 \\ +0,20 & 1 & +0,80 \\ -0,20 & +0,80 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Lor ezazu, ongien doitzen den parkinen sarreraren beste bi aldagaiekiko karratu txikienen erregresio-planoa. Kalkula ezazu, halaber, hondarren bariantza.
- 2) Zein da, doikuntza honetan, erregresore bakoitzak daukan pisu erlatiboa? Komenta ezazu laburki.
- 3) Zortzi parkinen (planoaren bidez) estimatutako balioak ezagunak eta beste biak ezezagunak direla suposatuz:

$$\hat{X}_3: 9,0; 6,5; 16,5; 12,0; 7,5; 15,5; 14,0; 15,0; x; y.$$

Lor itzazu balio horiek karratu txikienen erregresio linealaren propietateak aplikatuz.

42. Merkataritza elkarte handi batek langile berriak aukeratzekoan bi proba berezi planteatzen ditu. Aprobak horiek gainditu zituzten 20 langile, bi urteren buruan honela sailkatu dira:

X_1 : lortutako puntuazio teorikoaren arabera.

X_2 : lortutako puntuazio praktikoaren arabera.

X_3 : lortutako puntuazioa, langile bakoitzak egindako lanean eduki duen trebetasunaren arabera.

Halaber, ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 108 \\ 96 \\ 93 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 20 & 5,5 & 13 \\ 5,5 & 11 & 17 \\ 13 & 17 & 37 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) X_3 aldagaia azaltzen duen erregresio-planoa X_1 , X_2 aldagaiekiko, beronen hondar-bariantza eta mugatze-koefizientea. Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 2) Zein izango litzateke langile baten trebetasunaren puntuazioa, puntuazio teorikoan 105 puntu eta puntuazio praktikoan 110 puntu lortu bazituen?
- 3) Kalkula itzazu X_2 , X_3 aldagaien koerlazio-koefiziente totala eta koerlazio-koefiziente partziala. Pareka itzazu lortutako balioak berorien ezberdintasuna azalduz.

43. Hiri batean etxebizitzaren merkaturako ondoko datuak ditugu:

X_1 : busaren geltokira daukaten distantzia (etxaldetan).

X_2 : salmenta-prezioa (milaka \$-etan).

X_3 : azalera bizigarria (hamarnaka m^2 -tan).

X_1	X_2	X_3
3	41	13
3	32	10
4	24	8
4	44	14
4	42	14
5	36	12
0	35	10
1	40	12
6	29	10
4	26	8

Datu horien multzo-neurriak hauexek dira:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = 3,4 & S_1^2 = 2,84 & S_{12} = -2,96 \\ \bar{x}_2 = 34,9 & S_2^2 = 43,89 & S_{13} = -0,04 \\ \bar{x}_3 = 11,1 & S_3^2 = 4,49 & S_{12} = +13,51 \end{array}$$

- 1) Zeinek uste duzu edukiko duela eragin handiagoa salmenta-prezioan, azalera bizigarriak ala bus geltokira dagoen distantziak? Egin ezazu dagokion erregresioa zure ustea egiaztatzeko. Azter ezazu, halaber, doikuntzaren egokitasuna lortutako emaitza komentatuz. Esan al dezakezu erregresore bakoitzak azaltzen duen ehunekoa zein den?
- 2) Froga ezazu ondoko baieztapena egiazkoa ala gezurrezkoa den: Datu hauetan, prezioak azaltzen duena bazterturik, buserainoko distantzia handiagoari azalera erabilgarri handiagoa dagokiola esan daiteke.

44. Automobil marka baten salmentetan “mass media” desberdinetan egindako publizitateak daukan eragina aztertu nahi da.

Horretarako ondoko datuak bildu dira bost europar estatutarako:

Estatuak	Publizitate-gastuak milioika ECUn			Salmentak milaka unitatetan
	Prentsa (X_1)	Irratia (X_2)	Telebista (X_3)	
A	4	1	7	18
B	6	2	5	20
D	10	3	8	30
E	9	1	9	24
F	4	2	6	19

Datu hauen bidez lortutako kobariantza-matrizea eta berorren matrize adjuntua ondokoak dira.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 6,24 & 0,72 & 2,4 & 10,28 \\ & 0,56 & -0,2 & 2,04 \\ & & 2 & 3,8 \\ & & & 19,36 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} 1,40 & 4,38 & 1,67 & -1,53 \\ & 16,14 & 6,40 & -5,28 \\ & & 2,67 & -2,08 \\ & & & 1,79 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Salmenta aldagaiaren, gastu-motek adierazten duten hiru aldagaiekiko, karratu txikiaren erregresioa linealaren funtzioa.
 - 2) Azter ezazu erregresore bakoitzaren garrantzia 1) atalean egindako doikuntzaren arabera.
 - 3) Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna.
45. Hamar probintzia dituen lagin batean, ondoko hiru aldagaiak neurtu dira:

X_1 : famili errenta erabilgarria.

X_2 : aurrezki kutxatan gainezarrirako saldoa.

X_3 : “Per capita” errenta.

Koerlazio-koefizienteak: $r_{12} = 0,88$, $r_{13} = 0,48$, $r_{23} = 0,68$ izanik,

- 1) Lor ezazu “gainezarrirako saldoa” aldagaiaren erregresio-planoa, “famili errenta” eta “per capita errenta” aldagai erregresoretan erregresioan indar handiena zeinek daukan ikus dezagun. Komenta ezazu lortutako emaitza. Kalkula itzazu mugatze-koefizientea eta koerlazio-koefiziente anizkoitza.

- 2) Tipifikatu gabeko erregresioaren hondarrak ondokoak direla jakinik:
 $-3, 1, -2, 0, -5, 1, -1, -2, e_9, e_{10}$
 lor ezazu falta zaizkigunak, $S_{x_2}^2 = 104,55$ izanik.
- 3) Lor ezazu $r_{13,2}$ koerlazio-koefiziente partziala eta pareka ezazu r_{13} koerlazio totalarekin, elkarren arteko desberdintasuna azalduz.

46. Ondoko taulak, Y, X_1, X_2 , aldagaien datuak biltzen ditu.

Y : migrazio-tasa

X_1 : errenta / biztanle

X_2 : nekazaritzako populazioaren portzentaia.

Beraiei dagozkien datuak 50.eko hamarkadaren azkeneko urteetarako hartu dira:

Probintziak	Y	X_1	X_2
Jaen	-10	13	69
Caceres	-9	10	75
Lleida	-2	20	60
Girona	+2	21	39
Bizkaia	+8	31	17
Madril	+11	27	9

Bartzelona	?	28	9

Eta datuen bidez lortutako batezbesteko aritmetikoak, bariantzak eta kobariantzak:

$$\begin{array}{lll} \bar{y}_1 = 0 & S_y^2 = 62,33 & S_{yx_1} = 54,5 \\ \bar{x}_1 = 20,33 & S_{x_1}^2 = 53,36 & S_{yx_2} = -195,33 \\ \bar{x}_2 = 44,83 & S_{x_2}^2 = 636,44 & S_{x_1x_2} = -172,06 \end{array}$$

Honakoa eskatzen da:

- Doi ezazu Y -ren (X_1, X_2)-rekiko karratu txikiaren erregresio plano aldagaien datu-hodeian.
- Lor ezazu plano honek Bartzelonako probintziarako estimatuko lukeen migrazio-tasa.
- Azal ezazu, arrazonatuz, parte handiena hartzen duen aldagaia zein den, a) atalean lortutako erregresioan.
- Doikuntza ona dela esan al da? Arrazona ezazu erantzuna.

47. X_1, X_2, X_3 aldagai hirukoitzaren ondoko datuak jakinik:

$$r_{12}=0 \quad r_{13}=+0,6 \quad r_{23}=+0,8$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu, X_1 aldagaiaren erregresioaren beste bi aldagaiekiko $r_{1,2,3}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza.
- 2) Lor ezazu X_3 -ren eragina beste aldagaietan kontrolatzen duen $r_{12,3}$ koerlazio-koefiziente partziala.
- 3) Komenta itzazu lortutako emaitzak.

48. Azpigaratutako 49 herritan X_1, X_2, X_3 aldagaiak neurturik kobariantza-matrizea lortu da.

X_1 : inflazioaren batezbesteko tasa 1980-1985 urte bitartean.

X_2 : haurren hilkortasunaren batezbesteko tasa 1985. urtean.

X_3 : pertsona bakoitzeko NPG (Nazio Produktu Gordina), dolarretan 1985. urtean.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 16 & 80 & -1200 \\ 80 & 2500 & 20000 \\ -1200 & -20000 & 250000 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) $r_{3,12}$ koerlazio-koefiziente anizkoitza bere balioaren esangura komentatuz edo irazkinduz.
- 2) $r_{12,3}$ koerlazio-koefiziente partziala bere balioaren esangura irazkinduz.
- 3) Aurkez ezazu grafikoki ondoko aldagai-bikoteen balio tipifikatuen bektoreen arteko erlazioa.
 X_1 eta X_2
 X_2 eta X_3

49. Oporrak Espainian igarotzeko aukera egiterakoan, atzerriko turistek daukaten motibazioei buruz, azterketarako hurbilketa gisa, 5 herritan, ondoko aldagaiak neurtu dira:

X_1 : distantzia kilometrotan.

X_2 : Barne Produktu Gordina/biztanle ECUtan

X_3 : Herri bakoitzetik etorritako turisten bere populazio totalarekiko ehunekoa.

Ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2020 \\ 3,4 \\ 1,62 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} S_1 = 691,1 \\ S_2 = 0,59 \\ S_3 = 0,66 \end{matrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,77 & -0,90 \\ -0,77 & 1 & 0,83 \\ -0,90 & 0,83 & 1 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu etorritako turisten ehunekoaren, ongien doitzen den karratu txikiaren erregresio linealaren eredu, beste bi aldagaien funtziotan.
- 2) Nola neurtuko genuke datu hauetan erregresioaren ahalmen azaltzailea? Zein da erregresorerik garrantzitsuena erregresio honetan?
- 3) Kalkula ezazu $r_{13,2}$ koerlazio-koefizientea eta interpreta ezazu \mathbf{R} koerlazio-matrizeko koefizienteekin daukan erlazioa.

50. Sektore bateko enpresa multzo bati buruzko azterketa egin nahian hiru aldagaitarako ondoko estatistikoak lortu dira:

X_1 : itzulitakoa milaka milioi pezetatan.

X_2 : salmentak milaka milioi pezetatan.

X_3 : bezero kopurua.

$$\bar{x}_1 = 20 \qquad S_1^2 = 100 \qquad r_{12} = 0,9$$

$$\bar{x}_2 = 100 \qquad S_2^2 = 900 \qquad r_{13} = 0,6$$

$$\bar{x}_3 = 25 \qquad S_3^2 = 36 \qquad r_{23} = 0,2$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor itzazu X_1 aldagaiaren X_2 , X_3 aldagaiekiko erregresio-planoa eta doikuntzaren egokitasuna.
- 2) Konpara ezazu lortutakoa aldagai azaltzaile bat kenduz lortzen ditugun emaitzekin.
- 3) Lor itzazu $r_{12,3}$, $r_{13,2}$ koerlazio-koefiziente partzialak eta komenta itzazu lortutako emaitzak 2) atalean lortutakoekin parekatuz.

51. Ondokoa koerlazio-matrizearen *ADJUNTUEN* matrizea izanik

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0,296 & 0,04 & -0,124 & 0,024 \\ & 0,326 & -0,088 & -0,068 \\ & & 0,8 & -0,58 \\ & & & 0,75 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) $r_{12,34}$, $r_{13,24}$, $r_{14,23}$ koerlazio-koefiziente partzialak.
- 2) Koefiziente horien esangura.
- 3) Zein da erregresorerik garrantzitsuena X_1 aldagaiaren erregresioan?

52. Herri bateko kriminaltasunean eragina daukaten faktoreen azterketa egin nahian ondoko aldagaiak neurtu dira populazioaren adierazgarri diren sekzioen multzo baterako:

X_1 : talde txikien edo baztertuen populazioaren portzentaia.

X_2 : kriminaltasunaren tasa/milaka biztanle.

X_3 : langabeziaren tasa.

Ondoko koerlazio-matrizea lortu da:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,82 & 0,48 \\ 0,82 & 1 & 0,59 \\ 0,48 & 0,59 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Lor ezazu ongien doitzen den karratu txikiaren erregresio-planoa, plano hori gure helburuari erantzuteko dagokiona izanik.

Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna eta esan ezazu, ahal bada, erregresore bakoitzari azaldutako bariantzan dagokion proportzioa.

2) Lor ezazu X_1 , X_2 aldagaien artean X_3 aldagaiaren eragina baztertu ondoren geratzen den koerlazioa. Pareka ezazu eragin hori baztertu gabe daukaten koerlazioarekin.

53. Unibertsitate baten sarrerako hautaprobek hiru atal dituzte: matematika, ingelesa eta kultura orokorra.

X_1 estatistika, X_2 matematika, X_3 ingelesa eta X_4 kultura orokorra asignaturen puntuazioak izanik, ondoko emaitzak lortu dira:

$$\bar{x}_1 = 75, \quad \bar{x}_2 = 24, \quad \bar{x}_3 = 15, \quad \bar{x}_4 = 36$$

$$S_1 = 10, \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 3, \quad S_4 = 6$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.90 & 0.75 & 0.80 \\ & 1 & 0.70 & 0.70 \\ & & 1 & 0.85 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 0.1305 & -0.087 & 0 & -0.0435 \\ & 0.095 & -0.014 & 0.0150 \\ & & 0.068 & -0.0480 \\ & & & 0.0825 \end{bmatrix}$$

Eskatzen da:

1) Lor ezazu estatistikaren puntuazioa Unibertsitateko hautaprobek menpe estimatuko duen erregresioaren hiperplanoa.

Zein da estatistikaren puntuazioaren balio auresana, matematikarena 30, ingelesarena 5 eta kultura orokorrarena 40 izanik?

2) Kalkula itzazu $r_{12,34}$, $r_{13,24}$ eta $r_{14,23}$ koerlazio partzialaren koefizienteak.

3) Interpretatu itzazu lortutako emaitzak. Ingeles aprobarekin zer gertatzen dela uste duzu? Zergatik?

54. Enpresa baten 10 hilabetetako X_1 (prezioa pezetatan) aldagaiaren, X_2 (saldutako kopurua milakotan) aldagaiaren eta X_3 (publizitatean gastua milaka pezetatan hilabete batean) aldagaiaren datuak ditugu. Ondorengo estatistikoak beraiei dagozkie:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 115, & \bar{x}_2 &= 950, & \bar{x}_3 &= 190 \\ r_{12} &= 0,7 & r_{13} &= 0,8 & r_{23} &= 0.95 \\ S_2 &= 20 \cdot S_1 & & & &= 30 \cdot S_3\end{aligned}$$

Eskatzen da:

- 1) Karratu txikienen eredia kontutan izanik, lor ezazu datuei hobekien egokitzen zaien erregresio-zuzena, berarekin prezio eta publizitatearen baterako eragina salmentetan azaltzeko, emandako unitateetan.
 - 2) Esan al genezake funtzio honen bitartez estimatutako kopuruak benetako kopuruak “ongi” errepresentatzen duela? Zein da 10 hilabete horietarako estimatutako kopuruaren batezbestekoa? Eta zein dagozkien hondarrarekin kobariantza?
 - 3) Prezio eta kopuruaren arteko erlazioaren zeinua komenta eta iker ezazu, estatistiko egokiak erabiliz, erlazio hori publizitatearen gastuen eraginagatik ote den ala ez.
55. Datu multzo berdinarekin egindako $\hat{X}_1(X_2, X_3, X_4)$ eta $\hat{X}_2(X_1, X_3, X_4)$ erregresioekin lortutako hurrengo datuekin,

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= 0.5x_2 + 0.34x_3 + 0.8x_4 + 3.25 \\ \hat{x}_2 &= 0.7x_1 + 0.62x_3 + 0.32x_4 + 1.98 \\ S_1^2 &= 25, & S_2^2 &= 36, & S_3^2 &= 9, & S_4^2 &= 16 \\ r_{12} &= 0.75, & r_{12,3} &= 0.70, & r_{12,4} &= 0.61\end{aligned}$$

- 1) Lor ezazu $r_{12,34}$ koerlazio-koefiziente partziala, azalburuan emandako beste koerlazio-koefizienteekin duen erlazioa azalduz.
 - 2) Egindako erregresioa bakoitzean, aldagai independenteetatik zeinek du indar handiena?
56. Ondoko datuak, 1981. urterako, (X_1, X_2, X_3) ekonomiaren hiru sektoreen BEG (Balio Erantsi Gordina) faktore-kontutan (mila milioika pezetatan) adierazten dituzte:

Probintzia	Nekazaritza eta Arrantza (X_1)	Industria (X_2)	Zerbitzuak (X_3)
1	38	21	81
2	37	121	205
3	28	60	132
4	25	46	83

Datu horien bidez lortutako 1 kobariantza-matrizea, honen A_L adjuntuen matrizea eta batezbesteko-bektorea honako hauek dira:

$$L = \begin{pmatrix} 31,5 & & & \\ 42,2 & 1355,5 & & \\ 100,5 & 1795 & 2537,2 & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 32 \\ 62 \\ 125,25 \end{pmatrix}$$

$$A_L = \begin{pmatrix} 215354 & & & \\ 73378 & 69821 & & \\ -60457 & L_{32} & 40917 & \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) Lor ezazu Zerbitzu sektorearen BEGaren karratu txikiaren doikuntza lineala Industri sektorearen BEGaren funtzioan. Azter ezazu doikuntzaren egokitasuna.
 - 2) Lor ezazu Zerbitzu sektorearen BEGaren karratu txikiaren doikuntza lineala beste bi sektoreen BEGaren funtzioan. Zein da doikuntza honen egokitasuna?
 - 3) Zerbitzu sektorearen BEGaren eta Industri sektorearen BEGaren arteko erlazioa, Nekazaritza eta Arrantza sektorearen BEGaren eragina baztertzen denean, asko aldatzen al da?
 - 4) Estima ezazu Zerbitzuen BEGa probintzia hipotetiko batentzat, bere Nekazaritza eta Arrantzaren BEGak eta Industriaren BEGak 30 eta 100 balioak izanik, hurrenez hurren. Estima ezazu, halaber, balio horiek 100 eta 30 diren beste probintzia baten kasurako. Adieraz itzazu egokiak uste dituzun komentarioak.
57. Ondoko datuak hiri bateko 4 kanpalekutan urtearen hamabostaldi batean egoten diren pertsonen (X_1 milaka pertsonatan), pertsona eta egun bakoitzeko prezioari (X_2 ehundaka pezetatan), eta hondartzarainoko distantziari (X_3 kilometrotan) dagozkie:

Kanpalekua	Pertsonak	Prezioa	Distantzia
A	1	2	4
B	0,6	3,5	5
C	0,5	4	6
D	0,76	5	2

Datu hauen bidez lortutako L kobariantza-matrizea, matrize honen adjuntu batzuk, R koerlazio-matrizea eta \bar{x} batezbesteko bektorea, honako hauek dira:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,04 & & \\ -0,12 & 1,17 & \\ -0,16 & -0,53 & 2,19 \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0,57 & & \\ -0,57 & -0,33 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^T = [0,715 \quad 3,625 \quad 4,25], \quad L_{11} = 2,281, \quad L_{13} = 0,251$$

- 1) Lor ezazu kanpalekura joango liratekeen pertsonen estimazioa, kanpalekua hondartzatik 0,5 Km-tara eta prezioa 600 pezetakoa izango balira.
 - 2) Zein da, doikuntza honetan, garrantzi handiena hartzen duen aldagaia? Doikuntza honek, azalpenarako ahalmenik ba al dauka?
 - 3) Hondartzarainoko distantziak ba al dauka eraginik beste bi aldagaien arteko erlazioan? Eta prezioak beste bi aldagaien arteko erlazioan? Arrazona itzazu erantzunak.
58. Industri elkarte baten pertsonal departamentuak, (X_1) asteroko alokairua dolarretan, (X_2) zerbitzu-denbora urtetan eta (X_3) enpleguaren adina urtetan, aldagaien arteko erlazioa, aztertu nahi du. Horretarako, 10 enplegatu lagina aztertuz, ondoko emaitzak lortu ditu:

$$\bar{x} = (479,4 \quad 26,3 \quad 53,3)^T$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 5320 & 598 & 280 \\ & 90 & 50 \\ & & 57 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_L = \begin{pmatrix} 2630 & -20086 & 4700 \\ & 224840 & -98560 \\ & & 121196 \end{pmatrix}$$

- 1) Eraiki eta interpreta ezazu, asteroko alokairua aurrean ahal duen erregresio-eredua, zerbitzu-denbora eta adina aldagaien funtzioan.
 - 2) Zein izango da 20 urte zerbitzuz eta 50 urte adinaz dituen enplegatu baten estimatutako alokairua? Arrazona ezazu erantzuna.
 - 3) Zein izango da, asteroko alokairuaren eta zerbitzu denboraren arteko erlazioa, adinaren eragina baztertuz? Zein izango da, asteroko alokairuaren eta adinaren arteko erlazioa, zerbitzu denboraren eragina baztertuz? Komenta itzazu lortutako emaitzak.
59. 4 probintziatako kolektibo batean, urte betean, ondoko aldagaiak neurtu dira:
- X_1 : elikadura gastuak (milaka pezetatan).
 X_2 : atsedenaldirako gastua (milaka pezetatan).
 X_3 : famili errenta erabilgarria (milaka pezetatan).

Ondoko, batezbesteko -bektorea, bariantzak, koerlazio-matrizea eta matrize honen zenbait adjuntu jakinik:

$$\bar{\mathbf{x}} = [45, 17, 90]^T ; S_{x_1}^2 = 95 ; S_{x_2}^2 = 42 ; S_{x_3}^2 = 140$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0,4 & 1 & \\ 0,9 & 0,7 & 1 \end{pmatrix} ; \mathbf{R}_{13} = -0,62 ; \mathbf{R}_{33} = 0,84$$

- 1) Lor ezazu famili errenta erabilgarriaren erregresio-planoa elikaduraren gastuen eta atsedendien gastuen bidez erlazioa azalduz. Adiera ezazu egindako doikuntzaren egokitasuna.
 - 2) Egindako erregresioaren ondoko hondarrak jakinik, $e_1 = 3,86$; $e_3 = -0,63$, kalkula itzazu e_2 eta e_4 hondarrak.
 - 3) Kalkula ezazu $r_{12,3}$ koerlazio partziala, lortutako emaitzak zabalki komentatuz.
60. Ezaugarri turistikoen ikerketa burutu da penintsulako kostaldean dauden hiri batzuen multzo baterako. Horretarako, lau aldagai neurtu dira:

X_1 : batezbesteko tenperatura udaldean.

X_2 : hotel-tokien kopurua.

X_3 : hotelen batezbesteko prezioa.

X_4 : turisten kopurua udaldean.

Ondoko emaitzak lortu dira:

$$\bar{x}_1 = 22, \bar{x}_2 = 1954, \bar{x}_3 = 6700, \bar{x}_4 = 12324$$

$$r_{14} = 0,93, r_{24} = 0,8, r_{34} = 0,7$$

$$S_1 = 15, S_2 = 2560, S_3 = 4012, S_4 = 15810$$

$$\mathbf{R}_{14} = -0,55, \mathbf{R}_{24} = -0,24, \mathbf{R}_{34} = -0,095$$

$$\mathbf{R}_{44} = 0,95, \mathbf{R}_{11} = 0,76, \mathbf{R}_{33} = 0,94$$

Eskatzen da:

- 1) Zein izango da karratu txikiaren erregresio-planoaren adierazpena, lehen 3 aldagaien eragin erlatiboa turisten kopuruan ikus dezagun? Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 2) Estima daiteke, plano honen bidez, hiri bateko turisten kopurua bere batezbesteko tenperatura 24° , hotel-tokiak 3.500 eta batezbesteko prezioa 7.300 pta izanik? Zergatik? Azal ezazu nola lortuko zenukeen estimazio hau.
- 3) Aldagai independente eta menpeko aldagai bakoitzaren arteko erlazioan beste bi aldagai independenteek ba al daukate eraginik? Egin itzazu beharrezkoak uste dituzun eragiketak eta komentarioak.

61. Lau urtetan Estatuko zentral hidroelektrikoen jarraipena egin ondoren, non ondoko aldagaiak urtez urte ikasi diren:

X_1 : ekoizpen hidroelektrikoa, mila miloika KWH-tan.

X_2 : erabilpenaren denbora milaka ordutan.

X_3 : bildutako euria milaka Hm³-tan.

Hurrengo estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = (28,21 \quad 2 \quad 289)^T$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 13,39 & 0,86 & 123,83 \\ & 0,06 & 8,07 \\ & & 1297,77 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,96 & 0,94 \\ & 1 & 0,91 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioan, zein izango da X_1 aldagaiaren balio estimatuen batezbestekoa oharpenen denboraldi horretarako? Eta zein balio estimatuen eta hondarren arteko koerlazioa? Arrazona itzazu erantzunak.
- 2) Lor ezazu ekoizpen hidroelektrikoaren erregresioa beste bi aldagaiekiko, erregresio horretan zein aldagaik daukan garrantzi handiagoa ikus dezagun. Zein da azaltzen ez den bariantzaren portzentaia? Komenta itzazu lortutako emaitzak.
- 3) Kalkula ezazu $r_{12,3}$ koerlazio partzialaren koefizientea. Egiazta ezazu betetzen dela koefiziente horren eta β_{12} , β_{21} erregresio-koefizienteen arteko erlazioa. Pareka ezazu, halaber, r_{12} koerlazio-koefiziente totalarekin eta komenta ezazu ohartzen duzuna.

4. ZENBAKI INDIZEAK

ADIERAZBURUAK

4.1. Herri batean egindako inkesta baten ondoren, prezio-segida hauek lortuko dira urte bakoitzeko pezetatan:

Urteak	Ardoa (litroa)	Okela (kg)	Arrautzak (dozena)	Gurina (kg 1/2)
1977	40	310	30	100
1978	45	390	45	150
1979	50	450	60	175
1980	80	550	90	250

1977. urtea oinarriztat harturik, atera ezazu indizeen segida bakarra kontsumo-ondasun multzo horren prezioen eboluzioa ikusteko, indizearen hautaketa arrazonatuz.

4.2. Ondoko taulan datuak milaka tonatan adierazten dira.

Urteak	Bakailaoa eta kidekoak	Sardina eta kidekoak
1965	282	249
1966	312	220
1967	349	197
1968	350	194
1969	297	185

Honakoa eskatzen da:

- 1) Kalkula itzazu ahal dituzun indizeak.
- 2) Komenta itzazu laburki indize hauek dituzten eragozpenak.

4.3. Ondoan ditugu bi estatutara “baterako elkarteen” bidez esportatutako itsasuntziak, 1980-1985 bitartean urteko tartea kontutan harturik.

Urteak	1980	1981	1982	1983	1984
Irlandara	3	7	7	8	9
Erresuma Batura	5	28	53	54	48

Honakoa eskatzen da:

- 1) Kalkula itzazu ezagutzen dituzun indizeak, (1980. urtean oinarriturik), bi estatu hauetara esportatutako itsasuntzien eboluzioa aztertzeko.
- 2) Azter itzazu emaitzak, lortutako indizeak parekatuz eta berauek erabiltzearen egokitasuna aztertuz.

- 4.4. Hiri batean zinetokietako sarreren batezbesteko prezioak aztertu ondoren, emaitza hauek ditugu (1978-1981) urte tarterako.

Urtea	Estreinaldiko filmeak		Berrestreinaldiko filmeak	
	Zinetoki kopurua	Batezbesteko prez. (pta)	Zinetoki kopurua	Batezbesteko prez. (pta)
1978	6	125	20	40
1979	7	150	18	70
1980	8	175	16	100
1981	9	200	14	130
1982	10	250	12	160

Honakoa eskatzen da:

Bost urte horietako ondoko PREZIO-INDIZE KONPLEXUAK, filmeen prezioen eboluzioa oro har ikus ahal izateko.

- 1) Batezbesteko aritmetiko eta agregatu sinplearen metodoak erabiliz (oinarria = 1978), komenta itzazu laburki metodo hauek, lortu dituzun emaitzekin erlazionatuz.
- 2) Laspeyres eta Paasche-ren indizeak (oinarria = 1978). Zergatik dira desberdinak bi emaitzak?
- 3) 1982. urtean segida berria eraiki nahi dugu 1981. urtean oinarriturik. Kalkula itzazu: oinarri berriarekiko 1982. urteko indizea eta aurreko urteetakoak lotura eragiketaren bidez.

- 4.5. Automobilgintzan diharduen enpresa batek bi auto-mota kaleratzen ditu, "A" eta "B" motakoak alegia.

1979-82 urteetako produkzio-indizea ateratzeko ondoko datuak ditugu:

Urtea	"A" MOTA		"B" MOTA	
	Prezioa/unitatea milaka pezetatan	Salmentak milaka unitatean	Prezioa/unitatea milaka pezetatan	Salmentak milaka unitatean
1979	700	300	450	400
1980	800	350	600	425
1981	950	270	600	600
1982	1.200	150	600	500

Honakoa eskatzen da:

- 1) Paasche-ren prezio eta kopuru-indizeak, 1979. urtean oinarriturik.
- 2) Lortutako emaitzak interpretatzea, zein ondorio aterako zenituzkeen azalduz.

4.6. Merkatu konkretu batean 3 labaingarri-motari dagozkien prezio (pezetak/litro) eta kantitateen (milaka tonatan) eboluzioa ikusteko, hiru urtetako datu hauek ditugu:

Urtea	W labaingarria		X labaingarria		Y labaingarria	
	P	K	P	K	P	K
1980	30	4	40	2	20	5
1981	20	4	50	2	40	4
1982	30	4	60	1	80	10

Honakoa eskatzen da:

- 1) Prezio-indizeen segida, batezbesteko aritmetiko sinplearen metodoaz, 1980. urtea oinarritzat harturik.
- 2) Prezio-indizeen segida, batezbesteko agregatu sinplearen metodoaz, urte bera oinarritzat harturik.
- 3) Laspeyres eta Paasche-ren prezio-indizeak, urte bera oinarritzat harturik.

4.7. Mykran Elkarte Anonimoak bi kalkulagailu-mota kaleratzen ditu: 16-C eta 43-E motak, alegia. Beren prezio-segidak (milaka pezetatan) eta saldutako kantitateenak (milaka unitatetan) taula honetan aurkitzen dira:

Urtea	16-C		43-E	
	P	K	P	K
1980	8	1	10	4
1981	9	2	10	3
1982	10	3	10	2
1983	11	4	10	1

- 1) Lor ezazu Laspeyres-en prezio-indizeen segida, 1980. urtean oinarriturik.
- 2) Berrizta ezazu segida hori 1982. urtea oinarritzat harturik eta egin ezazu lotura eragiketa.

4.8 1) 1970. urtea oinarritzat harturik, kalkula itzazu Laspeyres-en indizea prezioetarako eta Paasche-ren indizea kopuruetarako, ondoko datuen bidez:

Urteak	A ONDASUNA		B ONDASUNA	
	Kop.	Prez.	Kop.	Prez.
1970	3	2	5	2
1971	4	2	6	3
1972	5	3	4	3
1973	6	4	5	3

- 2) 1972. urtea oinarritzat harturik, berriro ezazu 1973 urtekoa, eta kalkula itzazu 1970 eta 1971. urtekoak, lotura eragiketa erabiliz.
- 3) Zein eragozpen du loturak?

4.9. Eskualde batean gurina eta gaztari dagozkien kopuruak eta prezioak ondokoak dira:

	1983		1984	
	P	K	P	K
Gurina	150	100	165	105
Gazta	100	200	120	300

Honakoa eskatzen da:

- 1) 1984. urterako prezio-indize sinpleak ondasun bakoitzerako, 1983. urtean oinarriturik.
- 2) Ondoko prezio-indize konplexuak 1984. urterako, 1983. urtean oinarriturik:
 - a) Batezbesteko agregatuaren metodoaz eta batezbesteko aritmetikoaren metodoaz.
 - b) Laspeyres, Fisher eta Paasche-renak. Komenta itzazu laburki lortutako adibide edo adierazburu honentzako indizeen egokitasuna.

4.10. Ondoko taulan, azido batzueri dagozkien saldutako kopuruak eta prezioak dauzkagu.

Urtea	Berezko azidoa		Azido sintetikoa	
	Pta/litro	10 ⁶ litro	Pta/litro	10 ⁶ litro
1978	2	5	4	1
1979	5	4	4	3
1980	10	3	5	4
1981	20	2	5	6

Kalkula itzazu ondoko prezio-indize konplexuak.

- 1) Batezbesteko agregatua sinplearen metodoaz eta batezbesteko aritmetiko sinplearen metodoaz, lau urteetako segidarentzat eta 1978. urtean oinarriturik.

- 2) Laspeyres eta Paasche-ren indizeak lau urteetako segidarentzat eta 1978. urtean oinarriturik.
- 3) Laspeyres eta Paasche-ren beste bi segida 1980. urtean oinarriturik, 1981. urteko indizeak berrituz eta 1978 -1979. urteetakoak lotura eragiketaren bidez.

4.11. Herrialde batean Kontsumorako Prezioen Indizea kalkulatzeko, “erosketa-otarrea” hiru artikuluren ondoko proportzioz osatuta dago:

“A” artikulua: % 35 “B” artikulua: % 40 “C” artikulua: % 25

Artikulu hauen prezioei buruzko datuak 1976. eta 1982. urtekoak ditugu:

Urtea	A	B	C
1976	12	7	13
1982	24	10	15

Honakoa eskatzen da:

- 1) 1982. urteari dagokion (K.P.I.) Kontsumorako Prezioen Indizea 1976. urtea oinarritzat harturik.
 - 2) Bere esangura adieraztea.
- 4.12. a) Azal itzazu, indize simple eta konplexuen arteko desberdintasunak. Baita ponderatu eta ez-ponderatuen artekoak ere.

Zein indize erabil daiteke ondasun batzuk neurri desberdinetan adierazi badira?

- b) Kalkula ezazu kontsumo-prezioen indizea ondoko datuen bidez.

Ondasunak	Kopuruak	Prezioak	
		1969 - 1979	
A	80	8	7
B	40	10	14
C	30	5	11
D	50	20	25

4.13. Europako herri bateko burni eta altzairu produkzioaren hurrengo datuak ditugu, non prezioak pezetatan toneladako eta produzitutako kantitatea ehundaka toneladetan datozen:

Urtea	Burnia		Altzairuak	
	Prezioa	Kantitatea	Prezioa	Kantitatea
1980	100	12	200	50
1981	110	10	210	53
1982	120	8	250	53

Eskatzen da:

- 1) 1980 urtearekiko 1981 eta 1982 urtetako burni eta altzairuen produkzioaren eboluzioa azter ezazu, bi indize konplexu ponderatu desberdin erabiliz. Komenta ezazu lorturiko erantzunak eta konpara itzazu indize-zerrendak beraien arteko desberdintasun eta antzekotasunak azalduz.
- 2) 1981 erreferentzi puntu berrizat harturik aurreko zerrendetariko batetan, 1982ko indize berria berrizatu eta 1980ko indizea aurki ezazu loturaren bitartez. Nola mugitzen da burni eta altzairuen produkzioa 1981tik 1982ra?

4.14. Ondoko taulan arrantzaleei ordaindutako itsaskien prezioak eta lortutako kopuruak ditugu hiru urterako.

Mota	1980		1985		1990	
	P	K	P	K	P	K
Muxila	40	50	50	70	75	100
Otarraina	45	30	95	34	140	28
Ostra	70	60	60	55	70	45

Eskatzen da:

- 1) Lor itzazu 1980. urtean oinarritutako bi indize konplexu, bata ponderatu gabea eta bestea ponderatua, itsaskien prezioen eboluzioa, emandako denbora tartean, ikus dezagun. Komenta itzazu, bi segidetan ikus daitezkeen berdintasunak edo desberdintasunak.
- 2) 1985. urtea oinarri berria bezala harturik, atera ezazu indize konplexuaren segida berria uste duzun era egokienean, zeure aukera azalduz.
- 3) Zein izango da otarrainaren prezioaren batezbesteko hazkunde-tasa 1980-1990 urte tartean?

4.15. Hurrengo taulan A = Ogi eta lekaleak, B = Haragi eta arraina eta C = Arrautza eta esnekiak ondasunetatik, urte horietan eta herri konkretu batean saldutako kopuruen indize sinpleak datozte.

Urtea	A	B	C
1980	100	100	100
1981	99	100,1	102
1982	97	97,1	106.5
1983	97,5	97,7	108.6
1984	99,5	99,6	106.4

1980 urtean A ondasunaren saldutako kopuruaren balioa 306,2 mila milioi pezetako izan zen, B ondasunarena, berriz, 777,1 eta C ondasunarena 400,9.

Eskatzen da:

- 1) Iker ezazu urte horietan 3 ondasunaren saldutako kopuruaren eboluzioa, 1980 urtea oinarritzat hartuz eta hurrengo indizeak erabiliz:
 - a) Ponderatu gabeko indize bat.
 - b) Laspeyres-en indizea, baina froga ezazu erabilitako formula nola lortzen den.
- 2) 1983. urtean saldutako ondasun hauen balioa jakingo bagenu, datu hauekin Laspeyres-en indizea berriztatu genezake, 1983 urtea oinarri berriztat hartuz. Justifika ezazu erantzuna.

4.16. Ondoko taulan, bi automobil-markei dagozkien saldutako prezioak (milioika pezetatan) eta kopuruak (milaka unitatetan) ditugu:

Urtea	A Marka		B Marka	
	p_a	k_a	p_b	k_b
1989	1	2	1,5	2,7
1990	1,2	4	1,7	3,8
1991	1,3	3	2	3,5
1992	1,5	2,5	2,3	3,2

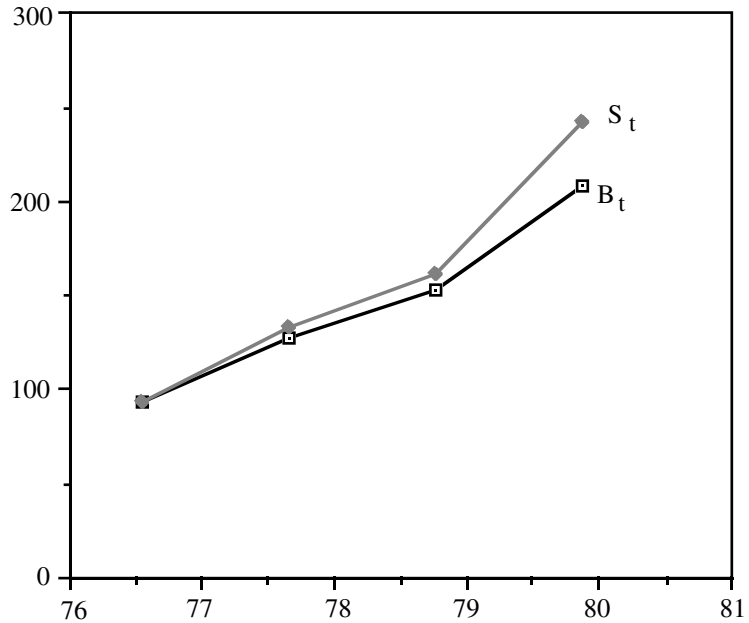
Eskatzen da:

- 1) Lor ezazu, bi marken saldutako kopuruaren baterako eboluzioa urte horietarako, 1989. urtea oinarritzat harturik, ponderazio gabeko indize konplexu baten bidez eta indize konplexu ponderatu baten bidez.
- 2) Komenta itzazu, eboluzioaren berdintasunen eta ezberdintasunen zergatia eta marka bakoitzaren saldutako kopuruaren eboluzioaren aurrenekoekin.
- 3) Lor ezazu, B markaren balio totalaren eboluzioa erakusten duten indizeak 89-92 urte tartarako, 1990. urtean oinarriturik.

EBAZPIDEAK

4.1.

$B_{t,77}$	$S_{t,77}$
100	100
131	135
153	161
202	232



Kantitate-unitateak (“litro ardoa”, “kiloerdi gurina”...) proportzio horretan erosketa tipiko mota bat izango balira, batezbesteko agregatua izango litzateke indizerik egokiena. Horrela ez balitz, batezbesteko aritmetikoa izango litzateke. Adierazpide grafikoan, B_t polikiago hazten dela argiro ikusten da.

Gertatzen dena zera da: okela gutxiago garestitzen dela eta B_t indizeak askoz pisu handiagoa ematen diola beste hiru produktuei batera baino: (310); (40+30+100).

4.2.

1) Urteak	$I_t(B)$	$I_t(S)$	IS	B_t
1965	100	100	100	100
1966	110,6	88,4	99,4	100,2
1967	123,8	79,1	101,4	102,8
1968	124,1	77,9	101,0	102,4
1969	105,3	74,3	89,8	90,7

- 2) Bi arrain-motak neurri berdinean neurturik daudenez, agregazioa egin ondoren B_t metodoa aplika daiteke. Dena dela, indize honek zentzu handiagoa edukiko luke agregatu horretan arrain-mota guztiak edo arrain urdinak kontsideratuko balira.

Batezbesteko aritmetikoak 1:1 ponderazioa eta agregatuak 282:249koa ematen die indize sinpleei.

S_t nahiz B_t indizeak ponderazio gabekoak izatearen eragozpena daukate, hau da, arrain-mota horiei ez zaie garrantzi ezberdinik ematen merkatuan dauzkaten prezioen arabera.

4.3.

1) Urteak	$I_t(\text{IR})$	$I_t(\text{EB})$	IS	B_t
1980	100	100	100	100
1981	233,33	560	396,66	437,5
1982	233,33	1.060	646,66	750
1983	266,66	1.080	673,33	775
1984	300	960	630	712,5

- 2) Bi estatuetara esportatutakoaren ibilbidea ikusi nahian S_t , B_t indizeak atera ditugu. Biek ponderatu gabeak izatearen eragozpena daukatela kontutan harturik, honakoa esan dezakegu:

B_t indizearen balioak altuagoak dira Erresuma Batura esportatutako itsasuntziak urtez urte askoz gehiago direlako.

Hau da, aldeaz aurretik guretzat bi estatuek garrantzi berdina badaukate, S_t izango da indizerik egokiena.

Aldiz, Erresuma Batuari garrantzi handiagoa eman nahi badiogu, B_t aukeratu beharko dugu balio agregatuetan Erresuma Baturako balioak garrantzitsuagoak baitira.

4.4.

1)	$S_{t,78}$	$B_{t,78}$
	100	100
	147,5	133
	195	166
	242,5	200
	300	248,5

2)	$L_{t,78}^P$	$P_{t,78}^P$
	100	100
	148	145
	197	183
	245	215
	303	255

S_t indizeak estrenaldi/berrestrenaldi erlazioari 1:1 proportzioko garrantzia ematen dio

B_t indizeak 125:40koa

L_t " 750:800koa (S_t -tik oso hurbila)

P_t indizearen proportzioa aldatzen doa, estrenaldiko zinetokien pisua handiagotuz, prezioen gorakada txikiagoa jasaten dutelarik.

3)	$L_{t,82}$	$P_{t,82}$
	41	46
	60	67
	81	85
	100	100
	124	124

4.5.

1)	$P_t^P = 100$	122,64	134,31	145,45
	$P_t^k = 100$	111,46	117,43	80

2) Prezio-indizeak, ondoko gehikuntzak ditu:

(% 22,6, % 34,3, % 45,5) lehenengo urtean, bi lehenengoetan eta hiru urteetan, hurrenez hurren.

Gehikuntza hauek "A" motak pairatzen duen prezioen igoeretan oinarritzen dira, "B" motaren prezioa ia konstante geratzen baita.

Kopuru-indizeak, ordea, gehikuntza hauek ditu:

(%11,1, %17,4, %20), hurrenez hurren. 1980. urtean indizearen ibilbide gorakorra hautsi egiten da, azkeneko urtean saldutako kopuruek (batez ere, "A" motakoek) beherapen handia daukatelako.

4.6.

1),2)	S_t^P	B_t^P
	100	100
	130	121
	216	188

3)	L_t	P_t
	100	100
	126	121
	213	272

4.7.

$$1) L_{t,80} = 100 \quad 102 \quad 104 \quad 106,25$$

$$2) L_{t,82} = (96 \quad 98) \quad 100 \quad 106$$

$L_{83,82}$ -k ia $L_{83,80}$ harrapatzen du, ponderazio berriak (82ko balioak: 30 eta 20) askoz garrantzi handiago ematen baitio 16-c motari 80. urtekoak baino (80ko balioak: 8 eta 40), eta 16-c da denbora-tarte horretan garestitzen dena.

4.8.

$$1) \begin{array}{ll} L_{71}^P = 131,25 & P_{71}^k = 123,8 \\ L_{72}^P = 150 & P_{72}^k = 112,5 \\ L_{73}^P = 168,75 & P_{73}^k = 144,4 \end{array}$$

2)	L_t^P (oinarria = 1972)	$P_{71}^k = 123,8$
	1970	88,88
	1971	110
	1972	100
	1973	121,8

4.9.

$$1) \begin{array}{l} I_{84} (\text{Gur.}) = 110 \\ I_{84} (\text{Gazta}) = 120 \end{array}$$

$$2) \text{ a) } B_{t,84} = 114 \quad S_{t,84} = 115$$

$$\text{ b) } L_{84,83}^P = 115,7 \quad P_{84,83}^P = 116,5 \quad F_{84,83}^P = 116,1$$

Dakigunez, indize sinpleek ondasun bakoitzaren eboluzioa ikustarazten digute.

B_t , S_t indize konplexuek, ordea, ondasun-multzoaren eboluzioa, baina ponderatu gabe.

L_t^P , P_t^P , F_t^P indize konplexu ponderatuek kantitateen arabera ematen diete garrantzia prezioei.

Kasu honetan kopuruen eboluzioa ikusirik (gurinarena bikoiztu eta gaztarena, aldiz, hirukoiztu egiten dira) Paasche-ren indizea Laspeyres-ena baino egokiagoa da, indize honek, indizea kalkulatzeko den urterako ditugun kopuruak hartzen baititu ponderatzeko.

Fisher-en indizea, beti da egokia, beste bien batezbesteko geometrikoa baita.

4.10.

$$1) \begin{array}{l} B_t : 100 \quad 150 \quad 250 \quad 416,7 \\ S : 100 \quad 175 \quad 312,5 \quad 708,35 \end{array}$$

1978. urtean, azido sintetikoaren prezioa bikoitza izanik, B_t indizeak ez du S_t indizeak bezain ondo ikustarazten berezko azidoak eduki duen gehikuntza (lau urteetan, 10 bider biderkatu baita prezioa).

$$2) \begin{array}{l} L_t^P = 100 \quad 207,14 \quad 392,8 \quad 750 \\ P_t^P = 100 \quad 160 \quad 227,27 \quad 250 \end{array}$$

Indize hauen emaitzak, hain desberdinak, kopuruen eboluzioak ikusirik eta oinarritzko 5 : 1 ponderazioa Laspeyres-engan finkoa izanik uler daitezke.

$$3) \begin{array}{l} L_{t,80}^P = 25,45 \quad 52,73 \quad 100 \quad 160 \\ P_{t,80}^P = 44,00 \quad 70,40 \quad 100 \quad 140 \end{array}$$

4.11.

$$1) 157,6$$

$$2) I_A = 200, \quad I_B = 143, \quad I_C = 115 \quad \text{indize sinpleak izanik, hauen batezbestekoa "erosketa-otarrearen" portzentaien arabera ponderatuz lortzen da indizea.}$$

4.12.

$$2) \frac{2.700}{2.190} 100 = 123,28$$

Honen arabera, hamar urte horietan prezioak % 23,28 gehitu direla esan daiteke.

4.13.

$$1) L_{t,0}^k = \frac{\sum_i p_{io} k_{it}}{\sum_i p_{io} K_{io}} \cdot 100 = \frac{\sum_i I_{i,t}^k(p_{io} k_{io})}{\sum_i p_{io} K_{io}}$$

$$L_{81,80}^k = 103,57$$

$$L_{82,80}^k = 101,79$$

$$P_{t,0}^k = \frac{\sum_i p_{it} k_{it}}{\sum_i p_{it} k_{io}} \cdot 100 = \frac{\sum_i I_{i,t}^k(p_{it} k_{io})}{\sum_i p_{it} k_{io}}$$

$$P_{81,80}^k = 103,47$$

$$P_{82,80}^k = 101,94$$

Indize konplexu hauetako ponderazioek, pisu gehiago ematen diote altzairuaren ibilbideari, zein produkzioa gorantz egin arren, burniaren produkzioaren jeitsiera baino makalagoa da.

2) Erreferentzi puntu berria 1981 izanik

$$L_{80,81}^k = 96,55$$

$$P_{80,81}^k = 96,65$$

$$L_{81,81}^k = 100$$

$$P_{81,81}^k = 100$$

$$L_{82,81}^k = 98,20$$

$$P_{82,81}^k = 98,34$$

altzairuaren produkzioa 1981tik 1982ra nola mugitzen den aztertzeko Laspeyres-en indizea har dezakegu.

$$\frac{L_{82,81}^k - L_{81,81}^k}{L_{81,81}^k} \cdot 100 = \% - 1,8$$

Beraz, produkzioa murriztu egin da.

4.14.

1) Ponderazio gabeko indize konplexuak:

$$S_t = \frac{\sum_{i=1}^3 I_{it}}{n} \quad \text{edo} \quad B_t = \frac{\sum_{i=1}^3 P_{it}}{\sum_{i=1}^3 P_{io}} \cdot 100$$

$$S_{80} = 100$$

$$S_{85} = 140,61$$

$$S_{90} = 199,54$$

$$B_{80} = 100$$

$$B_{85} = 132,25$$

$$B_{90} = 183,87$$

Indize konplexu ponderatuak:

$$L_{t,0}^p = \frac{\sum_{i=1}^3 P_{it} k_{io}}{\sum_{i=1}^3 P_{io} k_{io}} \cdot 100 \quad \text{edo} \quad P_{t,0}^p = \frac{\sum_{i=1}^3 P_{it} k_{it}}{\sum_{i=1}^3 P_{io} k_{it}} \cdot 100$$

$$L_{80,80}^p = 100$$

$$L_{85,80}^p = 118,54$$

$$L_{90,80}^p = 160,92$$

$$P_{80,80}^p = 100$$

$$P_{85,80}^p = 122,62$$

$$P_{90,80}^p = 173,25$$

$$S_t > B_t > P^p > L^p$$

2)

$$L_{80,85}^p = 84,36$$

$$L_{85,85}^p = 100$$

$$L_{90,85}^p = 138,08$$

$$P_{80,85}^p = 81,55$$

$$P_{85,85}^p = 100$$

$$P_{90,85}^p = 140,64$$

Urte oinarriaren aurreko urtetako indizea kalkulatzeko metodorik egokiena lotura eragiketa da eta ondorengo urtetakoak kalkulatzeko berriz, berriztapena.

3)

$$\frac{\text{Otarraina 1990}}{\text{Otarraina 1980}} = (1 + \alpha)^{10}$$

$\alpha = 0,12019 = \% 12,019$ Otarrainaren prezioaren batezbesteko hazkunde-tasa 1980 eta 1990 urte tartean $\% 12,019$ koa da.

4.15.

1) a) Datu hauekin lor dezakegun ponderazio gabeko indize konplexu bakarra batezbesteko aritmetiko sinplea da.

$$S_{t,0}^k = \frac{\sum_{i=1}^n I_{it}^k}{n}$$

$$S_{80,80}^k = 100$$

$$S_{81,80}^k = 100,37$$

$$S_{82,80}^k = 100,2$$

$$S_{83,80}^k = 101,27$$

$$S_{84,80}^k = 101,83$$

$$b) L_{t,0}^k = \frac{\sum_{i=1}^n I_{t,0}^k (p_{i0} k_{i0})}{\sum_{i=1}^n p_{i0} k_{i0}}$$

$$L_{80,80}^k = 100$$

$$L_{81,80}^k = 100,386$$

$$L_{82,80}^k = 99,62$$

$$L_{83,80}^k = 100,603$$

$$L_{84,80}^k = 101,42$$

2) 1983 urtea oinarri berriztat hartuz, Laspeyres-en indizea berriztatu daiteke. Horretarako, ondasun bakoitzaren 1983 urteko balioa jakin beharko genuke eta ondasun bakoitzaren saldutako kopuruaren indize sinple berriak lotura eragiketaren bitartez lortuko genituzke. Horrela

$$L_{t,83}^k = \frac{\sum_{i=1}^n I_{t,83}^k (p_{i,83} k_{i,83})}{\sum_{i=1}^n (p_{i83} k_{i83})}$$

Hala ere, beste bide bat Laspeyres-en segida erabiltzea litzateke. hau da, 1980, 1981 eta 1982 urtetako indize berria lortzeko lotura eragiketa erabiliz, eta 1984. urteko indizea lortzeko, berriz, berriztapen eragiketa.

4.16.

1) Ponderazio gabeko indize konplexua:

Batezbesteko aritmetiko sinplearen metodoa edo Batezbesteko agregatu sinplearen metodoa

$$S_t = \frac{\sum_{i=1}^n I_{it}}{n} \qquad B_t = \frac{\sum_{i=1}^n X_{it}}{\sum_{i=1}^n X_{io}} \cdot 100$$

$$S_{1989} = 100$$

$$B_{1989} = 100$$

$$S_{1990} = 170,37$$

$$B_{1990} = 165,95$$

$$S_{1991} = 139,81$$

$$B_{1991} = 138,29$$

$$S_{1992} = 121,76$$

$$B_{1992} = 121,27$$

Indize konplexu ponderatuak:

$$L_{t,89}^k = \frac{\sum_{i=1}^2 p_{io} k_{it}}{\sum_{i=1}^2 p_{io} k_{io}} \cdot 100 \qquad \text{edo} \qquad P_{t,89}^k = \frac{\sum_{i=1}^2 p_{it} k_{it}}{\sum_{i=1}^2 p_{it} k_{io}} \cdot 100$$

$$L_{89,89}^k = 100$$

$$P_{89,89}^k = 100$$

$$L_{90,89}^k = 160,33$$

$$P_{90,89}^k = 161,08$$

$$L_{91,89}^k = 136,36$$

$$P_{91,89}^k = 136,25$$

$$L_{92,89}^k = 120,66$$

$$P_{92,89}^k = 120,62$$

- 2) Kasu honetan, ponderazio gabeko indizearen eboluzioa eta ponderatutakoena tankerakoa da. Desberdintasuna ponderazioetan dago. Hau da, ponderazio gabeko indizean, A eta B markako automobileren pisu berdina ematen zaien bezala, ponderatutako indizean, aldiz, pisu hori desberdina da. Laspeyres-en indizean adibidez, B markako automobileren ponderazio handiagoa ematen zaie.
- 3) B markako automobileren balioaren eboluzioa ikusteko, balioa kalkulatu dugu urte desberdinetan.

Urtea	$BALIOA_t = P_{B_t} K_{B_t}$	I_t^b
1989	4,05	62,69
1990	6,46	100
1991	7	108,36
1992	7,36	113,93

Ikusten dugunez, B markako automobilen balioen eboluzioa gorakorra da.

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1. Pentsa dezagun ohizko unitatetan eman diren ondoko informazio-estatistikaz baliatzen gairela:

	A		B		C	
	kop.	prez.	kop.	prez	kop.	prez.
1976	5	4	2	2	2	4
1977	3	5	4	6	3	6
1978	2	6	4	10	5	8

1976. urtea oinarritzat harturik, honakoa eskatzen da:

- 1) Prezio-indize sinpleak, hiru ondasunen kasuan.
 - 2) Laspeyres, Paasche eta Fisher-en prezio-indize konplexu ponderatuak.
2. Zein indize kalkula daitezke, litro bat olio, ehun gramo gurin, litro bat esne eta dozena bat arrautzari dagozkien prezio-segidak 1970 -77 urte-tartean ondokoak badira?

Urteak	O	G	E	A
1970	54	20	17	43
1971	58	27	18	45
1972	60	30	19	50
1973	62	31	20	53
1974	67	34	23	56
1975	70	36	28	61
1976	74	37	31	64
1977	80	40	32	70

3. Azkeneko hiru urteetarako eta hiru traktore-motarako prezio-indize sinpleak, 1985. urtean oinarriturik ondokoak dira:

Urteak	Elberfeld	Trasmoto	Hakodate
1985	100	100	100
1986	200	125	66,66
1987	400	150	100

Mota bakoitzetik saldutako traktoreak eta 1985. urtean egindako prezioak hauexek dira:

Elberfeld	5.000 traktore	2 milioi pta / traktore
Trasmoto	2.000 traktore	4 milioi pta / traktore
Hakodate	4.000 traktore	3 milioi pta / traktore

Honakoa eskatzen da:

- 1) Kalkula itzazu Laspeyres-en baterako prezio-indizeak 1986 eta 1987 urteetarako, merkatu horretan.
 - 2) Komenta itzazu lortutako emaitzak.
 - 3) Komenta ezazu, Laspeyres-en indizeen segidan aldaketa zein izango litzatekeen, oinarri den urterako Elberfeld traktorearen kopurua eta prezioa ondokoak izan balira:
Elberfeld 10.000 traktore 2 milioi pta / traktore.
4. Ondoko taulan, bi desinfektagarriren prezioak eta kopuruak ditugu.

Urtea	MIXER		STAKER	
	pta / kg	Tm	pta / kg	Tm
80	250	50	800	200
81	500	60	700	300
82	800	80	1.000	200
83	1.400	100	800	150
84	2.000	100	900	100
85	2.500	90	1.000	100

Honakoa eskatzen da:

- 1) Laspeyres eta Paasche-ren kopuru-indizeak 1980. urtean oinarriturik.
 - 2) Oinarri berria 1984. urtea izanik, berritu ezazu indizea, 1985. urterako eta atera ezazu beste urteetarako lotura eragiketaren bidez.
5. Ondoa, hiru eraikuntza materialen prezio eta kopuruak ditugu:

	A		B		C	
	pta / kg	Tm.	pta / kg	Tm	pta / kg	Tm
1975	10	1	20	1	20	2
1985	20	5	20	3	10	2

- a) Kalkula itzazu ondoko prezio-indize konplexuak, 1975. urtean oinarriturik: batezbesteko aritmetikoaren metodoaz, batezbesteko agregatuaren metodoaz, Laspeyres, Paasche eta Fisher-en metodoaz.
- b) Aurreko indizeak, baina 1985. urtean oinarriturik, datuen bidez kalkulatu, hau da, ez lotura eragiketaren bidez.
- d) Komenta itzazu lortutako emaitzak.

6. Biltegi baten urteroko salmenta-zifrak, ehunekotan aurreneko urtearekiko, 1982-1986 tarterako ondoko taulan ditugu:

Urteak	$\frac{\text{Salmentak t. urtean}}{\text{Salmentak t - 1. urtean}} \times 100$
1982	118
1983	104
1984	98
1985	96
1986	100

1981. urtean salmentak 1.000 milioi pezetakoak izan zirela jakinik:

Honakoa eskatzen da:

- Salmenta-zifrak urte bakoitzerako.
 - Salmenten indizea urte bakoitzerako 1981. urtean oinarriturik, hots, indizea 1981. urtean =100 izanik.
 - Urteroko batezbesteko hazkunde-tasa tarte horretako salmentetarako.
7. Merkatu batean, ondoko datuak lortu ditugu:

	"A" Ondasuna		"B" Ondasuna	
	Prezioa	Kopurua	Prezioa	Kopurua
1970	10	1	30	3
1980	20	2	50	2
1990	X	3	100	1

Honakoa eskatzen da:

- Zenbatekoa izan beharko du X-en prezioak ondoko berdintasuna egiaztatzeko?

$$L_{90,70}^p = 2 L_{80,70}^p$$

- Gauza bera Paasche-ren indizerako.
 - Gauza bera Fisher-en indizerako.
 - Lor ezazu batezbesteko hazkunde-tasa 1980-1990 tarterako, aurreko kasu bakoitzean.
8. Ondoko datuak emanik:

	A artikulua		B artikulua	
	pta / unitate	milaka unitate	pta / unitate	milaka unitate
1981	20	5	200	2
1986	100	q _A	250	q _B

Honakoa eskatzen da:

- 1) Zenbat balio beharko lukete q_A eta q_B kopuruek 1986. urtean 1981. urtearekiko Laspeyres eta Paasche-ren prezio indizeak berdinak izan daitezzen?
- 2) Zenbat balio beharko lukete q_A eta q_B kopuruek 1986. urtean 1981. urtearekiko Paasche-ren indizea Laspeyres-enaren bikoitza izan dadin?
Zenbat balioko luke Fisher-enak kasu honetan?

9. Bilbo, Sevilla, Bartzelona hirietan hiribuseko txartelen prezioek ondoan adierazten den eboluzioa eduki dutela suposatuz:

Urteak	Bilbo	Sevilla	Bartzelona
1965	5	3	7
1980	25	20	15

eta txartelen salmenta totalen balioa, 1965. urterako, 400 milioikoa Bilbon, 198 milioikoa Sevillan, 840 milioikoa Bartzelonan izan zirela jakinik:

Honakoa eskatzen da:

- 1) Laspeyres-en prezio-indizea 1980. urterako 1965. urtean oinarriturik. Zer azaltzen du indize honek?
 - 2) Kalkula ezazu urteroko batezbesteko hazkunde-tasa Bilboko hiribuseko txartelen kasuan.
10. Ondoko taulan eskualde batean saldutako hiru elektrogailu ereduren prezio eta kopuruen segidak ditugu:

Urteak	HG - 1		HG - 7		HGT - 0	
	10^4 pta/un.	10^3 un	10^4 pta/un.	10^3 un.	10^4 pta/un.	10^3 un.
1983	2	10	5	12	10	3
1984	2	12	6	10	11	2
1985	3	15	x	y	12	3
1986	4	20	7	6	12	1
1987	4	18	8	5	13	2

- 1) 1985. urterako 1983. urtearekiko Laspeyres eta Paasche-ren prezio-indizeen balioak ondokoak izanik:

$$L_{85,83}^P = 125,4 \quad P_{85,83}^P = 130,6$$

kalkula ezazu HG-7 ereduren prezioa eta kopurua.

- 2) Kalkula itzazu Laspeyres eta Paasche-ren prezio-indizeak beste urteentzat, lortutako bi segiden desberdintasunak aztertuz.

- 3) Kalkula ezazu batezbesteko hazkunde-tasa (metakorra) 1983-1987 urte tarterako eta HG-1, HG-7, HGT-0, eredu en salmentena hurrenez hurren.
11. Lantegi batean hiru automobil-mota egiten dira. Azkeneko hiru urteetan produzitutako unitateak eta lortutako prezioak, ondokoak izan dira:

Mota	1986		1987		1988	
	p	k	p	k	p	k
205	5	32	6	41	6	56
309	7	42	6	30	8	43
405	9	23	9	24	8	20

Honakoa eskatzen da:

- 1) 1986. urtean oinarriturik 1987, 1988 urteetarako Laspeyres-en kopuru-indizea.
 - 2) Berritu 1988. urteko indizea, 1987. urtea oinarritzat harturik, eta lor ezazu 1986. urtekoa lotura eragiketaren bidez.
 - 3) Atera ezazu 205 motaren balioaren batezbesteko hazkunde-tasa, 1986-1988 urte tarterako.
12. Hiru elikadura-ondasun moten prezioak (pta/Kg) eta kopuruak (m) ondoko taulan emanik:

Urteak	Laboreak		Lecosariak		Esnekiak	
	p	k	p	k	p	k
1989	74	95	102	101	65	103
1990	78	95	107	98	71	108
1991	82	95	109	95	74	115
1992	85	95	111	93	89	120

- 1) Lor ezazu ondasun horien kontsumatutako balioen eboluzioa, indize-segidaren bidez eta aztertutako urte tarterako, 1989 urtea oinarritzat harturik. Komenta itzazu lortutako emaitzak, ondasun bakoitzaren kontsumatutako balioen eboluzioarekin parekatuz.
 - 2) 1992. urtea oinarri berria bezala harturik, lor ezazu kontsumatutako balioen indize-segida, zure ustez egokia den metodoaren bidez.
13. Faktoria batek, A eta B produktuak ekoitzi eta saltzen ditu. 1981. urtean A ondasunaren ekoizpena %40 batean igo zen 1980. urtearekiko. 1982. urtean %20 batean jeitsi zen 1981. urtearekiko baina 1983 urtekoa baino %15 gehiago izan zen. 1984. urtean konstante mantendu zen aurreko urtearekiko eta 1985. urtean %20an jeitsi zen ekoizpena 1984. urtearekiko. B ondasunaren ekoiztutako kopuruak ondokoak dira:

Urteak	Kopuruak
1980	1182
1981	1207
1982	1246
1983	1143
1984	1143
1985	1113

Eskatzen da:

- 1) Eraiki ezazu, 1980. urtean oinarritutako indize sinpleen bi segida, bi ondasunen ekoiztako eboluzioak ikus ditzagun.
- 2) 1980. urterako, A ondasunaren salmenten balioa 120,3 milioi pezeta eta B ondasunarena 54,1 milioi pezeta izan direla jakinik, eraiki ezazu indize bat, bi ondasunen ekoiztako baterako eboluzioa ikus dezagun. Komenta itzazu emaitzak, 1) atalean ateratako segidekin parekatuz.
- 3) Kalkula ezazu, B ondasunaren ekoizpenaren urteroko batezbesteko hazkunde-tasa metakorra, 1980-1983 eta 1980-1985 urte tartetarako. Komenta itzazu lortutako emaitzak.

5. DESKRIBAPEN ESTATISTIKOEN ADIERAZPIDE GEOMETRIKOAK

ADIERAZBURUAK

5.1. Ondoko estatistikoak emanik:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8/3 & 8/3 \\ & 32/3 \end{bmatrix} \quad \|\mathbf{c}_1\| = 2\sqrt{2} \quad \|\mathbf{c}_2\| = 4\sqrt{2}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Zenbat indibiduotan neurtu dira X_1 , X_2 aldagaiak?
 - 2) Datu-matrize zentratua lortzea, 2 eta 0 lehenengo indibiduoari dagozkion balio zentratuak izanik.
 - 3) Zein da aldagai zentratuek osaturiko angelua?
- 5.2. Hamasei indibiduo dituen populazio baterako, X_1 , X_2 aldagaien desbidazio standardak ondokoak dira:

$$S_1 = 3 \quad S_2 = 5$$

Bi aldagai zentratuen biderkadura eskalarra, ordea, $\langle \mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 \rangle = 160$ da.

Honakoa eskatzen da:

- 1) r_{12} koerlazio-koefizientea.
 - 2) $\hat{X}_2(X_1)$ erregresioaren b_{21} koefizientea.
 - 3) S_e^2 hondar-bariantza.
 - 4) Interpreta itzazu grafikoki lortutako emaitzak.
- 5.3. Hiru indibiduotan hartutako X_1 , X_2 aldagaietarako, ondoko koerlazio-matrizea daukagu.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lor ezazu datu-matrize tipifikatua, lehenengo indibiduoaren balio tipifikatuak $(-\sqrt{3/2}, 0)$ direla jakinik.

5.4. X_1, X_2 aldagaien datuak ditugu:

$m = 4$ (indibiduo-kopurua), $\alpha=60$ (aldagai-bektore zentratuen arteko angelua),
 $\langle \mathbf{c}_1 | \mathbf{c}_2 \rangle = 16$, $\|\mathbf{c}_1\| = 2 \|\mathbf{c}_2\|$, $\bar{x}_1 = 2$ eta $\bar{x}_2 = 3$

Honakoa eskatzen da:

- 1) \mathbf{L} kobariantza-matrizea.
- 2) $\hat{X}_2(X_1)$ erregresio-zuzena eta S_e^2 .
- 3) $\hat{T}_2(T_1)$ erregresio-zuzen tipifikatua eta hondar-bariantza.
- 4) Interpreta ezazu grafikoki $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ bektoreen erlazioa beraiek mugatutako planoan.

5.5. Lau unitate estatistikok osatzen duten kolektibo batean, X_1, X_2 , aldagaien arabera bi lehenengok hartzen dituzten balioak hauexek dira:

1. unitatea:	$x_{11}=4$	$x_{12}=0$
2. unitatea:	$x_{21}=2$	$x_{22}=6$

ondokoak batezbesteko-bektorea eta kobariantza-matrizea izanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

- 1) Osa ezazu \mathbf{X} datu-matrizea
- 2) Aurkez itzazu, grafikoki, X_1, X_2 aldagaien lau balio zentratuek osatzen dituzten bektoreak, beraiek sortzen duten planoan.

Komenta ezazu, halaber, aldagaien balioek kolektibo txiki horretan daukaten erlazioa.

5.6. X_1, X_2 aldagaiek ondoko balioak dituzte 6 indibiduorentzat.

X_1	4	7	5	5	4	5
X_2	2	5	7	4	2	4

Interpreta ezazu, grafikoki:

- 1) Aldagaien balio zentratuen bektoreen arteko erlazioa (angeluak eta normak grafikoki adieraziz).
- 2) Aldagaien balio tipifikatuen bektoreen arteko erlazioa (angeluak eta normak grafikoki adieraziz).

EBAZPIDEAK

5.1.

$$1) S_1^2 = \frac{8}{3} = \frac{(2\sqrt{2})^2}{m} = \frac{\|c_1\|^2}{m}$$

$$m = 3$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ edota } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3) r_{12} = 1/2 = \cos \alpha$$

Angelua 60° koa da.

5.2.

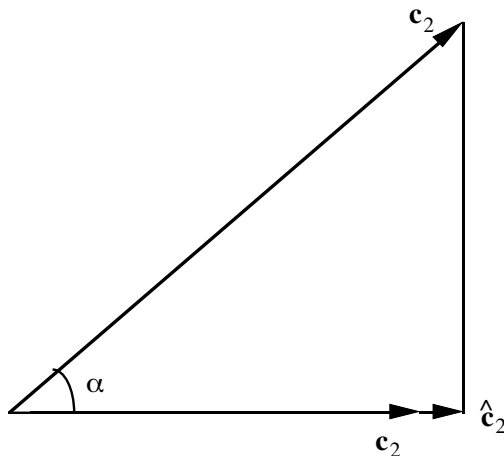
$$1) r_{12} = 2/3 = 0,67 \quad \|c_1\| = 12; \quad \|c_2\| = 20 \quad \|\hat{c}_2\| = b_{21} \cdot \|c_1\| = 13,3$$

$$2) b_{21} = 10/9 = 1,1$$

$$3) S_e^2 = 13,94 \quad \|e\|^2 = 223,11$$

$$\|e\| = 14,93$$

4)



5.3. Aldagai tipifikatuen norma \sqrt{m} eta kobariantza r_{12} direla jakinik:

$$T = \begin{bmatrix} -\sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \\ 0 & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix} \quad \text{edo} \quad T = \begin{bmatrix} -\sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$

5.4.

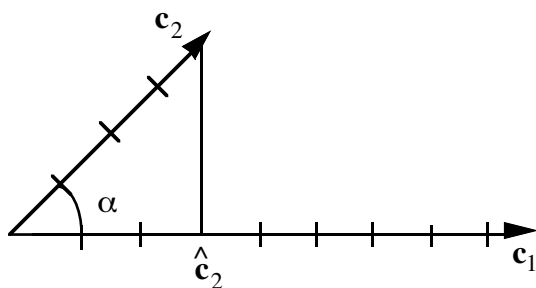
$$1) L = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ & 4 \end{bmatrix}$$

$$2) b_{21} = 0,25 \quad \hat{X}_2 = 0,25X_1 + 2,50 \quad S_e^2 = 3$$

$$3) \hat{T}_2 = 0,5T_1 \quad S_e^2 = 0,75$$

$$4) r_{12} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\|\mathbf{c}_1\| = 8 \quad \|\mathbf{c}_2\| = 4 \quad \|\mathbf{c}_2\| = 0,25\|\mathbf{c}_1\| = 2$$



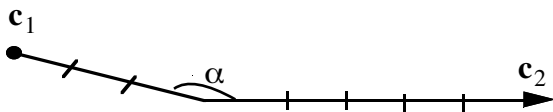
5.5.

$$1) X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \\ 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{edo} \quad X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \\ 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2) r_{12} = -0,866 \Rightarrow \alpha = 150^\circ \quad \|\mathbf{c}_1\| = 2,8 \quad \|\mathbf{c}_2\| = 4,5$$

Aldagaien arteko erlazioa alderantzizkoa eta nahiko sakona da.

Grafikoki

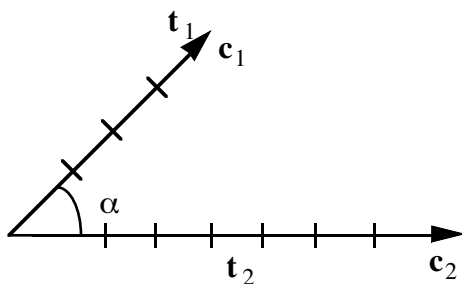


5.6.

$$1) \bar{x}_1 = 5 \quad \bar{x}_2 = 4 \quad \|c_1\| = \sqrt{6} \quad \|c_2\| = \sqrt{18} \quad \langle c_1 / c_2 \rangle$$

$$r_{12} = 0,577 \Rightarrow \cos \alpha = 0,577 \Rightarrow \alpha = 54^\circ 44' 8''$$

$$2) \|t_1\| = \|t_2\| = \sqrt{6} \quad r_{12} = 0,577 \Rightarrow \alpha = 54^\circ 44' 8''$$



6. OSAGAI NAGUSIZKO ANALISIA

ADIERAZBURUAK

6.1. Ondoko taulan agertzen diren herrietarako X_1 , X_2 aldagaiak neurtu dira:

X_1 : hazkuntza demografikoa portzentaiatan

X_2 : esportatutako balioa/biztanle

	X_1	X_2
Afganistan	2,5	13
Jordania	3,2	63
Turkia	2,4	36

Honakoa eskatzen da:

- 1) X_2 -ren X_1 -ekiko erregresio-zuzena eta doikuntza honen egokitasuna.
- 2) Doikuntza ortogonalaren zuzena eta baita doikuntza honen egokitasuna ere.
- 3) Zertan desberdintzen dira doikuntza hauek?
Azal ezazu doikuntza bakoitza, zertan oinarritzen den adieraziz.

6.2. Ondoko taulan, X_1 , X_2 aldagaien 1976. urterako datuak ditugu:

X_1 : ospitaletako ohe-kopurua/1.000 biztanle

X_2 : kontsumitutako energiaren neurria/biztanle

	X_1	X_2
Iran	2	0,7
Irak	1,6	1,5
Israel	7,0	2,5

Honakoa eskatzen da:

- 1) Doikuntza ortogonalaren zuzena eta proiektatutako inertzia.
- 2) Zuzenaren gainean, estatu bakoitzari dagokion proiektzioa.
- 3) Egindako doikuntzaren adierazpide grafikoa.

6.3. Lau ikaslek 2. eta 3. mailako Estatistika asignaturetan lortu dituzten puntuazioak, ondokoak izanik:

2.m.E.	6	0	6	9
3.m.E.	6	6	3	9

Honakoa eskatzen da:

- 1) Karratu txikiaren doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 2) Zuzenaren gainean proiektatutako inertiaren proportzioa eta proiektatu gabe geratzen denaren proportzioa.
- 3) Indibiduo-puntuei dagozkien zuzenaren gaineko proiektzioak.
- 4) Adieraz ezazu, grafikoki, egindako doikuntza.

6.4. Hiru indibiduok osaturiko taldean, (X_1, X_2) aldagai estatistikoa neurtu da, ondoko datuak lortuz:

X_1 :	1	2	3
X_2 :	2	6	4

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu karratu txikiaren doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 2) Zuzen honek estimatzen duen baterako inertiaren proportzioa.
- 3) Zuzenaren gainean, hiru puntuei dagozkien proiektzioak.
- 4) Kalkula itzazu, halaber, hiru puntuei dagozkien hondarrak.
- 5) Kalkula ezazu 3. eta 4. atalean lortutako proiektzio eta hondar bektoreen inertzia. Baita beraien arteko biderkadura eskalarra ere.

6.5. Ondoko taulan, (1961-1965) urte bitartean batezbeste Bizkaian jausitako euri-kantitateak eta tenperaturak ditugu:

Hilak	U	O	M	A	M	E	U	A	I	U	A	A
Temperaturak (gradutan)	8	11	11	12	15	17	20	20	19	16	11	9
Euri kantitateak (litrotan)	120	113	88	177	68	57	32	91	104	134	180	134

Honakoa eskatzen da:

- 1) Zein izango litzateke karratu txikiaren erregresio linealaren bidez estimatuko zenukeen euri-kantitatea hileko batezbesteko tenperatura 10 gradukoa izango balitz? Ona al da estimazioa?
- 2) Idatz ezazu aldagai tipifikatuen kobariantza-matrizea.
- 3) Aldagai zentru-normatuen doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 4) Puntu zentru-normatuei dagozkien zuzenaren gaineko proiektzioak.

- 5) Azaldutako inertiaren proportzioa.
- 6) Doikuntza-zuzen ortogonalean proiektzioen adierazpide grafikoa.
- 7) Proiektzioen koerlazio-koefizientea aldagai zentru-normatu bakoitzarekin.

6.6. Aurrezki-kutxa batean, ehun bezero dituen lagina kontsideraturik, X_1 , X_2 aldagaien azterketa egin nahi da.

X_1 : kontu korronteen batezbesteko saldoa milaka pezetatan, eta X_2 : kutxak emandako maileguen ordaingabeko saldoak mila pezetatan emanik.

Ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 100 & 500 \\ & 10000 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu erregresio ortogonalaren zuzena aldagai zentru-normatuentzat, ehunekotan zenbat inertzia proiektatu biltzen duen esanez.
- 2) Lehenengo bi bezeroak bi aldagaiekiko ondoko balioak hartzen badituzte:

i	X_1	X_2
1	40	1000
2	50	0

Zein dira doikuntza-zuzen ortogonalaren gainean dauzkaten koordinatuak edo proiektzioak?

6.7. Telebistako 7 katerentzat, (X_1) batezbesteko entzule kopurua milioika pertsonatan eta (X_2) urteroko inbertsioa milioika pezetatan, jasotzen ditu hurrengo datu matrizeak:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3,5 & 20 \\ 0,8 & 6 \\ 1,2 & 8 \\ 0,5 & 5 \\ 2,5 & 10 \\ 1 & 8 \\ 1,9 & 7 \end{pmatrix}$$

Datu horiekin, honako estatistikoak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1,628 \\ 9,143 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,98 & \\ 4,14 & 21,83 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) Kalkula ezazu inertzia totala eta D.O.Z. eta F_2 hondar-ardatzaren gain proiektatutako kateen inertiak.
- 2) Kalkula ezazu D.O.Z. eta bere fidegarritasuna.
- 3) Kalkula itzazu entzule gehien eta gutxien dituzten kateen proiektzioak D.O.Z.aren gain.
- 4) Hodei dualaren azterketa: lor itzazu proiektzioak G_1 , G_2 ardatz faktorialen gain.
- 5) Lor ezazu bi hodeien baterako aurkezpen grafikoa eta atera itzazu ondorioak.

6.8. Batxilergoko 15 ikasleri, 2 proba jarri zaizkie:

(X_1) ahozko arrazonaketa.

(X_2) oroimena.

eta hurrengo batezbesteko bektorea eta kobariantza-matrizea lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 19,466 \\ 14,9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 31,58 & \\ 20,23 & 44,59 \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

- 1) Lor ezazu D.O.Z.a
- 2) Bost ikasleren puntuazioak baldin baditugu:

Ikaslea	X_1	X_2
1	29	22
2	22	18
3	8	4
4	16	7
5	25	22

Kalkula itzazu indibiduo hauen proiektzioak edo koordinatuak D.O.Z.aren gain, eta puntu hauen eta zuzenaren arteko distantziak. Zergatik orain kalkulaturako proiektzioen batezbestekoa ez da zero? Aurkez ezazu grafikoki, D.O.Z.a.

- 3) Kalkula itzazu G_1 , G_2 ardatz edo faktoreen gaineko hodei dualaren proiektzioak.
- 4) Egin ezazu baterako aurkezpen grafikoa eta interpreta ezazu D.O.A.a.

6.9. Hurrengo proiektzio bektore osatu gabeak emanik:

$$\mathbf{f}_1^T = [2, -3, -1, f_1(4), f_1(5)]$$

$$\mathbf{f}_2^T = [0,5; -0,7; 0; 0,8; f_2(5)]$$

Eskatzen da:

- 1) Osa ezazu \mathbf{f}_1 eta \mathbf{f}_1 .
 - 2) $S_1^2 = 4$ eta $S_{12} < 0$ direla jakinik, lor ezazu kobariantza-matrizea eta D.O.Z.a; kalkula ezazu baita ere doikuntzaren fidegarritasuna.
 - 3) Egin ezazu baterako aurkezpen grafikoa, azalpen egokiak emanaz.
- 6.10. $\mathbf{X}_{(4 \times 2)}$ taula baten datuen bidez, Doikuntza Ortogonalaren Zuzenaren gain eta bigarren ardatzaren gain ondorengo proiektzioen bektoreak lortu dira:

$$\mathbf{f}_1^T = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -1 \right] \quad \mathbf{f}_2^T = \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right]$$

Badakigu, hlaber, $\bar{\mathbf{x}}^T = [1,1]$ batezbesteko bektorea eta $[1,2]$ bektorea, D.O.Z.aren norabidean dauden bektoreak direla. Eskatzen da:

- 1) Froga ezazu, hondarrei eta proiektzioei loturiko propietateak betetzen direla. Aurkez ezazu grafikoki, F_1 , F_2 ardatzetako proiektzioak erabiliz, indibiduen puntu-hodeia.
 - 2) Adieraz ezazu, ardatzen fidegarritasuna, bere esangura azalduz.
 - 3) Berreraiki ezazu kobariantza-matrizea.
- 6.11. Izan bitez m indibiduoz osatutako kolektibo batean X_1 , X_2 bi aldagai estatistiko, non $S_2^2 = 9S_1^2$ eta $S_{12} = -S_1S_2$ diren. Eskatzen da:
- 1) Adieraz itzazu bi aldagaien balio zentratuen bektoreak, biek osatzen duten planoan, eta baita $\hat{X}_1(X_2)$, hau da, X_1 -en eta X_2 -rekiko karratu txikienen erregresio zuzena. Lor ezazu grafikoki, erregresio honen koefizientea.
 - 2) Lor ezazu D.O.Z.a bi aldagai normatu horientzat. Froga ezazu ekuazio honen lorpena eta eman ezazu berronen interpretazio bat.
 - 3) Kalkula ezazu, hodei normatutako puntuetatik D.O.Z.era dauden distantzietz osatutako bektorearen moduloa. Era berean, kalkula ezazu doikuntza ortogonalaren egokitasuna.

6.12. Hurrengo datu-matrizeak, 8 ikaslek, Matematika = X_1 , Natur Zientziak = X_2 , Frantsesa = X_3 eta Latina = X_4 irakasgaietan, lortutako puntuazioak jasotzen ditu:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 13 & 12,5 & 8,5 & 9,5 \\ 14,5 & 14,5 & 15,5 & 15 \\ 5,5 & 7 & 14 & 11,5 \\ 14 & 14 & 12 & 12,5 \\ 11 & 10 & 5,5 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 7 & 11 & 9,5 \\ 6 & 6 & 5 & 5,5 \end{pmatrix}$$

Datu horiekin ondoko emaitzak lortu dira:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 9,750 \\ 9,875 \\ 9,940 \\ 9,812 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 12,75 & 11,13 & 3,20 & 5,61 \\ 11,13 & 10,05 & 4,74 & 6,26 \\ 3,20 & 4,74 & 12,84 & 9,83 \\ 5,61 & 6,26 & 9,83 & 8,37 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 31,44 \quad \lambda_2 = 12,54 \quad \lambda_3 = 0,02 \quad \lambda_4 = 0$$

$$\mathbf{u}_1^T = (-0,53; -0,52; -0,47; -0,47) \quad \mathbf{u}_1^T = (-0,55; -0,35; 0,68; 0,33)$$

- 1) Hurrengo matrizeak indibiduo puntu-hodeiaren lehenengo bi osagai nagusiak jasotzen ditu. Kalkula itzazu, datu-matrizea kontutan izanik, 8. ikaslearen proiektzioak eta baita $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ espazio dualaren aldagai puntuen proiektzioak. Lor ezazu baterako aurkezpen grafikoa.

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \begin{pmatrix} -0,8 & -1,34 \\ -3,54 & 0,43 \\ 0,36 & 2,36 \\ -2,35 & -0,54 \\ 0,95 & -1,65 \\ 1,30 & -0,10 \\ 1,10 & 1,31 \\ f_1(8) & f_2(8) \end{pmatrix}$$

- 2) Interpreta ezazu lehen plano nagusi hau lehen bi ardatz nagusietan, fidegarritasunak, ehunekotan, honakoak direla jakinik:

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%26 & \%74 \\ \%98 & \%1 \\ \%2 & \%98 \\ \%95 & \%5 \\ \%25 & \%75 \\ \%99 & \%1 \\ \%42 & \%58 \\ \%98 & \%2 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%70 & \%30 \\ \%84 & \%15 \\ \%54 & \%44 \\ \%82 & \%16 \end{pmatrix}$$

6.13. Ondoko datuak, X_1 telefonoen portzentaiari, X_2 ikuzkailuen portzentaiari eta X_3 platerikuzkailuen portzentaiari dagozkie, hiriburuko bateko barruti bakoitzeko famili kopuru totalarekiko.

	X_1	X_2	X_3
1 barrutia	90	80	70
2 barrutia	60	50	30
3 barrutia	70	70	40
4 barrutia	80	70	70
5 barrutia	70	50	30

Batezbestekoak eta kobariantza-matrizea hiru aldagaietarako ondokoak dira:

$$\bar{x}_1 = 74, \quad \bar{x}_2 = 64, \quad \bar{x}_3 = 48$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 104 & & \\ 104 & 144 & \\ 168 & 188 & 336 \end{pmatrix}$$

Datu hauetan, O.N.A. egin ondoren ondoko emaitzak ditugu (\mathbf{L} -ren bi lehen autobalio eta autobektoreak):

$$\lambda_1 = 540,5244$$

$$\lambda_2 = 28,9629$$

$$\mathbf{u}_1^T = [0,41; 0,48; 0,78]$$

$$\mathbf{u}_2^T = [-0,06; -0,84; 0,54]$$

Badakigu, hiru lehen barrutien koordinatu zuzenduak, halaber, lau barruti eta aldagai guztien ekarpen erlatiboak bi lehen ardatzetarako:

$$[\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*] = \begin{pmatrix} 8,05 & -0,60 \\ -6,82 & 0,71 \\ -1,34 & -2,37 \\ f_1^*(4) & f_2^*(4) \\ f_1^*(5) & f_2^*(5) \end{pmatrix}$$

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%98 & \%0,5 \\ \%97 & \%1 \\ \%22 & \%72 \\ - & - \\ \%91 & \%1 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%88,45 & \%0,09 \\ \%85 & \%14,13 \\ \%97 & \%2,60 \end{pmatrix}$$

- 1) Lor itzazu 4. eta 5. barrutiei dagozkien koordinatu zuzenduak eta aurkez itzazu plano batean.
 - 2) Lor itzazu aldagaien koordinatu edo proiektzioak eta aurkez itzazu baterako aurkezpen grafikoa osotuz.
 - 3) Lor itzazu 4. barrutiaren ekarpen erlatiboak lehen bi ardatzetarako.
 - 4) Interpretatu ezazu plano faktoriala, ardatz bakoitzaren esangura azalduz.
- 6.14. 1993-94 futbol ligako lehen mailako 20 taldeen emaitzak kontutan izanik (talde hauetatik batzuk aurkezten ditugu), O.N.A. normatua egin da. Ikertutako talde eta aldagaiak ongi zehazturik azaltzen dira tauletan, non lehen eta bigarren ardatzen gaineko proiektzioen fidegarritasunak, ehunekotan, ere azaltzen diren. Talde guztiek 38 partidu jokatu dituzte eta PUNT, puntu aldagaia, horrela kalkulatzen da: $2 \times (\text{irabazitako partiduak guztira}) + (\text{berdindutako partiduak guztira})$.

DATU-MATRIZEA: Laburpena

Taldeak	IRAB1	BERD1	GALD1	IRAB2	BERD2	GALD2	GOL+	GOL-	PUNT
OVI	9	3	7	3	10	6	43	49	37
TFE	12	4	3	3	2	14	50	57	36
SPOR	9	3	7	6	2	11	42	57	35
CELT	9	5	5	2	6	11	41	51	33
LLEI	3	8	8	4	5	10	29	48	27
OSAS	6	7	6	2	3	14	34	63	26

Kodea	Taldea	1. ardatza	2. ardatza
BAR	Bartzelona	93	3
DEP	Deportivo	70	15
ZAR	Zaragoza	74	16
RMAD	Real Madrid	49	17
ATH	Athletic	54	5
SEV	Sevilla	39	46
VAL	Valentzia	21	1
RAC	Racing	2	22
OVI	Oviedo	0	50
TFE	Tenerife	4	88
REAL	Real Sociedad	22	1
AMAD	Madrileko Athletikoa	4	3
ALBA	Albacete	27	4
SPOR	Sporting	9	31
CELT	Celta	58	0
LOGR	Logroñes	51	21
RAYO	Rayo Vallecano	72	10
VALL	Valladolid	64	3
LLEI	Lleida	65	13
OSAS	Osasuna	89	11

	IRAB1	BERD1	GALD1	IRAB2	BERD2	GALD2	GOL+	GOL-	PUNT
IRAB1	1,00								
BERD1	-0,82	1,00							
GALD1	-0,66	0,13	1,00						
IRAB2	0,53	-0,41	-0,47	1,00					
BERD2	-0,04	-0,02	0,08	-0,17	1,00				
GALD2	-0,41	-0,36	0,31	-0,67	-0,62	1,00			
GOL+	0,88	-0,67	-0,64	0,59	0,07	-0,54	1,00		
GOL-	-0,42	0,24	0,50	-0,69	-0,26	0,75	-0,33	1,00	
PUNT	0,84	-0,58	-0,74	0,83	0,13	-0,77	0,84	-0,74	1,00
	IRAB1	BERD1	GALD1	IRAB2	BERD2	GALD2	GOL+	GOL-	PUNT

Kodigoa	Aldagaia	1. ardatza	2. ardatza
IRAB1	Etxean irabazitako partiduak	76	14
BERD1	Etxean berdindutako partiduak	42	9
GALD1	Etxean galdutako partiduak	49	4
IRAB2	Kanpoan irabazitako partiduak	65	0
BERD2	Kanpoan berdindutako partiduak	22	70
GALD2	Kanpoan galdutako partiduak	59	37
GOL+	Sartutako golak	74	4
GOL-	Beraiei sartutako golak	-	-
PUNT	Puntu totalak	-	-

1) \mathbf{R} koerlazio-matrizearen hurrengo autobalioak eta autobektoreak emanik:

$$\lambda_1 = 5,2; \lambda_2 = 1,6; \lambda_3 = 1,1; \lambda_4 = 0,7; \lambda_5 = 0,4;$$

$$\mathbf{u}_1 = (0,38; -0,29; -0,31; 0,07; -0,34; 0,38; -0,32; 0,43)^T,$$

$$\mathbf{u}_2 = (-0,30; 0,24; 0,16; -0,02; 0,67; -0,48; -0,20; -0,33; 0,01)^T.$$

kalkula itzazu falta diren autobalioak eta plano nagusiaren fidegarritasuna. Zenbat ardatz beharko zenituzke fidegarritasun osoa izateko? Azal ezazu zure erantzuna aldagaien definizio konkretuetan fijatuz.

- 2) Marraz itzazu indibiduo guztien proiektzioak, ($\sqrt{20/9}$ gaitik zuzenduak), eta baita aldagaienak ere. Lor ezazu adierazpen horien fidegarritasuna.
- 3) Egin ezazu, plano eta fidegarritasuna erabiliz, lehen ardatzaren ahal duzun interpretazio zehatz eta garbiena.
- 4) Zein dira bigarren ardatzak gehien bereiztutako taldeak? Zertan oinarritzen dira diferentzia horiek?
- 5) Badakigu Bartzelona eta Deportivoa txapeldun eta bigarrenak direla hurrenez hurren, eta Lleida eta Osasuna bigarren mailara jaitsi direla. hau guztia egin dugun O.N.A.-rekin bat al dator?

6.15. “El País” egunkariaren asteroko gehigarritik, ondoko puntuazioak lortu dira 4 edozein-lurreko kotxeri buruz, Segurtasuna (SEG), Bukaera (BUK) eta Habitagarritasun (HAB) aldagaiak aztertuz.

		SEG	BUK	HAB
Land Rover	(Discovery TDI)	3	3	5
Opel	(Monterey TDI)	4	4	4
Suzuki	(Samurai)	2	2	2
Landa	(Niva)	2	1	3

Datu hauen bidez O.N.A. zentratua egin ondoren hurrengo emaitzak lortu ditugu (\mathbf{L} kobariantza-matrizea, \mathbf{L} -ren bi lehen autobektoreak, aldagaien koordenatuak lehen ardatz faktorialean, indibiduen fidegarritasunak bi lehen ardatz faktorialetan eta aldagaienak lehenengoan):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,49 & & & \\ 0,88 & 1,25 & & \\ 0,63 & 0,75 & 1,25 & \end{pmatrix}$$

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%69 & \%30 \\ \%86 & \%13 \\ \%80 & \%18 \\ \%87 & \%12 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%90 & - \\ \%86 & - \\ \%72 & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1^T = [0,49; 0,65; 0,59]$$

$$\mathbf{u}_2^T = [-0,26; -0,53; 0,80]$$

$$\mathbf{g}_1^T = [0,79; 1,04; 0,95]$$

- 1) Lor itzazu \mathbf{L} matrizearen autobalioak, lehen ardatzaren egokitasuna %81,40koa eta plan onagusiaren egokitasuna %98,62koa direla jakinik.
- 2) Aurkez itzazu grafikoki \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 indibiduen proiektzioen bektoreak, elkarren artean \mathbb{R}^4 espazioan osatzen duten planoan.
- 3) Osa ezazu aldagaien koordenatuak, ekarpen erlatiboak edo fidegarritasunak bigarren ardatz faktorialean, eta aurkez itzazu aldagaiak plano nagusian.
- 4) Burutu ezazu plano nagusiaren interpretaziorik egokiena, daukazu informazioaz lagundurik.

6.16. Hurrengo matrizearen datuak Arabako sei eskualdeetan neurturik, (X_1) langabetuen portzentaia, (X_2) zuzendari eta teknikarien portzentaia, (X_3) industriako langileen portzentaia, eta (X_4) zerbitzu sektoreko langileen portzentaia aldagaiei dagozkie.

ESKUALDEAK		X_1	X_2	X_3	X_4
Errioxa Arabarra	E.A.	10,1	5,2	29,4	28,3
Arabako Ibarrek	A.I.	12,3	6,3	20,7	28,0
Arabako Mendialdea	A.M.	13,7	4,7	22,8	25,3
Gorbeia Inguruak	G.I.	15,6	9,1	40,7	36,1
Arabako Lautada	A.L.	18,9	12,4	43,7	47,7
Kantauri Arabarra	K.A.	22,2	6,7	59,5	29,1

Datu hauetan O.N.A. normatua aplikatu ondoren, lortu ditugu:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0,51 & 1 & & \\ 0,89 & 0,46 & 1 & \\ 0,43 & 0,98 & 0,40 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2,838$, $\lambda_2 = 1,0424$ bere bi autobalio handienak, aldagai eta indibiduen proiektzioak eta ekarpen erlatiboak edo fidegarritasunak lehen bi ardatzetan:

$$(\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2) = \begin{pmatrix} -0,83 & 0,50 \\ -0,88 & -0,46 \\ -0,81 & 0,54 \\ -0,84 & -0,53 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{f}_1^\circ \mathbf{f}_2^\circ) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,13 \\ 0,72 & -0,25 \\ 0,85 & -0,105 \\ -0,38 & -0,175 \\ -1,345 & -0,595 \\ -0,645 & 1,045 \end{pmatrix}$$

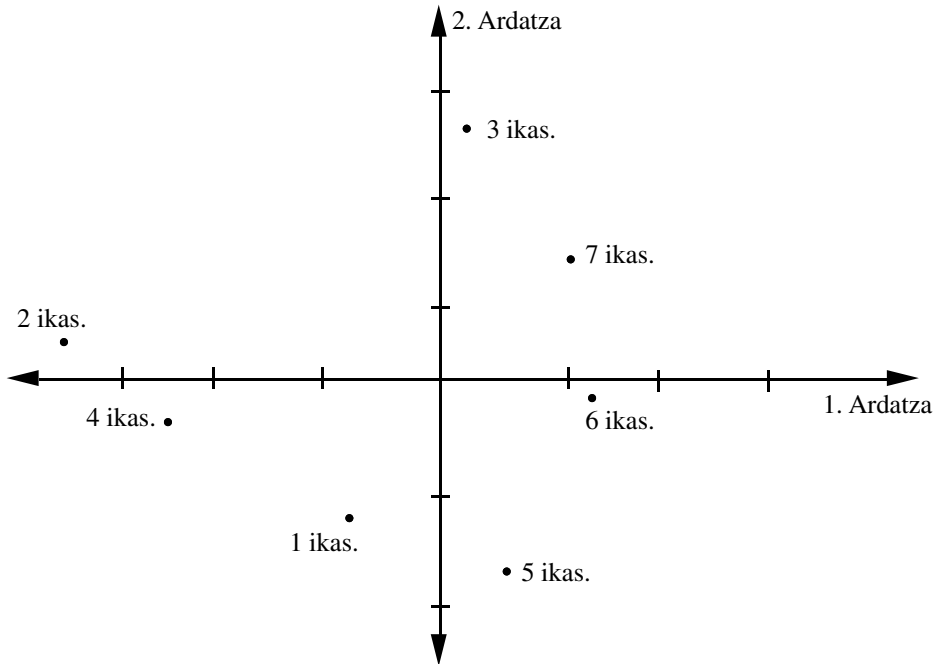
$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} & \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%86 & \%2 & \\ \%86 & \%10 & \\ \%93 & \%1 & \\ \%75 & \%16 & \\ \%83 & \%16 & \\ \%28 & \%72 & \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} & \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%68,9 & \%25,0 & \\ \%77,4 & \%21,2 & \\ \%65,6 & \%29,2 & \\ \%70,5 & \%28,1 & \end{pmatrix}$$

Eskatzen da:

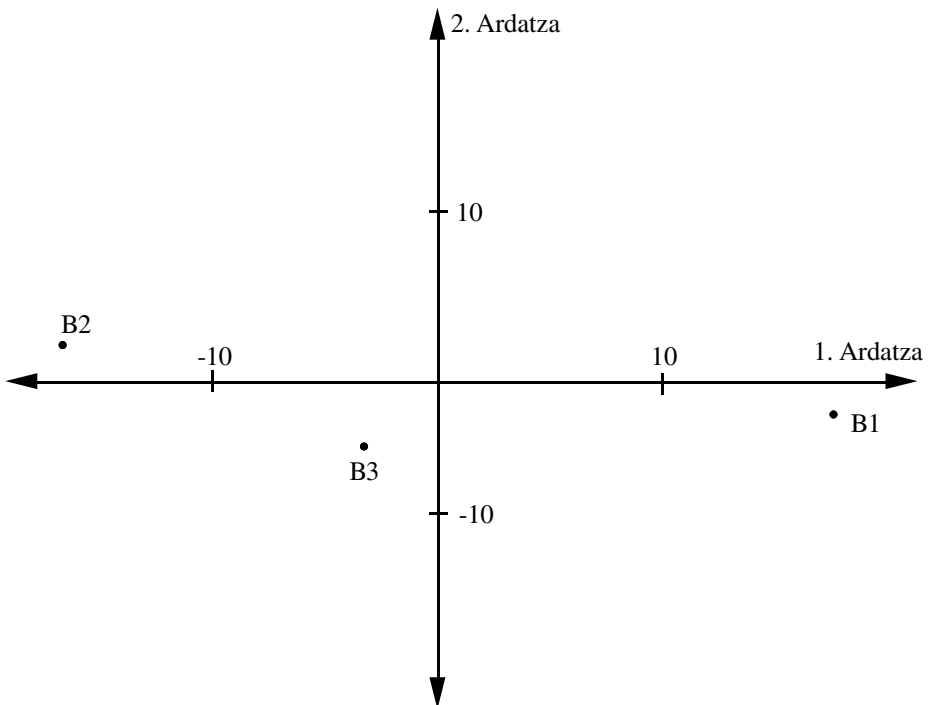
- 1) X_1 , X_2 aldagaien Erregresio Zuzen Ortogonal tipifikatua eta doikuntzaren egokitasuna.
- 2) Osa ezazu bi lehen ardatz faktorialeiei dagokien plano nagusiaren baterako aurkezpen grafikoa.
- 3) Lor ezazu egindako doikuntzaren egokitasuna eta planoaren interpretazioa.
- 4) Arrazona ezazu zergatik uste duzun O.N.A. zentru-normatua egin dela, nahiz eta aldagai guztiak portzentaietan izan.

PLANO NAGUSIAK (1,2)

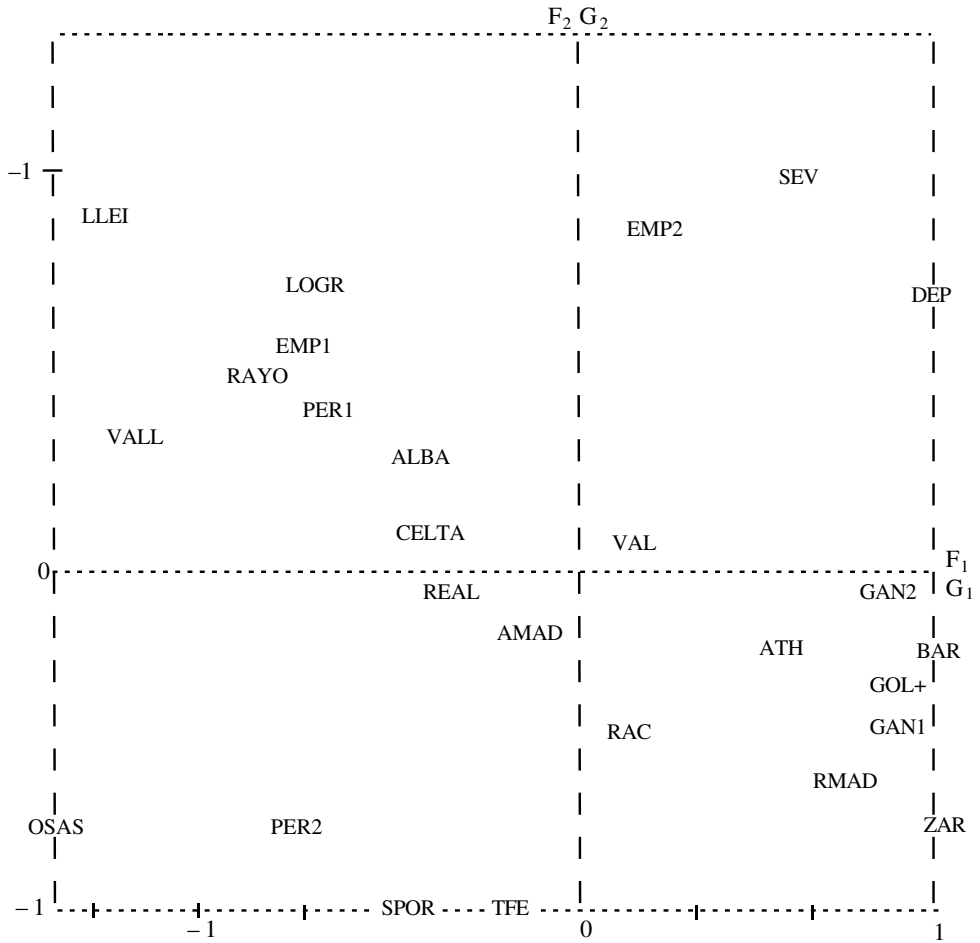
6.12.



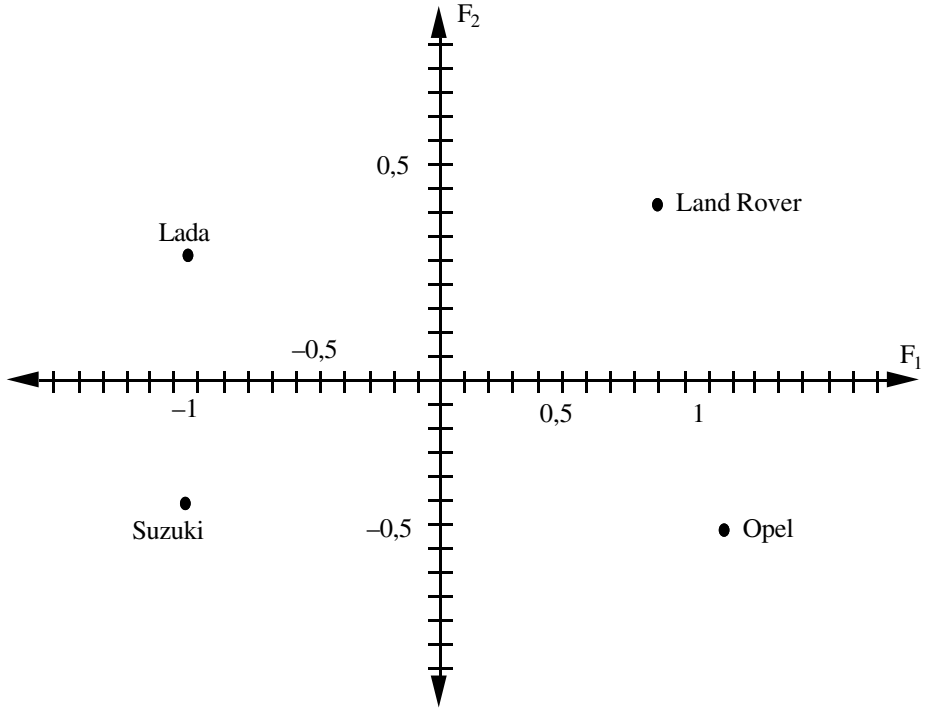
6.13.



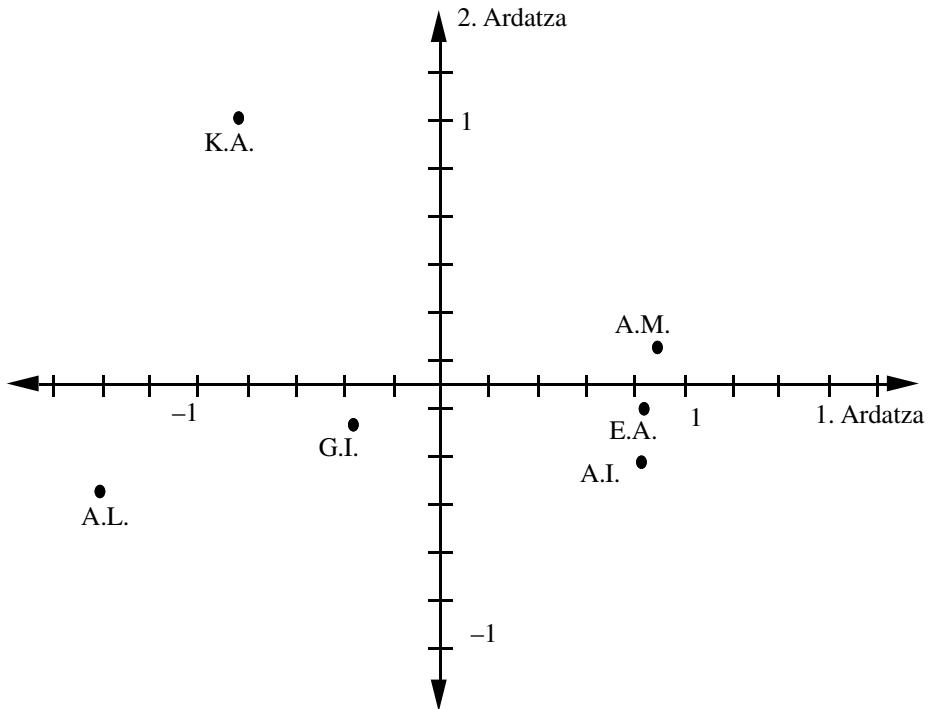
6.14.



6.15.



6.16.



EBAZPIDIAK

6.1.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \bar{x}_1 &= 2,7 & S_1 &= 0,3559 & S_{12} &= 6,03 \\
 \bar{x}_2 &= 37,3 & S_2 &= 20,434 \\
 \hat{X}_2 &= 47,63 X_1 - 91,2738 \\
 r^2 &= 0,688
 \end{aligned}$$

2) Aldagaien eskalak hain desberdinak ($S_1 = 0,35$, $S_2 = 20,4$) izanik, doikuntza tipifikatuz egingo dugu:

$$\mathbf{L(T)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,829 \\ 0,829 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 0,829 = 1,829 \\ \lambda_2 &= 1 - 0,829 = 0,1798 \end{aligned}$$

$$0,707T_1 - 0,707T_2 = 0, \quad \frac{1,829}{2} = 0,9145$$

% 91,45a proiektatzen da baterako inertzia,

3) Bi doikuntzak zeharo desberdinak dira. Lehen atalean egin dugun karratu txikiaren erregresio linealean X_2 aldagaia X_1 aldagaiaren menpe kontsideratzen dugu, hau da, erregresioaren helburua X_1 balioetarako zein den auresan ahal dugun kasu bakoitzean X_2 aldagaiaren balioa bilatzen dugu. Horretarako errore karratuak batezbeste txikien egiten dituen funtzioa lortzen dugu, errore hori X_2 aldagaiaren jasotako balioen eta estimatuen arteko kendura izanik.

Bigarren atalean egin dugun doikuntza ortogonalean, ordea, bi aldagaien konbinazio linealen artean onena den funtzioa bilatzen da (karratu txikiaren zentzuan hau ere), hau da, errore koadratikoak batezbestekoaz txikienez bihurtzen dira, errorea kasu honetan puntutik funtziora dagoen distantzia euklidearra izanik.

6.2.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \bar{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 3,53 \\ 1,5666 \end{bmatrix} & \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} -0,855 & -0,5004 \\ -1,116 & -0,0385 \\ 2,001 & 0,5389 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} 6,035 & 1,564 \\ & 0,542 \end{bmatrix} & \text{tr } \mathbf{L} &= 6,577 \\
 & & |\mathbf{L}| &= 0,825
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 6,45$$

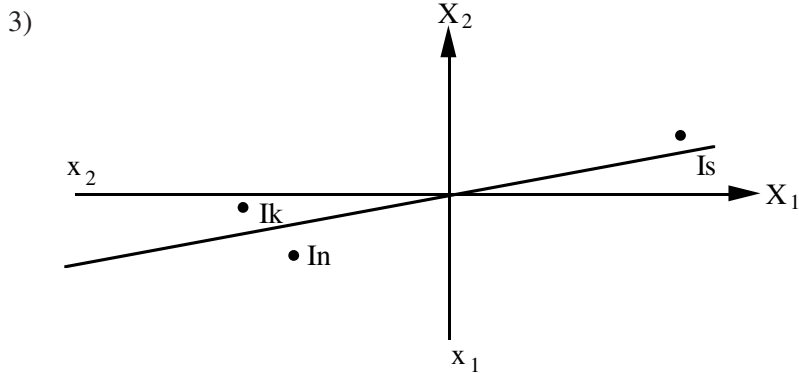
$$\lambda_2 = 0,128$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,256 \\ -0,967 \end{bmatrix}$$

$$0,256 X_1 - 0,697 X_2 = 0$$

$$\frac{6,45}{6,577} = 0,98 \quad \%98\text{ko proportzioan proiektatzen da inertzia}$$

$$2) \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0,984 \\ -1,089 \\ 2,073 \end{bmatrix}$$



6.3.

$$1) \frac{X - \bar{x}}{\sqrt{m}} \quad 0,75/2 \quad -5,25/2 \quad 0,75/2 \quad 3,75/2$$

$$\frac{Y - \bar{y}}{\sqrt{m}} \quad 0 \quad 0 \quad -3/2 \quad 3/2$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 10,6875 & 2,25 \\ & 4,5 \end{bmatrix} \quad \text{tr } \mathbf{L} = 15,1875 \\ |\mathbf{L}| = 43,03125$$

$$\lambda_1 = 11,42$$

$$\lambda_2 = 3,786$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,309 \\ -0,951 \end{bmatrix}$$

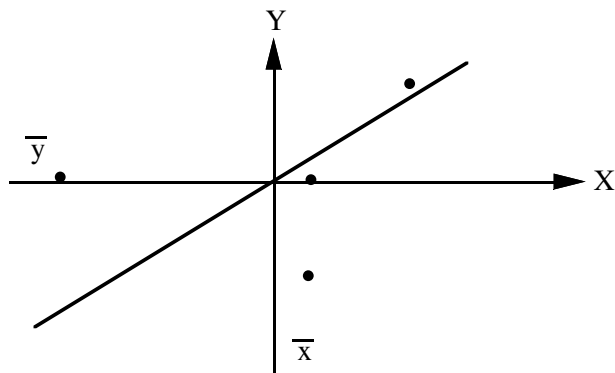
$$0,309X - 0,951Y = 0$$

$$2) \frac{11,42}{15,1875} = 0,75$$

%75a proiektatzen da baterako inertzia eta %25 proiektatu gabe geratzen da, hain zuzen ere.

$$3) f_1 = 0,3565, \quad f_2 = -2,4965, \quad f_3 = -0,107, \quad f_4 = 2,2465$$

4)



6.4.

$$1) 0,957 X_1 - 0,289 X_2 = 0$$

2) %86koa da proiektatutako proportzioa.

3), 4)

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} -1,272 \\ 1,105 \\ 0,167 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} -0,229 \\ -0,334 \\ 0,553 \end{bmatrix}$$

$$5) I_f = \lambda_1 = 2,868 \quad I_e = \lambda_2 = 0,465 \quad \langle \mathbf{f}/\mathbf{e} \rangle = 0,002 \cong 0$$

6.5.

1) X_1 : tenperatuak, X_2 : euri kantitateak izanik

$$\hat{X}_2 = -6,06X_1 + 193,545$$

$\hat{X}_2 (x_1 = 10) = 132,9$ litro izango litzateke jausitako euri kantitatea doikuntzaren arabera.

$r^2 = 0,3143$, %31,43 batean azaltzen da Y aldagaiaren bariantza. Ezin da esan estimazioa ona denik, nahiko urrun egon baitaiteke jausitako euri kantitatea 132,6 litro horietatik.

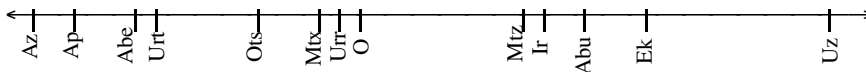
$$2) \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5802 \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 14,08 \\ 108,16 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} S_1 = 4,1121 \\ S_2 = 42,9608 \end{array}$$

$$3) 0,707 X_1 + 0,707 X_2 = 0$$

4) Hilabetea	X_1	X_2	Poiekzioak: f_i
U	-0,4270	+0,0754	-0,35
O	-0,2165	0,0280	-0,17
M	-0,2165	-0,1407	-0,05
A	-0,1463	0,4602	-0,43
M	0,0644	-0,2757	0,24
E	0,2047	-0,3499	0,39
U	0,4154	-0,5188	0,66
A	0,4390	-0,0664	0,34
I	0,3451	-0,0326	0,27
U	0,1346	0,1690	-0,03
A	-0,2165	0,4806	-0,49
A	-0,3568	0,1699	-0,37

5) %79a da azaldutako baterako inertziaren proportzioa.

6)



$$7) r_{f,x_1} = 0,8834 \quad r_{f,x_2} = \frac{-1,1037}{1,5607} = -0,8834$$

6.6.

1)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Diagonalizatuz: } \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 + r_{12} = 1,5 \\ \lambda_2 = 1 - r_{12} = 0,5 \end{array}$$

$\lambda = 0,5$ autobalioari

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{bmatrix} \text{ autobektorea dagokio.}$$

$$\text{Beraz : } 0,707 X_1 - 0,707 X_2 = 0$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \quad \%75\text{a da bildutako inertzia.}$$

$$2) f_1 = [-0,1 \quad 0,94] \quad \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix} = 0,594$$

$$f_2 = [0, \quad -0,06] \quad \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \end{bmatrix} = -0,0424$$

6.7.

$$1) I = S_1^2 + S_2^2 = 22,81$$

$$\lambda^2 - 22,81\lambda + 4,2538 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 22,62 \quad \lambda_2 = 0,19$$

$$I_{f_1} = 22,62 \quad I_{f_2} = 0,19$$

$$2) \mathbf{u}_2 = [0,98 \quad -0,18]^T \Leftrightarrow F_1 \equiv 0,98X_1 - 0,18X_2 = 0$$

$$\tau_1 = \frac{22,62}{22,81} = 0,99$$

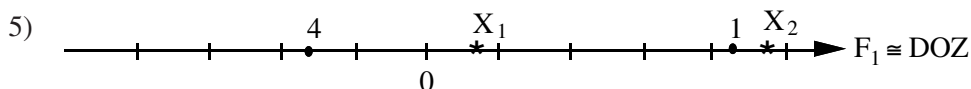
Inertziatik %99a D.O.A.ean proiektatzen da. Doikuntza oso egokia da.

$$3) \mathbf{u}_1 = [0,18 \quad 0,98]^T \text{ izanik:}$$

$$f_1(1) = \left(\frac{3,5 - 1,628}{\sqrt{7}} \right) 0,18 + \left(\frac{20 - 9,143}{\sqrt{7}} \right) 0,98 = 4,15$$

$$f_1(4) = \left(\frac{0,5 - 1,628}{\sqrt{7}} \right) 0,18 + \left(\frac{5 - 9,143}{\sqrt{7}} \right) 0,98 = -1,61$$

$$4) \mathbf{g}_1 = \sqrt{22,62} \begin{bmatrix} 0,18 \\ 0,98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,86 \\ 4,66 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_2 = \sqrt{0,19} \begin{bmatrix} 0,98 \\ -0,18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,43 \\ -0,08 \end{bmatrix}$$



Bi aldagaien arteko erlazioa zuzena denez ardatzaren alde berean proiektatzen dira. Alde honetan lehen indibidua daukagu, bera balioak \bar{x}_1 , \bar{x}_2 baino handiagoak direlako; laugarren indibidua, ordea, beste aldean kokatzen da bere balioak batezbestekoaren baino txikiagoak direlako.

6.8.

$$1) \lambda^2 - 76,17\lambda + 998,8993 = 0$$

$$\lambda_1 = 59,350 \quad \mathbf{u}_1 = [0,5918 \quad 0,8060]^T$$

$$\lambda_2 = 16,835 \quad \mathbf{u}_2 = [0,8060 \quad -0,5918]^T$$

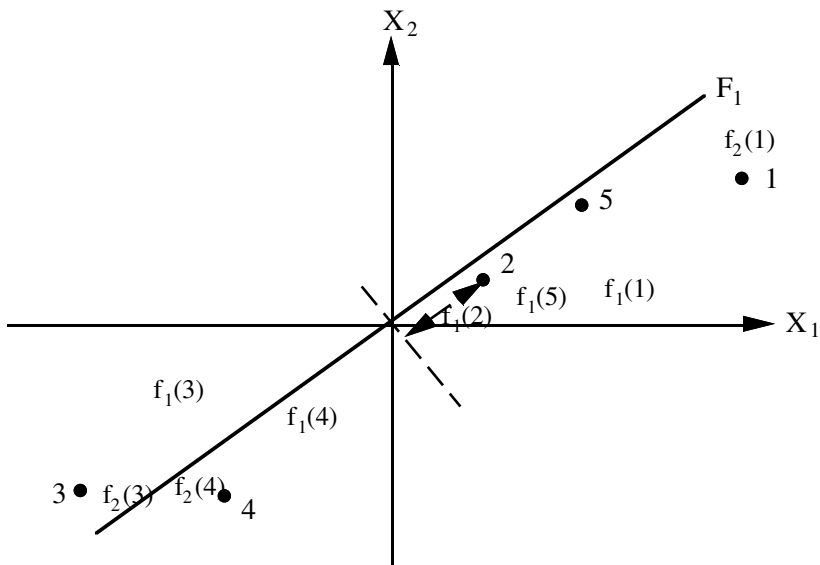
$$\text{D.O.Z.: } 0,8060X_1 - 0,5918X_2 = 0$$

2)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2,4668 & 1,8332 \\ 0,6594 & 0,8004 \\ -2,9553 & -2,8143 \\ -0,8897 & -2,0397 \\ 1,4340 & 1,8332 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{X} \begin{bmatrix} 0,5918 \\ 0,8060 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,9374 \\ 1,0353 \\ -4,0172 \\ -2,1705 \\ 2,3262 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{X} \begin{bmatrix} 0,8060 \\ -0,5918 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9033 \\ 0,0577 \\ -0,7400 \\ 0,4800 \\ 0,8000 \end{bmatrix}$$

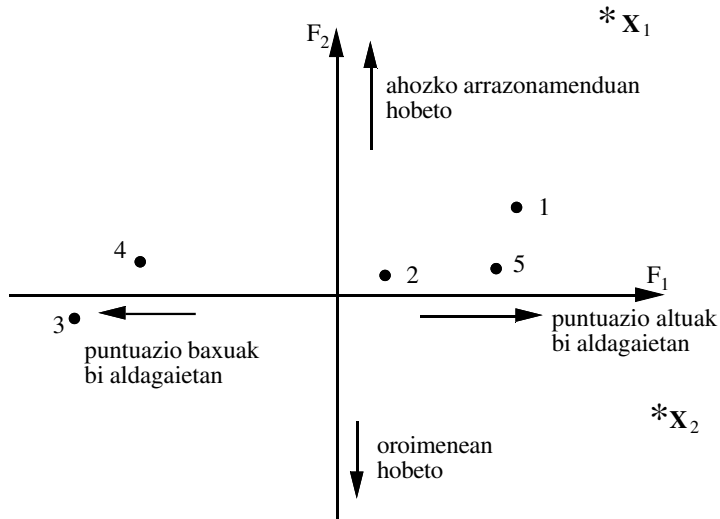
Bost ikasleren proiektzioen baturak ezin du zero izan ez direlako indibiduo guztien proiektzioak.



3)

$$\mathbf{g}_1 \sqrt{59,34} \begin{pmatrix} 0,5918 \\ 0,8060 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,559 \\ 6,2088 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_2 \sqrt{16,83} \begin{pmatrix} 0,8060 \\ -0,5918 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,3066 \\ -2,4278 \end{pmatrix}$$



6.9.

$$1) \bar{f}_1 = 0 \Rightarrow f_1(4) + f_1(5) = 2$$

$$\bar{f}_2 = 0 \Rightarrow f_2(5) = -0,6$$

$$\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 = 0 \Rightarrow 3,1 + 0,8f_1(4) - 0,6f_1(5) = 0$$

$$f_1(4) = -1,4 \quad f_1(5) = 3,4$$

$$2) \lambda_1 = \sum_i f_1^2(i) = 26,58 \quad \lambda_2 = \sum_i f_2^2(i) = 1,74$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = 4 + c = \lambda_1 + \lambda_2 = 28,32 \Rightarrow c = 24,32$$

$$|\mathbf{L}| = \lambda_1 \lambda_2 = 4c - b^2 = 46,25 \Rightarrow b = \pm 7,14$$

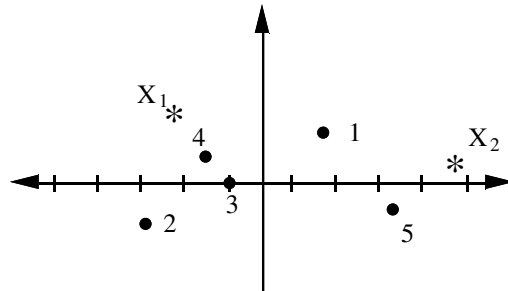
$$S_{12} < 0 \text{ denez} \quad S_{12} = -7,14$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & -7,14 \\ & 24,32 \end{bmatrix}$$

$$\text{D.O.Z.: } 0,95X_1 + 0,29X_2 = 0$$

$$\tau_1 = \frac{26,58}{28,32} = 0,94$$

$$3) \mathbf{g}_1 = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1,49 \\ 4,89 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_2 = \sqrt{\lambda_2} \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0,38 \end{bmatrix}$$



Doikuntza ortogonalak baterako inertziatik %94a biltzen du, bigarren ardatzak, ordea, %6a. Inertzia totalaz zatirik handiena bigarren aldagaiaren bariantzari dagokio.

6.10.

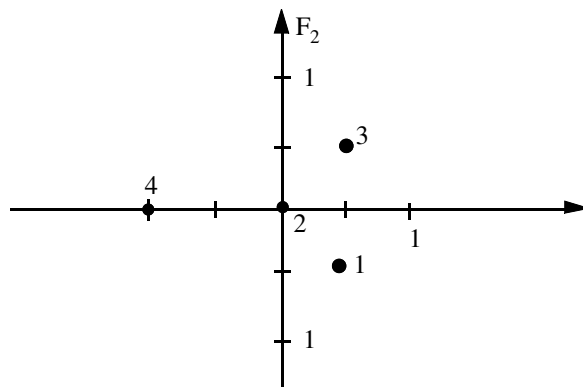
$$1) \bar{f}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \bar{f}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$I_{f_1} = \mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2} = \lambda_1$$

$$I_{f_2} = \mathbf{f}_2^T \mathbf{f}_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \lambda_2$$

$$\text{tr } \Lambda = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$



$$2) 1. \text{ ardatzaren fidegarritasuna: } \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$$

$$2. \text{ ardatzaren fidegarritasuna: } \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Proiektatutako inertzien ehunekoak %75a eta %25a dira, hurrenez hurren. Doikuntza ona da.

3)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \text{tr } \mathbf{L} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 \\ & 1,3 \end{bmatrix}$$

6.11.

$$1) S_2^2 = \frac{\|\mathbf{C}_2\|^2}{m} = 9 \frac{\|\mathbf{C}_1\|^2}{m} = S_1^2 \Rightarrow \|\mathbf{C}_2\| = 3\|\mathbf{C}_1\|$$

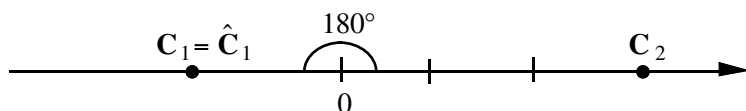
$$r_{12} = \frac{-S_1 S_2}{S_1 S_2} = -1 \Rightarrow \alpha_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2} = 180^\circ$$

$$r_{12} = -1 \Rightarrow e_i = 0 \quad \forall_i \Rightarrow \hat{\mathbf{C}}_1 = \bar{\mathbf{C}}_1$$

$$\|\hat{\mathbf{C}}_1\| = \|\mathbf{C}_1\| = b_{12} \|\mathbf{C}_2\| = b_{12} 3\|\mathbf{C}_1\| \Rightarrow \|\mathbf{C}_1\| = b_{12} 3\|\mathbf{C}_1\|$$

$$\Rightarrow b_{12} = -\frac{1}{3} \hat{\mathbf{C}}_1 \quad \text{eta } \mathbf{C}_2 \text{ - ren norantza aurkakoa baita.}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_1 = -\frac{1}{3} \mathbf{C}_2$$

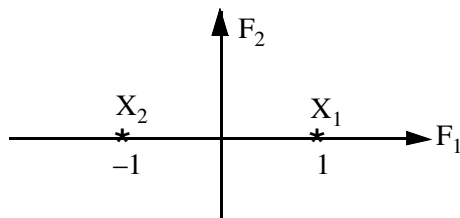


$$2) r_{12} - 1 \Rightarrow 0,707X_1 + 0,707X_2 = 0$$

Doikuntza Ortogonalaren Zuzena bigarren eta laugarren koadranteen erdikaria da (ikus Estatistikarako Sarrera 174-177 orrialdeak).

Aldagaien arteko erlazioa osoa eta alderantzizkoa denez, gauza berbera neurtzen dute baina era oposatuan; adibidez, urtean lana eginez eta lanik egin gabe ditugun egunak.

$$\lambda_1 1 - (-1) = 2, \quad \lambda_2 = 0 \quad \mathbf{g}_1 = \sqrt{2} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



- 3) $\mathbf{f}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \|\mathbf{f}_2\| = 0$
 $\tau_1 = 1$ Inertzi guztia F_1 ardatzak jasotzen du.

6.12.

- 1) $f_1(8) = \langle \mathbf{x}(8), \mathbf{u}_1 \rangle = 2,955$ $f_2(8) = \langle \mathbf{x}(8), \mathbf{u}_2 \rangle = -0,481$

$$\mathbf{x}(8) = \begin{bmatrix} \frac{x_{8j} - \bar{X}_j}{\sqrt{m}} \end{bmatrix} \quad \text{non } \bar{x}_j \text{ j. aldagaiaren batezbestekoa} \\ \text{eta } \sqrt{m} = \sqrt{8} \text{ diren.}$$

$$\mathbf{g}_1 = \sqrt{\lambda_1} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2,969 \\ -2,917 \\ -2,637 \\ -2,637 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_2 = \sqrt{\lambda_2} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1,948 \\ -1,237 \\ 2,408 \\ 1,167 \end{bmatrix}$$

- 2) Zortzigarren ikaslearen proiektzioa eta lau aldagaien planoan ezarriz, plano nagusia interpreta dezakegu.

Bi ardatzetan aldagaiak eta indibiduoak dituzten fidegarritasunak batuz, ia guztiena %100a dela ikus dezakegu, hau da, planoak, datu-taulan zeuden ezberdintasunak (proportzio handi batean) jasotzen ditu eta argiro azalduko ditu.

1. ardatza.

Ikusten denez, grafikoaren ezker aldean aldagai guztiak eta puntuazio hoberenak dituzten ikasleak (2 eta 4. ikasleak) daude. Eskuinaldean, ordea, puntuazio txarrenak dituzten ikasleak (8 ikalea). Neurri ardatza da, tamainu efektua jasotzen baitu.

2. ardatza.

Ardatz honek, nahitaez ortogonalak lehenengoarekin izanik honek jasotzen ez dituen desberdintasunak jasotzen ditu, guztiz garrantzizkoak, kasu honetan, hodeiaren anizkoitasuna, praktikoki, bi dimentsiotan laburtzen baita. (Planoaren egokitasuna % 99,9koa da).

Planoaren goialdean Frantsesa eta garrantzi gutxiagorekin Latina nabarmentzen dira eta beheko aldean Matematika eta garrantzi gutxiagorekin Natur Zientziak. Hau da, ardatz honek zientzietan edo letratan hobeak diren ikasleak kontrajartzen ditu.

6.13.

1)

$$[f_1(4) \ f_2(4)] = [2,68 \ 2,68 \ 9,83] \begin{bmatrix} 0,41 & -0,06 \\ 0,48 & -0,84 \\ 0,78 & 0,54 \end{bmatrix} = [10,05 \ 2,90]$$

$$[f_1^*(4) \ f_2^*(4)] = \sqrt{\frac{m}{n}} [f_1(4) \ f_2(4)] = [12,97 \ 3,74]$$

$$\bar{f}_k = 0 \Rightarrow \bar{f}_k^* = 0 \Rightarrow f_1^*(5) = -12,92 \quad f_2^*(5) = 1,3$$

2)

$$\mathbf{g}_1 = \sqrt{\lambda_1} \quad \mathbf{u}_1 = \sqrt{540,52} \begin{bmatrix} 0,41 \\ 0,48 \\ 0,78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,53 \\ 11,15 \\ 18,13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_2 = \sqrt{\lambda_2} \quad \mathbf{u}_2 = \sqrt{28,96} \begin{bmatrix} -0,06 \\ -0,84 \\ 0,54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,32 \\ -4,52 \\ 2,9 \end{bmatrix}$$

Emandako eta ateratako koordenatuekin ikasleak planoak osa dezake.

3) 1. ardatza: $10,05^2 / (2,68^2 + 2,68^2 + 9,83^2) = 0,90 \Rightarrow \%90$

2. ardatza: $2,90^2 / (2,68^2 + 2,68^2 + 9,83^2) = 0,075 \Rightarrow \%7,5$

4) Ikusten denez, lehena (F_1) neurri ardatza da, aldagai guztiak ardatz honetan ondo aurkezturik daude eta ondorioz hiru aldagaietan portzentaia handienak (1 eta 4) eta txikienak (2 eta 5) dituzten barrutiak kontrajartzen dituela esan dezakegu. Ardatz honek hodeiaren $\%92,5a$ jasotzen du eta berak bakarrik hodeiaren irudi on bat ematen digu.

Bigarren ardatzak hodeiaren inertziatik $\%5a$ jasotzen du eta ez dauka garrantzi handirik; hala eta guztiz, 3. barrutiaren berezitasuna ematen digu: ikusten denez ekipamenduan orokorki ondo izanik ikuzkailuen portzentaia handiagoa edukitzeagatik nabarmentzen da, planoak daukan ekarpen erlatiboa 3. barrutirako $\%94a$ da baina portzentaia honetatik $\%72ak$ bigarren ardatzari dagokio.

Laburki esanez, planoak hodei hirudimentsionala oso ondo aurkezten du ($\%97,5a$) eta honen barruan F_1 , hiru aldagaien konbinazio lineala izanik, neurri ardatza da; F_2 ordea, hiru aldagaien konbinazio lineala baita ere, ikuzkailuen portzentaiaz eraturik dago erabat.

6.14.

$$1) \sum_{k=1}^5 \lambda_k = 9 = \text{tr } \mathbf{R} \Rightarrow \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$$

Fidegarritasun osoa bost ardatzekin lortzen da. Datu taularen heina bost, eta ondorioz, \mathbf{R} -ren heina bost izanik, desberdin zero diren autobalioak bost dira. Aldagaien definizioa ikusirik PUNT eta beste batzuk besteren konbinazio linealak dira. Adibidez, irabazitako eta berdindutako partiduen bidez zenbat izan diren galdutakoak badakigu.

2) $\tau_{(1,2)} = \lambda_1 + \lambda_2 / 9 = 0,756 \Rightarrow \%75,6$	Fidagarritasuna
$g_1(\text{GOL-}) = \sqrt{5,2} (-0,32) = -0,7297$	$\%53$
$g_2(\text{GOL-}) = \sqrt{1,6} (-0,33) = -0,4174$	$\%17$
$g_1(\text{PUNT}) = \sqrt{5,2} (0,43) = 0,9805$	$\%96$
$g_2(\text{PUNT}) = \sqrt{1,6} (0,01) = 0,0126$	$\%0$

3) Lehenengo ardatzak talde hoberenak eta txarrenak desberdintzen ditu. Hoberenak: BARTzelona, DEPortivoa, ZARagoza, RMAD, ATH (ondo aurkezturik) dira; txarrenak ZELT, LOGR, RAYO, VALL, LLEI, OSAS dira ardatz honen arabera. Beste taldeetan fidagarritasunak ardatz honetan ez dira onak, hau da, ezin dugu ezer esan analisi honetan oinarrituz. Aldagai guztiak alde batera edo bestera kalitate handiaz proiektaturik daude BER2 izan ezik.

Ardatz honek inertiaren $\%57,7a$ biltzen du eta ez da gutxi aldagaien kopurua kontutan harturik. Taldeen arteko desberdintasun nabariena jokoaren kalitatean datza. Kalitate ardatza dela esan dezakegu.

4) Bigarren ardatzak gehien bereizitako taldeak honakoak dira: Sevilla, Oviedo alde batetik, eta Tenerife eta atzetik Sporting beste aldetik, dira. Aldagaien artean fidagarritasun handiena daukana, ardatz honetan, BER2 da, eta ondoren GAL2, IRAB1. Hau da, bigarren ardatzak etxetik kanpo atera dituzten emaitzen bidez desberdintzen ditu taldeak. Kalitate berdintsua daukaten taldeak, lehen ardatzaren arabera, bigarrenak erasozaleagoak (GAL2 eta IRAB1 gehiago) direnak defentsaza-leagoak (BER2 gehiago) direnetik desberdintzen du.

Zentzu honetan defentsazaleagoak OVI eta SEV eta erasozaleagoak SPOR eta TFE dira.

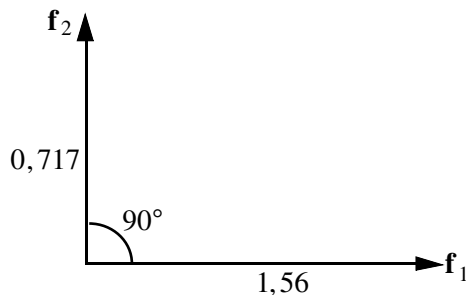
5) O.N.A. futbol ligako emaitzekin guttiz koherentea da: BAR eta DEP oso ondo aurkezturik ardatzaren alde batera, PUNT, IRAB1 eta IRAB 2 aldagaiak bezala proiektaturik, eta LLEI, OSAS ondo aurkezturik eta kontrajarriak ardatz honetan, BER1, GAL1 eta GAL2 aldagaiekin batera.

6.15.

1)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\lambda_1}{3} = 0,814 \\ \sum_{k=1}^3 \lambda_k \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} = 0,9862 \\ \sum_{k=1}^3 \lambda_k \\ \sum_{k=1}^3 \lambda_k = \text{tr } L = 2,99 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 = 2,4338 \quad \lambda_2 = 0,515 \quad \lambda_3 = 0,04$$

$$2) \mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2 = 0 \quad \|\mathbf{f}_1\| = \sqrt{\lambda_1} = 1,56 \quad \|\mathbf{f}_2\| = \sqrt{\lambda_2} = 0,717$$



$$3) \mathbf{g}_2 = \sqrt{\lambda_2} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -0,186 \\ -0,38 \\ 0,57 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ekarpen erlat.} = \text{CTR}_j(2) = \frac{\mathbf{g}_2^2(j)}{S_j^2} = \begin{bmatrix} \%7 \\ \%11,55 \\ \%25 \end{bmatrix}$$

4) Aldagaiak, adierazburuaren planoan aurkeztu ondoren, honako hau, ikus dezakegu:

Lehen ardatzak, datuen informaziotik, %80a jasotzen du; aldagai guztiak ondo aurkezturik eta alde berean daude kokaturik, hau da, neurri ardatza da, kalitatearen ardatza izendatu dezakegu; zenbat eta eskuinalderago egon, hiru aldagaietan puntuazio altuagoa daukala esan nahi du. Ikus dezakegenez Opel

eta L. Rover eskuinaldean daude, batezbestekoa baino kalitate altuagoa baitaude, eta Suzuki eta Lada-k baxuagoa izanik, ezkerrean daude.

Bigarren ardatzak %17a jasotzen du, lehenengokoak jasotzen ez duena. Aldagaietatik Habitagarritasuna dago hoberen aurkeztua eta indibiduoetatik Land Rovera. Azken hau Habitagarritasunagatik nabarmendu egiten da bigarren ardatz honetan, Suzuki eta Opelekin kontrajarrita egonik.

6.16.

- 1) Doikuntza ortogonalaren zuzen normatua, $r_{12} > 0$ izanik, lehen eta hirugarren koadrantetik pasatzen den erdikaria da:

$$\text{D.O.Z.: } 0,707X_1 - 0,707X_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 + r_{12} = 1,51 \quad \tau_1 = \frac{1,51}{2} = 0,755$$

$$\lambda_2 = 1 - r_{12} = 0,49$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 = \text{tr R} \quad \text{Hodeiaren inertziatik } \%75,5\text{a jasotzen du zuzenak.}$$

- 2) Baterako aurkezpen grafikoa, planoan aldagai puntuak ezarri lortzen dugu.

$$3) \tau_{(1,2)} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\text{tr R}} = 0,97$$

Planoak hodeiaren inertzia totaletik %97a jasotzen du puntuak beronen gain proiektatzean.

Planoaren interpretazioa:

Lehen ardatzak aldagai guztietan balio handiak hartzen dituzten eskualdeak (batez ere A.L.) eta balio txikiak hartzen dituztenak desberdintzen ditu (A.M., E.A., A.I.). Neurri ardatza da.

Bigarren ardatzean K.A. nabaria da (hobeto aurkezturik ardatz honetan lehenengoan baino). K.A.-ren ezaugarriak langabetuen portzentaia eta industriako langileen portzentaia dira, hauek elkarrekin erlazio zuzena eta sakona dutelarik. Elementu hauen aurka, alde negatiboan, zuzendari eta teknikarien portzentaia, zerbitzu sektoreko langileen portzentaia, A.L., G.I., eta atzetik A.I., aldagai horiek karakterizatzen dituelarik.

- 4) Aldagai guztiak portzentaian neurturik izanik neurri homogeenok dira, baina tamainuaren aldetik zuzendari eta teknikarien portzentaia txikiagoak dira, eta ez bagenu analisi normatua aplikatuko beste aldagaiak baino zati txikiagoa hartuko luke ardatz faktorialen eraketan.

BESTE ADIERAZBURU BATZUK

1. Ondoko taulan X,Y aldagai bikoitzaren banaketa daukagu 1.000 indibiduorentzat:

X \ Y	-1	+1
-1	200	300
+1	300	200

Honakoa eskatzen da:

- 1) Y aldagaiaren X aldagaiarekiko batezbestekoaren erregresio-lerroa.
- 2) Y aldagaiaren X aldagaiarekiko karratu txikiaren erregresio-lerroa.
Zaila izango litzateke X-en Y-rekikoa kalkulu gehiagorik gabe ateratzea?
- 3) Karratu txikiaren doikuntza ortogonalaren lerroa.
- 4) Aurkez ezazu grafikoki 1), 2), 3) ataletan lortutako lerroak.
- 5) Zaila al litzateke kalkulurik egin gabe 2), 3) ataletako lerroak X, Y aldagaiei dagozkien aldagai tipifikatuetarako lortzea?

2. Enpresa-talde baterako X_1 , X_2 aldagaiak neurtu dira:

X_1 : 1986. urterako, inbertsio kopurua milaka milioi pezetatan.

X_2 : 1986. urterako, balio erantsi gordina milaka milioi pezetatan.

Ondokoak, talderako lortutako estatistikoak izanik:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Puntu-hodeian ongien doitzen den doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 2) Berdin X_1 , X_2 balioak tipifikatuak balira.
- 3) Ondoko bi enpresei dagozkien koordinatuak edo proiektzioak 1) atalean lortu dugun zuzenarako:

	Inbertsioa	Balio Erantsi G.
Lacosa	4.000 milioi	5.000 milioi
Iberian Buss	4.000 “	1.000 “

- 4) Berdin 2) atalean lortu dugun zuzenerako.

3. BBB ikasten diharduten 15 ikasleri bi azterketa egin zaizkie: X_1 , ahozko arrazona-menduaz bata eta X_2 , memoriaz, bestea.

Ondoan, lortutako puntuazioak eta dagozkien estatistikoak ditugu:

Ikaslea:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_1 :	20	29	24	22	14	28	16	8	20	18	11	19	22	15	25
X_2 :	17	22	8	20	18	19	7	4	23	2	10	15	18	19	22

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 19,466 \\ 14,933 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 31,58 & 20,23 \\ 20,23 & 44,59 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu datu hauetan ongien doitzen den karratu txikiaren doikuntza ortogonalak.
 - 2) Marraz ezazu doikuntza hori puntu-hodeiaren irudian.
 - 3) Lor ezazu koordinatua (proiekzioa) zuzen horretan lehenengo 4 ikasleentzat eta bakoitzari dagokion hondarra ere bai. Ikasle baten koordinatua beste batenaren bikoitza bada, zein izango litzateke esanahia?
Eta ikasle baten hondarra beste batenaren bikoitza bada, zein izango litzateke esanahia?
 - 4) Zein da 15 proiekzioen bariantza? Eta 15 hondarrena?
4. 10.000 piezaren luzera eta diametroa ezaguturik, ondoko batezbesteko bektorea eta kobariantza-matrizea lortu dira.:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 25 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Doikuntza ortogonalaren ekuazioa eta baterako bariantzarekiko hondar-bariantzaren proportzioa.
 - 2) Doikuntza ortogonalaren ekuazioa aldagai tipifikatuentzat eta hondar-bariantzaren balioa, ebazpide orokorra aplikatuz.
5. Ondoko osatu gabeko datuek, zenbait estatutako bizi-itxaropenaz (E) eta “per capita” errentaz (R) milaka \$-etan informazioa ematen digute:

	R	E
Suedia	–	78
Italia	5,3	73
Alemania	11,4	–
Espainia	4,8	72
Britainia Handia	–	74
Grezia	4,2	72

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu ezagutzen ditugun datuetan, karratu txikienen irizpidez ongien doitzen den doikuntza ortogonalaren zuzena. Lor ezazu, halaber, doikuntzaren egokitasuna bere esangura komentatuz.
 - 2) Datu ezezagunen estimazioa egin, lortu duzun doikuntza ortogonalaren bidez.
 - 3) Aurkez ezazu, grafikoki, doikuntza ortogonalaren zuzena, R_2 espazioan daukagun puntu-hodeian.
6. Ondoko taulan X_1 , X_2 aldagaietarako Ertamerika eta Hegoamerikako 18 estaturen datuak ditugu.
 X_1 = hiri-populazioaren portzentaia.
 X_2 = eskolako matrikula-tasa.

	X_1	X_2
Venezuela	85	74
Argentina	84	88
Mexiko	69	88
Panama	50	83
Uruguai	85	86
Brasil	73	78
Txile	83	95
Kolonbia	67	73
Costa Rica	45	69
Guatemala	41	47
Ekuador	52	85
Peru	68	85
Paraguai	41	73
Nikaragua	56	81
Dominikar Errep.	56	81
Honduras	39	67
El Salvador	43	56
Bolivia	44	71

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 60.05 \\ 76.11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 268,96 & 127,68 \\ 127,68 & 135,02 \end{bmatrix}$$

Kobariantza-matrizeari dagozkion autobalioak ondokoak dira:

$$\lambda_1 = 346,161 \quad \lambda_2 = 57,815$$

- 1) Lor ezazu ongien doitzen den erregresio ortogonalaren zuzena.

7. Estatuko 9 komunitate autonomo handien X_1 , X_2 aldagaiak neurtu dira:
- X_1 harrapatutako kokaina kopurua, gramo / mila biztanletan.
 - X_2 harrapatutako heroina kopurua, gramo / mila biztanletan.

Datuak biribildu ondoren, ondoan ditugun posizioaren eta sakabanatzearen neurketa matritzialak lortu ditugu:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 50 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Aurkez itzazu grafikoki aldagaien balio zentratuen bektoreak, berauek dauden planoan, eta interpreta ezazu grafiko horretan aldagaien koerlazio-koefiziente lineala multzo horretarako.
 - 2) Lor ezazu ongien doitzen den doikuntza ortogonalaren zuzena. Zein da hondar-bariantzaren proportzioa?
8. Bost indibiduotan bi aldagairen datuak jasota ondoko estatistikoak lortu dira:

$$\bar{x}_1 = 10 \quad x_2 = 25 \quad S_{x_1}^2 = 120 \quad S_{x_2}^2 = 65$$

$$S_{x_1 x_2} \cong \frac{2\lambda_1 - \lambda_2}{5} \quad \lambda_1 = 160$$

non λ_1, λ_2 kobariantza-matrizearen autobalioak diren.

Honakoa eskatzen da:

- 1) Ongien doitzen den doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 2) Laugarren eta bosgarren indibiduen hondarrak eta proiektzioak, lehenengo hiru indibiduenak ondokoak direla jakinik.

$$\begin{array}{lll} e_1 = 2,2 & e_2 = 0,5 & e_3 = -1 \\ f_1 = 3 & f_2 = -2 & f_3 = 1 \end{array}$$

9. Estatuko zazpi probintzian X_1 (Ameriketara joandakoen kopurua / milaka biztante, 1885-86. urteetan) eta X_2 (errepideak egiten peoiei ordaindutako jornala, 1859. urtean) neurtu ditugu:

	X_1	X_2
Pontevedra	13,3	4,5
La Coruña	12,7	4,5
Oviedo	8,5	6
Santander	7,4	8
Bartzelona	3,8	8,5
Cadiz	2,7	7,5
Bizkaia	2,7	6

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 7,3 \\ 6,43 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 17,311 & -4,65 \\ & 2,245 \end{bmatrix}$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 2) Aldagai tipifikatuentzat doikuntza ortogonalaren zuzena.
- 3) Pontevedra eta Bartzelonari zuzenaren gainean dagozkien proiektzioak, 2) atalean atera dugun zuzenaren gainean.

10. Bost merkatal zentrotarako ondoko bi aldagaiak neurtu dira:

X: hileroko erosketen bolumena milioika pezetatan.

Y: hileroko sarreren bolumena milioika pezetatan.

X:	1	3	4	5	7
Y:	3	3	7	8	9

Honakoa eskatzen da:

- 1) Karratu txikien doikuntza ortogonalaren zuzena eta bere aurkezpen grafikoa puntu-hodeiaren irudian.
- 2) Bost merkatal zentrueri dagozkien proiektzioak (f_1 koordenatuak) eta hondarrak (f_2) doikuntza honekiko.
- 3) Doikuntza ortogonalaren zuzena aldagai tipifikatuetarako.
- 4) Konpara ezazu kasu bakoitzerako doikuntzaren egokitasuna.

11. Hurrengo taulan, E.E.E.ko 10 herrialde klasifikatu dira, bi aldagaien arabera:

X_1 : Herri horrek Espainiatik 1988 urtean inportatutako batezbesteko balioa biztanle bakoitzeko, milaka pezetatan.

X_2 : Herri horrek Espainiara 1988 urtean esportatutako batezbesteko balioa biztanle bakoitzeko, milaka pezetatan.

	X_1	X_2
Portugal	25,5	14,6
Belgika eta Luxenburgo	15,9	24
Beheko Herriak	15,8	16,8
Frantzia	15,6	17,1
Alemania	9,2	18,7
Britainia Haundia	8,1	8,8
Italia	7,9	11,8
Danimarka	6	10
Eire	5,8	13,4
Grezia	3,2	1,8

Eskatzen da:

- 1) Adieraz ezazu bi aldagaien balio zentratuen bektoreen arteko erlazioa.
 - 2) Lor ezazu D.O.Z.
 - 3) Lor eta adieraz itzazu, D.O.Z. eta hondar ardatzaren gain indibiduo eta aldagaien proiektzioak. Konproba itzazu propietateak.
 - 4) Lor ezazu ardatz bakoitzaren fidagarritasuna.
 - 5) Interpreta ezazu D.O.Z.
12. Izan bitez (X_1, X_2, X_3) hiru aldagai estatistiko m indibiduo dituen kolektibo batean neurturik. $X_2 = aX_1 + b$ eta $X_3 = cX_1 + d$, non a, b, c, d konstanteak diren, eta $a > 0$, $c < 0$ direla jakinik:

Eskatzen da:

- 1) Aurkez itzazu grafikoki (X_1, X_2) aldagaien balio normatuen bektoreak, alde batetik, eta (X_1, X_3) aldagaien balio normatuen bektoreak beste aldetik. Komenta itzazu lortutako grafikoak.
- 2) Aurkez itzazu batera (X_1, X_2, X_3) aldagaien balio normatuen bektoreak.

X_1, X_2, X_3 hiru aldagaien balioen $X_{(m \times 3)}$ matrizearen O.N.A. normatua eginik, eskatzen da:

- 3) Kalkula ezazu lehen ardatzaren fidagarritasuna eta baita ardatz horretan aldagai bakoitzaren aurkezpenaren fidagarritasuna edo kalitatea ere. Zure ustez, kasu honetan egokia edo interesgarria al da O.N.A. lortzea? Arrazona ezazu erantzuna.
 - 4) Era erraz batean atera ezazu lehen faktore-ardatzean aldagaien koordinatu edo proiektzioen bektorea.
13. Ondoko datu-matrizearen batezbesteko-bektorea, kobariantza-matrizea eta azkeneko honen λ_2 autobalioa jakinik:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 4$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Aurkez itzazu grafikoki, plano faktorial nagusia eta beronen gain proiektatutako errenkada-puntuen hodeia.
- 2) Zein da planoak jasotzen duen proiektatutako bariantzaren proportzioa?
- 3) Atera ezazu planoak puntu bakoitzaren posizioarekiko daukan ekarpen erlatiboa.

- 4) Aurkez ezazu, grafikoki, plano faktorial nagusian proiektatutako zutabe-puntuen hodeia.
- 5) Aurkez ezazu, grafikoki, bi hodeien baterako aurkezpen grafikoa.
- 6) X_1 ikusitako telefilmekopurua, X_2 ikusitako teleberrien kopurua eta X_3 ikusitako kirolen programen kopurua direla suposatuz, azal ezazu 5) atalean lortutako aurkezpen grafikoa bi faktoreen esangura azalduz.
14. Ondoko \mathbf{X} datu-matrizea, bere kobariantza-matrizea eta honen autobalioak jakinik

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 10 & 15 & 20 & 30 \\ 10 & 15 & 25 & 25 \\ 10 & 20 & 20 & 25 \\ 15 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 25 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 5$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor itzazu 5 indibiduoren koordenatuak lehen ardatz faktorialean λ_1 autobaliori dagokion bektore unitarioa $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ zutabe-bektorea dela jakinik.
 - 2) Lor itzazu, halaber, 4 aldagaien koordenatuak lehen ardatz faktorialean.
 - 3) Lor ezazu lehen ardatz faktorialaren bariantza-tasa, bere esangura adieraziz.
15. Ondoko lau probintzietarako, milaka milioi pezetatan, Balio Erantsi Gordinaren datuak ditugu:

	B.E.G.		
	Nekazaritza eta Arr.	Industria	Zerbitzuak
Almeria	38	21	81
Cadiz	37	121	205
Cordoba	28	60	132
Granada	25	46	83

Datu hauei dagozkien estatistiko batzuk ezaguturik:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 31,5 & 42,2 & 100,5 \\ 42,5 & 1355,5 & 1795,5 \\ 100,5 & 1795,5 & 2537,2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,20 & 0,36 \\ 0,20 & 1 & 0,97 \\ 0,36 & 0,97 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1(\mathbf{L}) = 3839,6 \quad \lambda_2(\mathbf{L}) = 70,6 \quad \lambda_3(\mathbf{L}) = 14$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Lor ezazu, X_2 , X_3 , azkeneko bi aldagaiei dagozkien aldagai tipifikatuentzat, doikuntza ortogonalaren zuzena, eta halaber, hondarren eta proiektzioen inertzia eta $\mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2$ balioa.
- 2) Lor itzazu lau indibiduoren koordinatuak, Osagai Nagusizko Analisiaren lehenengo bi ardatzen gain,

$$\mathbf{u}_1 = (0,03 \quad 0,59 \quad 0,81) \text{ eta}$$

$$\mathbf{u}_2 = (0,51 \quad -0,712 \quad 0,49)$$

zutabe-bektoreak jakinik.

Zein izango da (F_1, F_2, F_3) ardatzetan proiektatutako inertzia?

16. Ondoko datu-matrizea, dagokion koerlazio-matrizea eta aldagaien kobariantzak jakinik

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S_1^2 &= 0,1875 \\ S_2^2 &= 0,25 \\ S_3^2 &= 0,1875 \end{aligned}$$

Halaber, koerlazio-matrizearen autobalioak edo balio propioak ondokoak izanik:

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 0,66 = 2/3; \quad \lambda_3 = 0,33 = 1/3;$$

Honakoa eskatzen da:

- 1) Kalkula eta marraz ezazu, osagai nagusizko analisi normalizatuaren errenkada-puntuaren plano nagusia. Zein da plano horren bariantza-tasa edo inertzi-tasa?
- 2) Aurkez itzazu grafikoki 1) atalean kalkulaturako \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 bektoreak beroriek sorterazitako planoan.

17. Ondokoak,

X_1 = Langabezia populazio aktiboarekiko %-tan.

X_2 = Sarrerak/biztanle dolarretan.

X_3 = Urteroko demografi hazkundea/1.000 biztanle.

X_4 = Turismoaren sarrerak/biztanle, dolarretan.

aldagaiak izanik, 1987. urtean hurrengo 9 estatuetan balio hauek hartu zituzten:

	X_1	X_2	X_3	X_4
Portugal	8,1	1190	0,8	34,8
Espania	7,6	3510	1,2	85,5
Italia	7,2	3850	0,4	89,8
Erresuma Batua	6,0	6340	0,0	79,7
Frantzia	5,2	8260	0,3	68,1
Alemania	4,3	9580	-0,2	79,1
Suezia	2,2	10235	0,4	417,7
Noruega	1,3	9510	0,2	125,0
Suiza	0,4	12000	0,3	594,7

Datu hauentzat hurrengo koerlazio-matrizea lortu da:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0,93 & 0,47 & -0,75 \\ -0,93 & 1 & -0,62 & 0,68 \\ 0,47 & -0,62 & 1 & -0,08 \\ -0,75 & 0,68 & -0,08 & 1 \end{pmatrix}$$

eta lehenengo bi autobalioak $\lambda_1 = 2,8486$, $\lambda_2 = 0,936$, non dagozkien autobektore unitarioak hurrengoak diren:

$$\mathbf{u}_1^T = (-0,57, 0,58, -0,36, 0,46) \quad \mathbf{u}_2^T = (0,11, 0,08, -0,80, 0,56)$$

- 1) Indibiduo puntu-hodeiaren lehen eta bigarren ardatz nagusien gaineko \mathbf{f}_1 eta \mathbf{f}_2 zuzendu gabeko proiektzio edo koordinatuen bektoreak, eta halaber aldagai puntu-hodeiaren lehen ardatz nagusiaren gaineko proiektzioen bektorea, \mathbf{g}_1 , honakoak direla jakinik:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \begin{pmatrix} -0,82 & -0,14 \\ -0,74 & -0,45 \\ -0,44 & 0,08 \\ -0,10 & 0,37 \\ -0,04 & 0,18 \\ 0,26 & 0,51 \\ 0,55 & -0,29 \\ 0,38 & 0,15 \\ 0,95 & -0,42 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} -0,96 \\ 0,98 \\ -0,61 \\ 0,78 \end{pmatrix}$$

Kalkula ezazu aldagai puntu-hodei horren bigarren osagai nagusia, \mathbf{g}_2 .

Lor ezazu aldagai eta indibiduo puntuen baterako aurkezpen grafikoa, plano nagusian.

2) Iker ezazu planoaren doikuntzaren egokitasuna. Interpreta ezazu lehen plano nagusi hau, lehen ardatz nagusietan fidagarritasunak, ehunekotan, honakoak direlarik:

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%95 & \%3 \\ \%70 & \%26 \\ \%87 & \%3 \\ \%6 & \%82 \\ \%3 & \%58 \\ \%21 & \%78 \\ \%78 & \%21 \\ \%57 & \%8 \\ \%83 & \%16 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%92,16 & \%1,13 \\ \%95,39 & \%0,60 \\ \%36,8 & \%59,90 \\ \%60,32 & \%32,56 \end{pmatrix}$$

18. X datu-matrizea eta dagokion T datu-matrize tipifikatua, sei estatu garatutarako (EEUU, JAPN, ALEM, FRAN, ITAL, ERBA) eta lau aldagaitarako, hurrengoak dira:

X_1 = NPGren hazkuntza %tan, 1988. urtean (NPG).

X_2 = Barne-eskaria %tan, 1988. urtean (BES).

X_3 = Inflazioa %tan, 1988. urtean (INF).

X_4 = Merkatal Balantzaren Saldoa %tan, 1988. urtean (MBS).

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4,4 & 3,3 & 4,1 & -2,6 \\ 5,7 & 7,7 & 0,5 & 3,3 \\ 3,6 & 3,7 & 1,1 & 6,5 \\ 3,4 & 3,8 & 2,7 & -0,9 \\ 3,9 & 4,3 & 5,1 & -0,1 \\ 4,2 & 7,3 & 4,9 & -4,5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,27 & -0,97 & 0,57 & -0,79 \\ 2,00 & 1,50 & -1,44 & 0,82 \\ -0,80 & -0,74 & -1,10 & 1,67 \\ -1,07 & -0,68 & -0,21 & -0,32 \\ -0,40 & -0,40 & 1,13 & -0,10 \\ 0,00 & 1,28 & 1,02 & -1,31 \end{pmatrix}$$

Ondoko estatistikoak ezagutzen ditugu: koerlazio-matrizea eta beronen bi lehen autobalioei loturiko bi autobektore unitarioak.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,70 & -0,35 & 0,08 \\ 0,70 & 1 & -0,15 & -0,11 \\ -0,35 & -0,15 & 1 & 0,82 \\ 0,08 & -0,11 & -0,82 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,38 \\ -0,50 \\ 0,48 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -0,47 \\ -0,60 \\ -0,34 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

Badakigu, gainera, lehen ardatz faktorialaren gain proiektatutako inertzia %50,67a eta lehen planoan proiektatutakoa %89,79a direla.

Eskatzen da:

- 1) Lor itzazu λ_1 , λ_2 bi lehen autobalioak eta lehen planoaren bidez hodeiaren aurkezpenean egiten den errorea.
- 2) Sei indibiduoren eta X_3 , X_4 aldagaien koordinatuak bi lehen ardatz faktorialetan.
- 3) Indibiduo eta aldagaien baterako aurkezpen grafikoa eta planoaren interpretazioa, hurrengo aldagai-puntu eta indibiduo-puntuen ekarpen erlatiboak kontutan harturik.

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} (1 \text{ ardatza} & 2 \text{ ardatza}) \\ \%48 & \%1 \\ \%90 & \%9 \\ \%12 & \%85 \\ \%39 & \%37 \\ \%74 & \%0 \\ \%13 & \%77 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} (1 \text{ ardatza} & 2 \text{ ardatza}) \\ \%51,84 & \%34,81 \\ \%30,25 & \%57,76 \\ \%73,96 & \%14,49 \\ \%46,24 & \%46,24 \end{pmatrix}$$

19. Hurrengo taulan, Afrikako 7 herritan 1981 urteko hiru aldagai hauen datuak ditugu:

X_1 = B.P.G./biztanle dolarretan.

X_2 = jaiotze-tasa/1.000 biztanle.

X_3 = hilkortasun-tasa/1.000 biztanle.

Herriak	X_1	X_2	X_3
Etiopia	130	50	24
Tanzania	270	46	15
Uganda	290	45	14
Kenya	380	51	13
Egipto	460	37	12
Nigeria	670	50	17
Maroko	740	44	13

Hurrengo estatistikoak ezaguturik:

$$S_1 = 204,1 \quad S_2 = 4,52 \quad S_3 = 3,81 \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 420 \\ 46,14 \\ 15,43 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -0,19 & -0,49 \\ -0,19 & 1 & 0,54 \\ -0,49 & 0,54 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0,51 \\ -0,55 \\ -0,66 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,66 \\ 0,03 \end{pmatrix}$$

non \mathbf{u}_1 eta \mathbf{u}_2 , lehen eta bigarren autobalioa haundienei dagozkien \mathbf{R} koerlazio-matrizearen autobektore unitarioak diren. Gainera, $\lambda_1 = 1,8321$ eta $\lambda_3 = 0,3572$, koerlazio-matrizearen autobaliorik handiena eta txikiena dira.

- 1) Kalkula itzazu datu hauen O.N.A. **normatuari** dagokion lehen plano nagusiaren gaineko aldagai puntuen proiektzio edo koordinatuak.
- 2) Kalkula itzazu Uganda eta Kenya-ren proiektzioak edo koordinatuak lehen plano nagusiaren gain.
- 3) Beste herrien proiektzio edo koordinatu **zuzenduak**, ezaguturik,

$$[\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*] = \begin{pmatrix} -1,55 & -0,25 \\ -0,66 & -0,33 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 1,04 & -0,70 \\ -0,06 & 0,86 \\ 0,86 & 0,48 \end{pmatrix}$$

lor ezazu lehen plano nagusia, bi puntu hodeien, baterako aurkezpen grafikoa, plano honen doikuntzaren egokitasuna adieraziz.

- 4) Interpreta ezazu lehen plano nagusi hau, bi lehen ardatz nagusietako fidagarritasunak, ehunekotan, hurrengoak direlarik:

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} (1 \text{ ardatza} & 2 \text{ ardatza}) \\ \%92 & \%2 \\ \%15 & \%60 \\ \%1 & \%71 \\ \%5 & \%18 \\ \%66 & \%30 \\ \%1 & \%93 \\ \%71 & \%23 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} (1 \text{ ardatza} & 2 \text{ ardatza}) \\ \%47,6 & \%45,6 \\ \%55,4 & \%35,3 \\ \%79,8 & \%0,07 \end{pmatrix}$$

20. Ondoko taulak Sarrrikoko Ekonomia eta Enpresa Zientzien fakultateko 14 ikasleren emaitzak lau aldagairen arabera biltzen ditu 1992 urterako:

X_1 = Ikusitako filmen kopurua.

X_2 = Egondako kontzertuen kopurua.

X_3 = Irakurritako liburuen kopurua.

X_4 = Asteroko telebista ordu kopurua.

	X_1	X_2	X_3	X_4
Ikasle 1	20	5	6	2
Ikasle 2	2	1	0	11
Ikasle 3	25	2	7	12
Ikasle 4	15	2	3	4
Ikasle 5	20	2	6	10
Ikasle 6	2	10	0	20
Ikasle 7	1	2	1	4
Ikasle 8	0	4	2	14
Ikasle 9	2	12	1	18
Ikasle 10	5	3	0	15
Ikasle 11	8	6	3	15
Ikasle 12	10	3	4	8
Ikasle 13	10	2	7	14
Ikasle 14	0	0	3	15

Datu horien bidez O.N.A. normatua eginez, emaitza hauek ditugu: \mathbf{R} koerlazio-matrizea, \mathbf{R} -ren bi lehen autobalio eta autobektoreak, aldagaien koordinatuak lehen ardatz faktorialean, indibiduen eta hiru lehen aldagaien ekarpen erlatiboak edo fidagarritasunak lehen bi ardatz faktorialetan.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -0,22 & 1 & & \\ 0,81 & -0,33 & 1 & \\ -0,46 & 0,68 & -0,33 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2,337, \lambda_2 = 0,9680$$

$$\mathbf{u}_1^T = [-0,56, 0,40, -0,55, 0,47]$$

$$\mathbf{u}_1^T = [-0,44, -0,67, -0,41, -0,44]$$

$$\mathbf{g}_1^T = [-0,36, 0,61, -0,84, 0,72]$$

$$\text{indibiduoak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%68 & \%4 \\ \%19 & \%76 \\ \%70 & \%21 \\ \%58 & \%15 \\ \%86 & \%9 \\ \%84 & \%15 \\ \%0 & \%78 \\ \%75 & \%11 \\ \%68 & \%25 \\ \%58 & \%16 \\ \%45 & \%54 \\ \%76 & \%8 \\ \%31 & \%10 \\ \%7 & \%32 \end{pmatrix} \quad \text{aldagaiak} = \begin{pmatrix} \text{1 ardatza} & \text{2 ardatza} \\ \%74 & \%18 \\ \%37 & \%44 \\ \%71 & \%17 \\ - & - \end{pmatrix}$$

- 1) Froga ezazu, orokorrean, indibiduen osagai nagusiak (proiektzioak) lehen bi ardatzen gain aldagai-koerlazio gabeak direla.
 - 2) Kalkula ezazu g_2 bektorea. Lor zenezake 1,5 balioko lukeen osagaiaren bat? Zergatik?
 - 3) Lor itzazu laugarren aldagaien ikarpen erlatiboak edo fidagarritasunak eta aurkez itzazu plano nagusian, beste aldagai eta indibiduen proiektzioekin batera.
 - 4) Plano nagusian oinarrituz eta doikuntzaren egokitasunaz eta fidagarritasunaz lagunduz, burutu ezazu interpretazioa ahal duzun bezain sakonki eginez eta indibiduo guztiak behar den bezala proiektaturik dituzula kontutan hartuz.
21. Ondoko tauletan, 8 marka atletikoren denborak 22 europar estatutarako eta koerlazio-matrizea aurkezten dira.

M100 = 100 metro leun (segunduak).

M200 = 200 metro leun (segunduak).

M400 = 400 metro leun (segunduak).

M800 = 800 metro leun (minutuak).

K1,5 = 1500 metro leun (minutuak).

K5,0 = 5000 metro leun (minutuak).

K10 = 10000 metro leun (minutuak).

MART = Marathon (minutuak).

Datu-Taula

	M100	M200	M400	M800	K1,5	K5,0	K10	MART
Austria	10,44	20,81	46,82	1,79	3,60	13,26	27,72	135,90
Belgika	10,34	20,68	45,04	1,73	3,60	13,22	27,45	129,95
Txekia	10,35	20,65	45,64	1,76	3,58	13,42	28,19	134,32
Danimarca	10,56	20,52	45,89	1,78	3,61	13,50	28,11	130,78
Francia	10,11	20,38	45,28	1,73	3,57	13,34	27,97	132,30
RDA	10,12	20,33	44,87	1,73	3,56	13,17	27,42	129,92
RFA	10,16	20,37	44,50	1,73	3,53	13,21	27,61	132,23
Grezia	10,22	20,71	46,56	1,78	3,64	14,59	28,45	134,60
Hungria	10,26	20,62	46,02	1,77	3,62	13,49	28,44	132,58
Irlanda	10,61	20,96	46,30	1,79	3,56	13,32	27,81	132,35
Italia	10,01	19,72	45,26	1,73	3,60	13,23	27,52	131,08
Luxembur	10,35	20,77	47,40	1,82	3,67	13,64	29,08	141,27
Holanda	10,52	20,95	45,10	1,74	3,62	13,36	27,61	129,02
Noruega	10,55	21,16	46,71	1,76	3,62	13,34	27,69	131,48
Polonia	10,16	20,24	45,36	1,76	3,60	13,29	27,89	131,58
Portugal	10,53	21,17	46,70	1,79	3,62	13,13	27,38	128,65
Rumania	10,41	20,98	45,87	1,76	3,64	13,25	27,67	132,50
España	10,42	20,77	45,98	1,76	3,55	13,31	27,73	131,57
Suedia	10,25	20,61	45,63	1,77	3,61	13,29	27,94	130,63
Suiza	10,37	20,46	45,78	1,78	3,55	13,22	27,91	131,20
Turquia	10,71	21,43	47,60	1,79	3,67	13,56	28,58	131,50
URSS	10,07	20,00	44,60	1,75	3,59	13,20	27,53	130,55

Datu hauen bidez O.N.A. normatua egin ondoren, ondoko emaitzak lortu ditugu: lehen bi autobalioak eta aldagai eta indibiduo guztien proiektzioak (indibiduenak $\sqrt{\frac{22}{8}}$ balioaz zuzenduak) lehen biardatz faktorialetan, eta halaber indibiduen fidagarritasunak ardatz horietan.

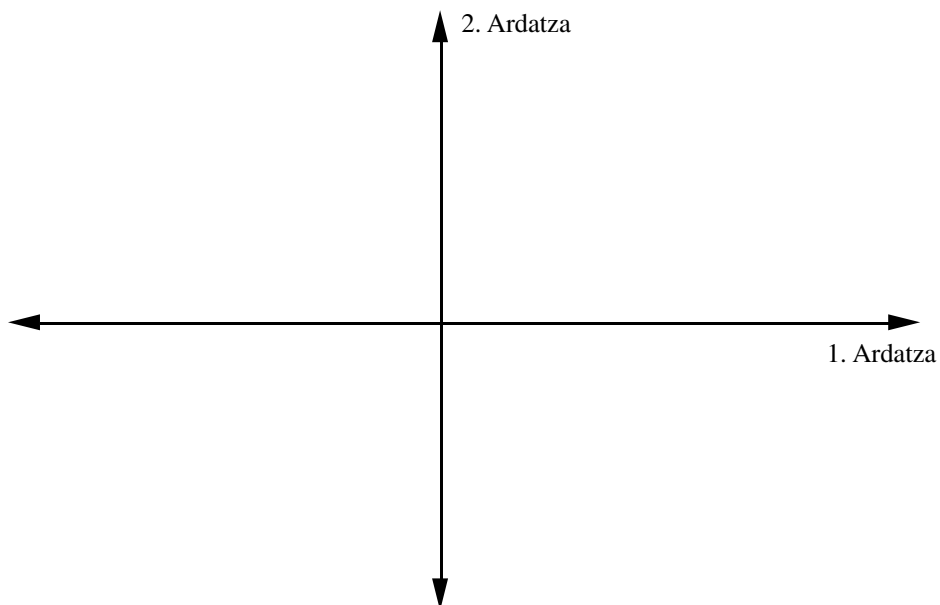
$$\lambda_1 = 4,3334, \lambda_2 = 1,7789 \quad [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \begin{pmatrix} (1 \text{ ardatza} & 2 \text{ ardatza}) \\ -0,63 & -0,72 \\ -0,70 & -0,63 \\ -0,93 & -0,15 \\ -0,87 & -0,03 \\ -0,73 & 0,05 \\ -0,57 & 0,50 \\ -0,78 & 0,49 \\ -0,60 & 0,59 \end{pmatrix}$$

	(1 ardatza	2 ardatza)		(1 ardatza	2 ardatza)
$[\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*] =$	-0,50	-0,10	indibiduoak =	%37	%2
	0,63	-0,30		%64	%14
	-0,06	0,20		%2	%28
	-0,28	-0,13		%23	%5
	0,61	0,40		%58	%25
	1,06	0,04		%98	%0
	1,03	0,21		%81	%3
	-0,99	0,94		%35	%31
	-0,31	0,34		%31	%38
	-0,32	-0,49		%15	%35
	1,00	0,54		%63	%18
	-1,73	0,91		%71	%20
	0,24	-0,51		%9	%44
	-0,38	-0,58		%25	%58
	0,40	0,31		%49	%31
	-0,27	-0,94		%6	%76
	-0,16	-0,30		%8	%28
	0,18	-0,27		%11	%23
	0,11	0,01		%11	%0
	0,21	-0,08		%12	%2
-1,43	-0,53	%81	%11		
0,95	0,34	%79	%10		

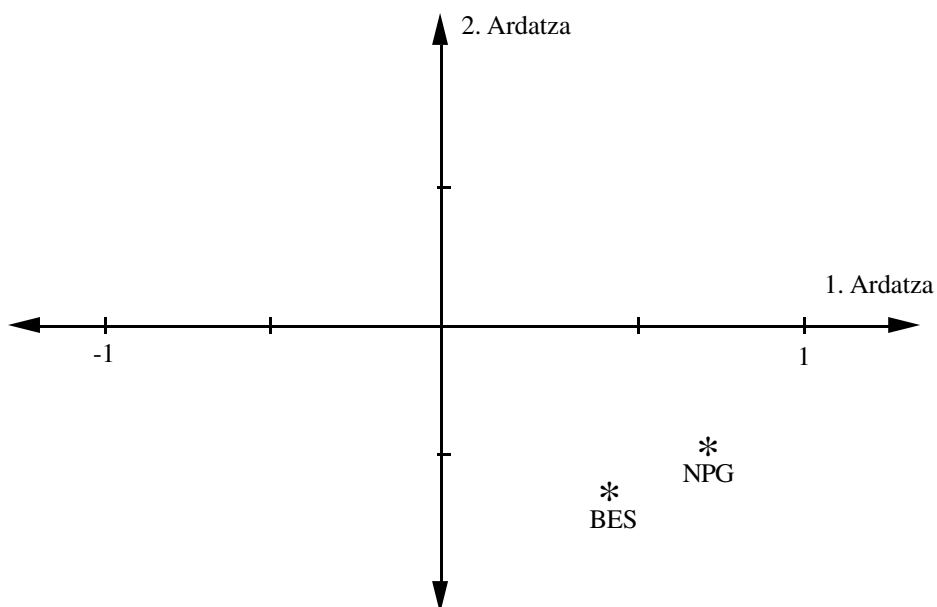
- 1) Komenta ezazu, (1,2) plano nagusian Italia eta aintzinako R.D.A.ko puntuazioek daukaten fidagarritasuna ardatz bakoitzarekiko bi indibiduo hauen desberdintasunak aztertuz.
- 2) Azal ezazu, lehen ardatzarekiko Suediaren fidagarritasuna lortzeko egin den kalkulia. Kalkula ezazu, indibiduo honek jatorrira daukan distantzia indibiduo-hodeiaren R^8 espazioan. Komenta ezazu lortutako emaitza.
- 3) Interpreta ezazu plano nagusiaren baterako aurkezpen grafikoa, ardatz bakoitzaren azalpena adieraziz. Adieraz ezazu punturik errepresentagarrienak, eta halaber, hodeiaren inertziatik planoan proiektatutako proportzioa.

PLANO NAGUSIAK (1,2)

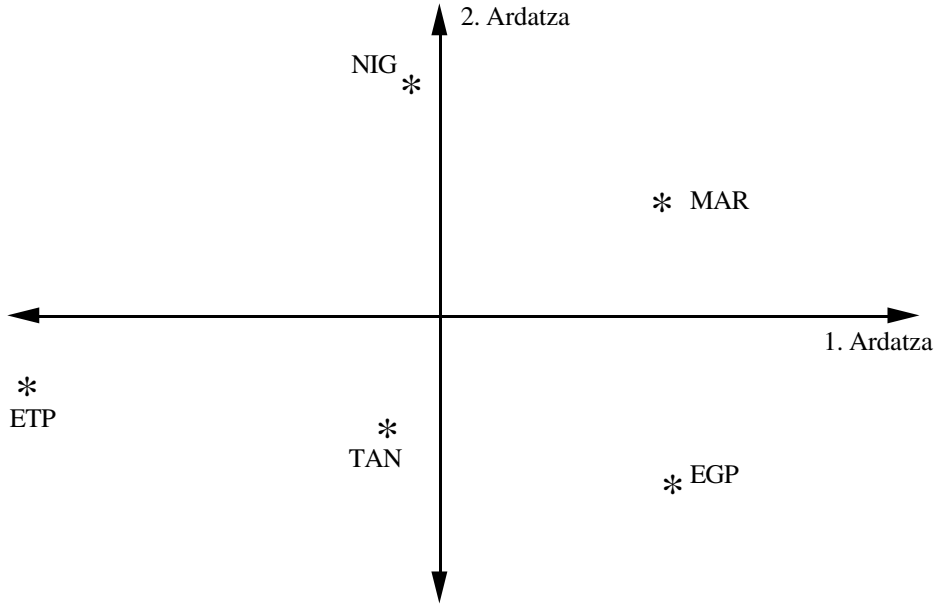
17.



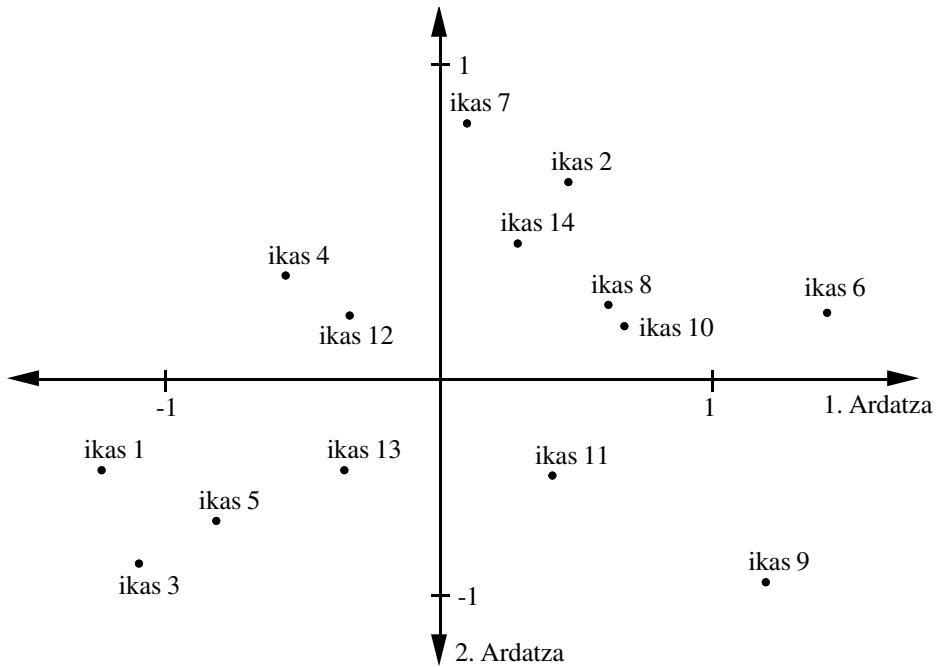
18.



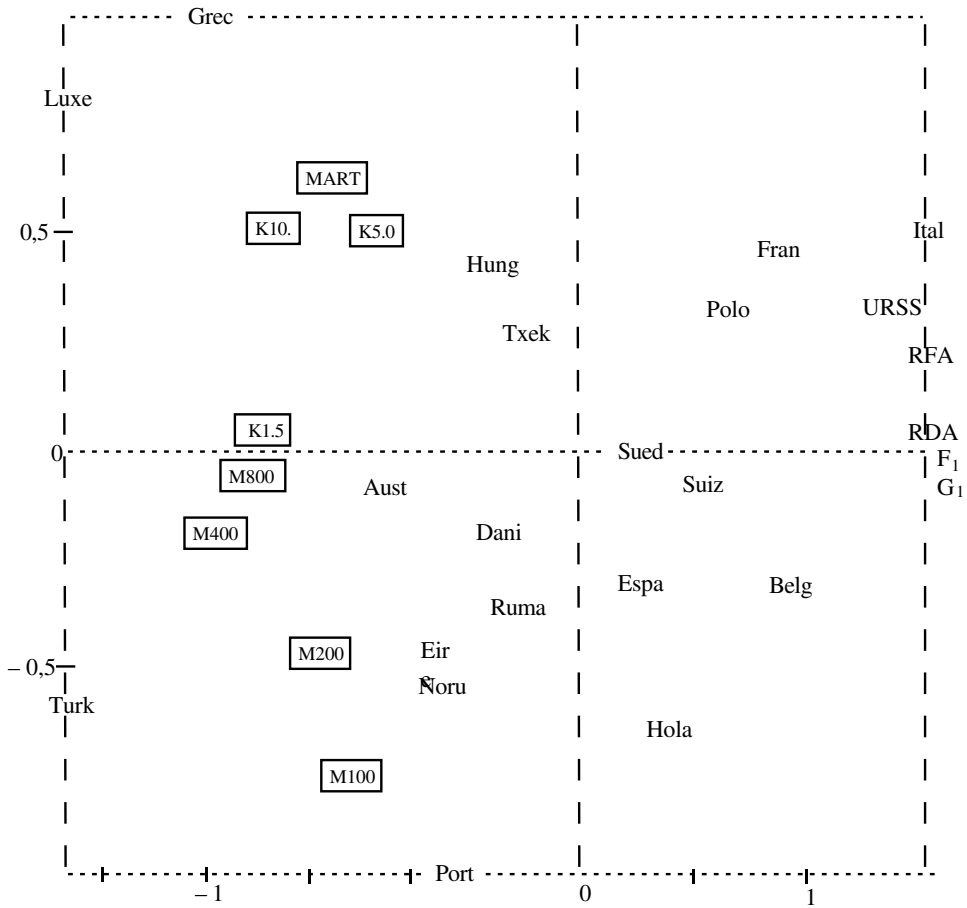
19.



20.



21.



GALDERA-SORTAK

GALDERA-SORTA 1

1. Populazio-piramidean aurkezten duguna honako hau da:

- A) Populazioaren bi sektore-grafiko, adina eta sexuaren arabera.
- B) Populazioaren bi histograma, adina eta sexuaren arabera.
- C) Populazioaren histograma, adina eta sexuaren arabera.
- D) Populazioaren bi barra diagrama, adina eta sexuaren arabera.
- E) Dena gezurrezkoa.

2 eta 3 galderak ondoko taula estatistikoari dagozkio:

x_i	n_i
-5	1
-3	2
0	4
3	5
5	4

2. Batezbesteko aritmetikoaren balioa izango da:

- A) 5
- B) 10
- C) 0
- D) -5 eta 5 tartean.
- E) 5 baino handiagoa.

3. Balio modala hauxe izango da:

- A) 3
- B) 1,5
- C) 3,5
- D) -5
- E) 0

4. Zein adierazpen dagokio edozein X aldagaiaren bariantzari?

- A) $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i$
- B) $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i - \bar{x}^2$
- C) $\sqrt{a_2 - \bar{x}^2}$

$$D) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})n_i$$

E) Dena gezurrezkoa.

5. X aldagaiaren bidez Y aldagaia honela definituz; $Y = 2X + 3$, $g_1(y)$ asimetri koefizientea da:

A) $g_1(x)$

B) $2g_1(x) + 3$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $-g_1(x)$

E) $2g_1(x)$

6. $Y = aX + b$ transformazio lineala eginez, batezbesteko aritmetikoan:

A) (a) eta (b), parametro biek daukate eragina.

B) Bakarrik, eskala edo unitate aldatze (a) parametroak dauka eragina.

C) (a) eta (b), parametroek ez daukate eraginik.

D) Bakarrik, traslazio edo jatorri aldatze (b) parametroak dauka eragina.

E) Bakarrik, (a) parametroaren zeinuak dauka eragina.

7. X aldagaiaren indize sinpleak ehunekotan $I_{t,t-10}$, $I_{t,t-5}$, $I_{t-5,t-10}$ izendatuz, ondoko erlazioetatik, zein da egiazkoa? (bigarren azpindizeak oinarri-denbora adierazten du).

A) $I_{t,t-10} = \frac{x_t - 10}{x_t} \cdot 100$

B) $I_{t,t-10} = I_{t,t-5} + I_{t-5,t-10}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $I_{t,t-10} = \frac{I_{t,t-5}}{I_{t-5,t-10}} \cdot 100$

E) $I_{t,t-10} = \frac{I_{t,t-5} \cdot I_{t-5,t-10}}{100}$

8. Paasche-ren prezio indizeari buruz, ondoko zein baieztapen da egiazkoa?

A) Laspeyres-en prezio-indizearekin bateragarria da.

B) Paasche-ren kantitate-indizearekin bateragarria da.

C) Prezio-indize sinpleen batezbesteko ponderatu bezala adieraz daiteke, $(p_{io}k_{it})$ ponderazioak izanik.

D) Kantitate-indize sinpleen batezbesteko ponderatu bezala adieraz daiteke, $(p_{io}k_{it})$ ponderazioak izanik.

E) Dena gezurrezkoa.

9. X aldagai estatistikoaren Gini-ren indizea, kolektibo batean, 0,125 izango balitz, esan genezake:
- A) Gini-ren indizeak ezin du 0,3 baino gutxiago balio.
 - B) Lorenz-en kurba diagonal nagusitik hurbil egongo da uniformetasun-maila altua baita.
 - C) Lorenz-en kurba diagonal nagusitik hurbil egongo da, kontzentrazio-maila altua baita.
 - D) Lorenz-en kurba diagonal nagusitik urrun egongo da.
 - E) Dena gezurrezkoa.
10. Herri baten famili-errenten banaketaren Gini-ren indizea I_G izanik, gamili bakoitzeko errenta 3 bider biderkatzen bada (I'_G) indize berria, hauxe izango da:
- A) $I'_G = 3 I_G$
 - B) $I'_G = I_G$
 - C) $I'_G = I_G + 3$
 - D) $I'_G = I_G - 3$
 - E) $I'_G > I_G$

11. galdera ondoko maiztasun-taula bikoitzari dagokio:

X/Y	6	5
1	3	5
3	6	10

11. Taula ikusirik nola esango zenuke banatzen direla X, Y kolektibo horretan?
- A) Menpekoak dira, menpekotasuna ahula eta zuzena izanik.
 - B) Independentak dira.
 - C) Menpekoak dira, menpekotasuna ahula eta alderantzizkoa izanik.
 - D) Menpekoak dira, menpekotasuna sakona eta zuzena izanik.
 - E) Menpekoak dira, menpekotasuna sakona eta alderantzizkoa izanik.
12. X, Y aldagaien arteko $\hat{y}(x)$ eta $\hat{x}(y)$ karratu txikiaren erregresio linealak eginik, lortzen ditugun zuzenak malda positiboa daukate eta beraien arteko angelua 5° -takoa da. Nolakoa izango da koerlazio-koefizientea?
- A) $r_{xy} \sim -1$
 - B) $r_{xy} \sim 0$
 - C) $r_{xy} \sim 1$
 - D) $r_{xy} \sim 0,5$
 - E) Dena gezurrezkoa.

13. (X,Y) aldagai bikoitzaren datu multzo baterako Y aldagaiaren X aldagaia-
rekiko karratu txikiaren doikuntza lineala $\hat{y} = \bar{y}$ bada, esan dezakegu:
- A) $r_{xy} = -1$
 B) $r_{xy} = 0$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) $r_{xy} = 0,5$
 E) $r_{xy} = 1$
14. X , Y koerlazio gabeko bi aldagai izanik, (S_{x+y}^2) baturaren bariantza:
- A) $\frac{S_{xy}^2}{S_x^2 + S_y^2}$
 B) $S_x^2 + S_y^2$
 C) $S_x + S_y + 2s_{xy}$
 D) $S_{xy}^2(S_x^2 + S_y^2)$
 E) Dena gezurrezkoa.
15. Y batezbestekoaren X-ekiko erregresio enpirikoan, x_i balio bakoitzari
dagokion \hat{y}_i balio estimatua izango da:
- A) $\hat{y}_i = \bar{y}$
 B) $\hat{y}_i = \bar{y} / X = x_i$
 C) $\hat{y}_i = \sum_1 \bar{y} / X = x_i$
 D) $\hat{y}_i = \bar{y}^2$
 E) $\hat{y}_i = \bar{y} + \bar{x}$
16. X, Y aldagai zentratuak ez tipifikatuak izanik, Y aldagaiaren X aldagaia-
rekiko karratu txikiaren erregresio lineala (K.T.E.L.) hau da:
- A) $\hat{y} = S_{xy}x$
 B) $\hat{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}x$
 C) $\hat{y} = r_{xy}x$
 D) $\hat{y} = \frac{S_{xy}}{S_y^2}x$
 E) Dena gezurrezkoa.

17. Y-ren X-ekiko K.T.E.L.ean:

A) $S_y^2 + \frac{S_e^2}{S_y^2} = 1$

B) $S_y^2 = S_y^2 + S_e^2$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $S_y^2 + S_e^2 = 1$

E) $S_y^2 + \frac{S_e^2}{S_x^2} = S_y^2$

18. (r_{xy}^2) mugatze-koefizientearen eta K.T.E.L.ean lortutako (b_{xy} eta b_{yx}) erregresio-koefizienteen arteko erlazioa hauxe da:

A) $r_{xy}^2 = 2b_{xy}b_{yx}$

B) $r_{xy}^2 = b_{xy}b_{yx}$

C) $r_{xy}^2 = \sqrt{b_{xy}b_{yx}}$

D) $r_{xy}^2 = \frac{b_{xy}b_{yx}}{2}$

E) Dena gezurrezkoa.

19. $U = 4X + 9$, $V = 5Y + 4$ aldagaien aldaketak eginez:

A) $r_{uv} = 16r_{xy}$

B) $r_{uv} = r_{xy}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $r_{uv} = 20r_{xy} + 36$

E) $r_{uv} = 20r_{xy}$

GALDERA-SORTA 2

1. Ezaugarri kuantitatibo diskretu batentzat adierazpide grafiko egokiena izango da:

A) Barra-diagrama.

B) Histograma.

C) Grafiko sektoriala.

D) Populazio-piramidea.

E) Dena gezurrezkoa.

2. Hurrengo adierazpenetatik zein da X aldagaiaren batezbestekoa adierazten duena?

A) $a_2 - S_x^2$

B) $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^m x_i f_i$

C) $S_x^2 - a_2$

D) $\sum_{i=1}^m x_i f_i$

E) $\sum_{i=1}^m x_i n_i$

3. Ikasgela bateko ikasleen altueraren mediana 1,65 m bada, zera esan dezakegu:

A) Ikasgelako ikasle erdiak 1,50 m baino gehiago neurtzen du.

B) Ikasgelako ikasle erdiak 1,65 m neurtzen du.

C) 1,65 m da gehien errepikatzen den neurria.

D) Ikasgelako ikasle erdiak 1,80 m baino gehiago neurtzen du.

E) Dena gezurrezkoa.

4. Baldin $a_2(x) = 30$ eta $a_1(x) = 5$, orduan:

A) $S_x = 2,236$

B) $S_x = -2,236$

C) $g_0(x) = 1$

D) $\bar{x} = 2,236$

E) Dena gezurrezkoa.

5. Kurtosi-koefizientea, $g_2(x) = \frac{m_4(x)}{S_x^4} - 3$ bezala definiturik, -0,5 balioa hartzen duenean, zera esango dugu: banaketa

A) Banaketa normala baino zapalagoa da.

B) Banaketa normala baino zorrotzagoa da.

C) Banaketa ez da normala baino zapalagoa.

D) Kurtosi koefizienteak ezin du balio negatiborik hartu.

E) Banaketa normalaren berdina da.

6. $Y = -5X + 3$ aldaketa egiten badugu, Y aldagaiaren desbidazio tipikoa izango da:
- A) $S_y = -5S_x$
 - B) $S_y = 5S_x$
 - C) $S_y = 25S_x^2$
 - D) $S_y = 25S_x$
 - E) Dena gezurrezkoa.
7. Enpresa batean langile bakoitzaren alokairua 25.000 pezetatan handitzen bada, I_G berria izango da:
- A) Lehengokoarekin konparatuz handiagoa izango da.
 - B) Lehengokoarekin konparatuz txikiagoa izango da.
 - C) Konstante mantenduko da.
 - D) Lehengoa 25 bider izango da
 - E) Dena gezurrezkoa.
8. X aldagaiaren banaketaren kontzentrazio-maila neurtu nahi badugu, eta hurrengo portzenai metatuak baditugu, $P_1 = 25$, $Q_1 = 30$, hurrengo komentarioetatik zeinekin egongo zinateke ados?
- A) Gutxien irabazten duten indibiduoetatik gutxienez % 25ari, banaketa honen masa osoaren % 30a dagokio.
 - B) Multzo honetako % 30ak, masa osoaren % 25a du.
 - C) Multzo honetako % 25ari, masa onsoaren % 70a dagokio.
 - D) Inoiz ez dugu horrelako portzentai metaturik lortuko.
 - E) Masa osoaren banaketa oso uniforme da.
9. Enpresa batek azken 10 urteotan produzitutako 5 ondasunen kantitateen datuak bakarrik ditugu. Enpresa honen produkzioaren eboluzioa ikertzeko, zein indize erabiliko zenuke?
- A) Indize simple ponderatu bat.
 - B) Indize konplexu ponderatu bat.
 - C) Paasche-ren indize konplexua.
 - D) Laspeyres-en indize konplexua.
 - E) Kasu honetan zenbaki-indizeak erabiltzea ez da egokia.
10. Izan bedi $I_{88,80} = 114$ produktu baten prezio-indize sinplea. Orduan, produktu honen prezioa 1980. eta 1988. urte bitartean igo egin da honako **urteroko batezbesteko tasa metatuan**:

A) $\alpha = 14\%$

B) $\alpha = \left(\sqrt[8]{\frac{114}{100}} - 1 \right) 100\%$

C) $\alpha = \left(\frac{14}{8} \right) \%$

D) $\alpha = \left(\sqrt[8]{\frac{114}{100}} - 1 \right) 100\%$

E) Ondasun honen prezioa ez da 1980 eta 1988 urte bitartean handitu.

11. Hurrengo $X = 2U + 8$ eta $Y = 6V - 3$ izanik, orduan:

A) $S_{xy} = 12S_{uv}$

B) $S_{xy} = S_{uv}$

C) $S_{xy} = 8S_{uv}$

D) $S_{xy} = S_{uv}^2$

E) Dena gezurrezkoa.

12. Izan bedi X aldagaia, Y , Z aldagaiekin koerlazio gabea, orduan, X , Y , Z -ren edozein konbinazio linealaren arteko kobariantza izango da:

A) $S_{x,ay+bz+c} = S_x + S_{ay+bz+c}$

B) $S_{x,ay+bz+c} = 0$

C) $S_{x,ay+bz+c} = 1$

D) $S_{x,ay+bz+c} = aS_{xy} + bS_{xz} + c$

E) Dena gezurrezkoa.

13. Karratu txikieneko doikuntza linealean zera minimizatu nahi dugu:

A) $\sum_{ij} (y_j - \hat{y}_i) f_{ij}$

B) $\sum_{ij} (y_j - \hat{y}_i)^2$

C) $\sum_{ij} (y_j - \hat{y}_i)^2 f_{ij}$

D) $N \sum_{ij} (y_j - \hat{y}_i)^2$

E) $N \sum_{ij} (y_j - \hat{y}_i)$

14. $r_{xy} = 0$ izanik, X aldagaiaren Y-rekiko karratu txikiaren doikuntza lineala izango da:
- A) $\hat{x} = 0,5y$
 - B) $\hat{x} = \bar{y}$
 - C) $\hat{x} = \sqrt{\bar{x}}$
 - D) $\hat{x} = \bar{x}^2$
 - E) Dena gezurrezkoa.
15. Y-ren X-ekiko karratu txikiaren doikuntza lineala egitean bakoitzen aldagai tipifikatuekin,
- A) $\hat{T}_y = S_{xy} T_x$
 - B) $\hat{T}_y = r_{xy} T_x$
 - C) $\hat{T}_y = r_{xy}^2 T_x$
 - D) $\hat{T}_y = \frac{1}{r_{xy}} T_x$
 - E) Dena gezurrezkoa.
16. X-ren Y-rekiko karratu txikiaren erregresio linealeko mugatze-koefizienteak, r_{xy}^2 , eta Y-ren X-ekiko karratu txikiaren erregresio linealaren mugatze-koefizienteak, r_{yx}^2 , hurrengo erlazioa dute:
- A) $r_{xy}^2 = r_{yx}^2$
 - B) $r_{xy}^2 = \frac{1}{r_{yx}^2}$
 - C) $r_{xy}^2 = S_x^2 \frac{1}{r_{yx}^2}$
 - D) $S_{xy}^2 = S_y^2 \frac{1}{r_{yx}^2}$
 - E) Dena gezurrezkoa.
17. Y-ren X-ekiko karratu txikiaren erregresio linealean, hondar-bariantza izango da:
- A) $S_e^2 = S_x^2 (1 - r_{xy}^2)$
 - B) $S_e^2 = S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$

$$C) S_e^2 = \sqrt{S_x^2(1 - r_{xy}^2)}$$

$$D) S_e^2 = S_y(1 - r_{xy}^2)$$

E) Dena gezurrezkoa.

18. Hurrengo datu taulan:

- A) X, Y independenteki banatuta daude multzo honetan
- B) Menpekotasuna osoa, lineala eta zuzena da.
- C) Menpekotasuna osoa, lineala eta alderantzizkoa da.
- D) Menpekotasuna sakona, lineala eta zuzena da.
- E) Menpekotasuna sakona, lineala eta alderantzizkoa da

X/Y	6	5
1	3	0
3	0	2

19. X = lan egindako orduak eta Y = lortutako produkzioa, aldagaien hurrengo datuak izanik, Y aldagaiaren X aldagaiarekiko menpekotasuna izango da:

- A) Osoa, lineala eta zuzena.
- B) Osoa, lineala eta alderantzizkoa.
- C) Sakona, lineala eta zuzena.
- D) Sakona, lineala eta alderantzizkoa.
- E) Dena gezurrezkoa.

X	Y
1	2
1	4
3	6
6	8
5	10
7	12

GALDERA-SORTA 3

1. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio anizkoitzarako, zein da egiazkoa ondoko adierazpenetatik:

A) $S_{x_1}^2 = S_{x_2}^2 + S_{x_3}^2 + S_e^2$

B) $S_{\hat{x}_1}^2 = S_{x_1x_2} + S_{x_1x_3}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $S_{x_1}^2 = S_{\hat{x}_1}^2 + S_e^2$

E) $S_e^2 = S_{x_1}^2 + S_{\hat{x}_1}^2$

2. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ eta $\hat{X}_2(X_1, X_3)$ erregresio anizkoitzerako, zein ez litzateke posible izango ondoko emaitzetatik?

A) $\beta_{12} = 0,5$ $\beta_{21} = 0,5$

B) $\beta_{12} = 1,5$ $\beta_{21} = -1,5$

C) $\beta_{12} = 0,8$ $\beta_{21} = 1,2$

D) $\beta_{12} = -0,1$ $\beta_{21} = -0,2$

E) $\beta_{12} = 0$ $\beta_{21} = 0$

3. $\hat{X}_3(X_1, X_2, X_4)$ erregresio anizkoitzarako, ondoko emaitzak lortu dira: $\beta_{31} = 0,45$, $\beta_{32} = -0,67$, $\beta_{34} = -0,98$; zein da egiazkoa ondoko baieztapenetatik?

A) X_1 erregresoreak erlatiboki, indar handiena dauka erregresio honetan.

B) X_4 erregresoreak erlatiboki, indar txikiena dauka erregresio honetan.

C) X_4 erregresoreak erlatiboki, indar handiena dauka erregresio honetan.

D) Emaitzak ez dira zuzenak hiru koefiziente hauek zeinu berdina eduki behar dutelako.

E) Dena gezurrezkoa.

4. Ondoko adierazpenetatik, zein da $r_{1,234}$ -ren kalkuluari dagokiona?

A) $\sqrt{1 - \frac{|R|}{R_{11}}}$

B) $\sqrt{1 - \frac{|L|}{L_{11}}}$

C) $1 - \frac{|L|}{L_{11}}$

$$D) 1 - \frac{|L|}{l_{11}L_{11}}$$

E) Dena gezurrezkoa.

5. (X_1, X_2, X_3) aldagai hirukoitzerako, zenbat balioko du $|R|$ determinanteak $S_1^2 = 25$, $S_2^2 = 36$, $S_3^2 = 16$ eta $|L| = 1440$ direla jakinik?

A) $-0,1$

B) $0,1$

C) Dena faltsua, emandako datuekin ezin da kalkulatu.

D) 10

E) 20736000

6. Zein izango da ondoko datuetatik, A_L (L matrizearen adjuntuen matrizea) osotuko duen datua $b_{13} = 0,833333$ dela jakinik?

$$A_L = \begin{pmatrix} 12 & -17 & ? \\ & 32 & 25 \\ & & 47 \end{pmatrix}$$

A) -10

B) 20

C) 0

D) 10

E) 35

7. Zein bi aldagaien artekoa da koerlazio-koefiziente totala, $r_{12,3}$ koerlazio-koefiziente partziala?

A) $\hat{X}_1(X_3)$ eta $\hat{X}_2(X_3)$ erregresioen hondarren artean.

B) X_3 aldagaien balio estimatuen artean, $\hat{X}_3(X_1)$ eta $\hat{X}_3(X_2)$ erregresioetan.

C) X_1 eta X_2 aldagaien konbinazio lineal hoberena, alde batetik, eta X_3 aldagaia bestetik.

D) X_1 eta X_2 aldagaien balio estimatuen artean $\hat{X}_1(X_3)$ eta $\hat{X}_2(X_3)$ erregresioetan.

E) $\hat{X}_3(X_1)$ eta $\hat{X}_3(X_2)$ erregresioen hondarren artean.

8. (X_1, X_2, X_3) aldagai hirukoitzerako $L_{13} = 0$ baldin bada, zein izango da $r_{13,2}$ koefizientearen balioa?

A) L_{13} baino txikiago.

B) Negatiboa.

C) L_{13} baino txikiago.

D) 0

E) Datuak ez dira nahikoak.

GALDERA-SORTA 4

1. Aldagai kualitatiboaren banaketaren sektore-grafikoan daukagun kategoriatan baten sektorerik handiena izango da:
 - A) Dagokion maiztasun absolutu metatua, handiena duena.
 - B) Dagokion maiztasun erlatibo metatua, handiena duena.
 - C) Dagokion maiztasun absolutua, handiena duena.
 - D) Nahitaez sektore guztiak zabalera berdinekoak izango dira.
 - E) Dena gezurrezkoa.

2. Aldagai jarraia, tarteka taldekatua eta modabakar baten moda, edozein kasutan egongo da:
 - A) Erdiko tartearen barnean.
 - B) Zabalera handieneko tartearen barnean.
 - C) Maiztasun absolutu handieneko tartearen barnean.
 - D) Maiztasun erlatibo handieneko tartearen barnean.
 - E) Dena gezurrezkoa.

- 3 eta 4 galderak, ondoko adierazburuari dagozkie:**
Enpresa bateko langile bakoitzari % 9 batean igotzen bazaio soldata,

3. Bariantzaren arabera, batezbestekoarekiko sakabanatzea:
 - A) Berdin mantenduko da.
 - B) Neurri txiki batean, igoko da.
 - C) Neurri txiki batean, jeitsiko da.
 - D) Bikoiztuko da.
 - E) Dena gezurrezkoa.

4. Igoera honekin, alokairu-masaren banaketa enpresan:
 - A) Lehen baino zertxobait uniformeagoa izango da.
 - B) Lehen baino zertxobait kontzentratuagoa izango da.
 - C) Berdin geratuko da.
 - D) Guztiz uniformeagoa izango da.
 - E) Dena gezurrezkoa.

5. Izan bitez ondasun baten prezio-indize sinpleak: $I_{85,80} = 120$ eta $I_{88,80} = 114$. Balio hauen arabera, ondoko zein baitezpaten da egiazkoa?
 - A) Ondasunaren prezioa %6an igo da 1985-1988 urte tartean.
 - B) Ondasunaren prezioa %6an jeitsi da 1985-1988 urte tartean.
 - C) Ondasunaren prezioa %5ean igo da 1985-1988 urte tartean.

- D) Ondasunaren prezioa %5ean jeitsi da 1985-1988 urte tartean.
E) Dena gezurrezkoa.
6. Zein indize-mota dagokio K.P.I. (Kontsumo Prezioen Indizea)-ri?
- A) Paasche-ren prezio-indizea.
B) Fisher-en kopuru-indizea.
C) Laspeyres-en prezio-indizea.
D) Batezbesteko agregatuaren indizea.
E) Dena gezurrezkoa.
7. Y aldagaiaren X aldagaiarekiko batezbestekoaren erregresioan, x_i balio bakoitzari honako hau dagokio:
- A) Y aldagaiaren batezbestekoa.
B) Y aldagaiaren x_i balioari baldintzatutako batezbesteko balioa.
C) X aldagaiaren y_i balioari baldintzatutako batezbesteko balioa.
D) Y aldagaiaren baliorik handiena.
E) Dena gezurrezkoa.
8. $\hat{X}(Y)$ K.T.E.L.a suposatuz, \hat{x}_i balio estimatuen aldakuntza-koefizientea, edozein kasutan, izango da:
- A) $g_0(\hat{x}) = g_0(x)$
B) $g_0(\hat{x}) = \frac{\sqrt{S_x^2 - S_e^2}}{\bar{x}}$
C) $g_0(\hat{x}) = \frac{S_x^2 - S_e^2}{\bar{x}}$
D) $g_0(\hat{x})$ ezin da kalkulatu.
E) Dena gezurrezkoa.
9. $\hat{X}_1(X_2)$ erregresio linealerako, $b_{12} = 2$ dela dakigu. Zein izango da $\hat{Z}_1(Z_2)$ erregresio-koefizientearen balioa, $Z_1 = X_1$ eta $Z_2 = 2X_2$ baldin badira?
- A) $2b_{12}$
B) $\frac{b_{12}}{2}$
C) b_{12}^2
D) b_{12}
E) Dena gezurrezkoa.

10. $\hat{X}_1(X_2, \dots, X_N)$ erregresio anizkoitzaren kasurako, ondoko propietateetatik, zein da zuzena?
- $S_{e, \hat{x}_1} \neq 0$
 - $S_{e, x_1} = 0$
 - $S_{x_1, \hat{x}_1} = 0$
 - $S_{e, \hat{x}_1} = 0$
 - Dena gezurrezkoa.
11. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio anizkoitzerako $r_{1,23} = 0,6$ lortu da, honek esan nahi du:
- $S_e^2 > S_{\hat{x}_1}^2$
 - $S_e^2 = S_{x_1}^2$
 - $S_{\hat{x}_1}^2 > S_{x_1}^2$
 - $S_{\hat{x}_1}^2 > S_e^2$
 - Dena gezurrezkoa.
12. Aukera ezazu ondoko datuen **bateraezintasuna**: $r_{13} = 0,40$, $r_{12} = 0,95$, $r_{12,3} = -0,15$, $b_{12} = -0,45$, $b_{13} = 0,84$, $\beta_{12} = 0,75$, $\beta_{13} = -0,60$.
- Koerlazio-koefiziente partziala ezin da negatiboa izan.
 - b_{12} , b_{13} erregresio-koefizienteek eta β_{12} , β_{13} erregresio standardizatuaren koefizienteek zeinu berdina eduki behar dute.
 - Erregresio-koefizienteek ezin dira, inoiz, koerlazio-koefizienteak baino handiagoak izan.
 - Erregresio bakar bati dagozkion erregresio-koefizienteek zeinu berbera eduki behar dute
 - Dena gezurrezkoa.
13. $\hat{X}_4(X_1, X_2, X_3)$ erregresio anizkoitzerako, ondoko emaitzak lortu dira: $S_e^2 = 64$, $|R| = 8$, $R_{44} = 16$. Zein izango da erregretzailearen bariantzaren balioa?:
- 0
 - 64
 - 32
 - 128
 - Dena gezurrezkoa, emandako datuekin ezin da kalkulatu.

14. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio anizkoitzaren ondoko datuak ditugu: $r_{12} = 0,8$, $r_{13} = 0,2$, $\beta_{12} = 0,9$, $\beta_{13} = -1,3$. Ondoko zein baieztapen da egiazkoa?
- A) X_2 erregresoreak erregretzailearen bariantzaren % 72a azaltzen du, erregresio honetan.
 B) X_3 erregresoreak erregretzailearen bariantzaren % 26a azaltzen du, erregresio honetan.
 C) Erregresio honetan, erregretzailearen bariantzaren %36a azalduta geratu da.
 D) Erregresio honetan, erregretzailearen bariantzaren %98a azalduta geratu da.
 E) Datu hauekin, doikuntzaren egokitasuna ezin da kalkulatu β_{13} eta r_{13} zeinu ezberdinetakoak baitira.
15. Datu multzo baterako, ondoko erregresioak emanez $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ eta $\hat{T}_1(T_2, T_3)$, ondoko zein baieztapen da egiazkoa?:
- A) $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ eta S_e^2 balioa $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ erregresioarena baino handiagoa izango da.
 B) Erregresio tipifikatuak egokitasun handiagoa dauka.
 C) Ezin da doikuntza bien egokitasuna parekatu.
 D) Erregresio tipifikatuaren bidez, erregretzailearen bariantzaren proportzio txikiagoa geratzen da azalduta.
 E) Dena gezurrezkoa.
16. Zein da $r_{12.3}$ balioaren kalkulari dagokion adierazpena?:
- A) $\frac{r_{12}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$
 B) $\frac{-L_{12}}{L_{11}L_{22}}$
 C) $\frac{-R_{12}}{\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}}$
 D) $r_{13}\beta_{13} + r_{23}\beta_{23}$
 E) Dena gezurrezkoa.
17. $\beta_{12} = -0,9$ eta $\beta_{21} = -0,8$ direla jakinik, zein izan da $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partzialaren balioa?
- A) 0,72
 B) -0,72
 C) 0,848
 D) -0,848
 E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 5

1. Ezaugarri estatistiko jarrai baten aurrean, maiztasun erlatiboak erabili behar dira absolutuen ordean, histograma bat egitean:
 - A) Ezaugarria mailetan bilduta dagoenean.
 - B) Mailen zabalerak desberdinak direnean.
 - C) Mailen zabalerak berdina direnean.
 - D) Beste aldagaien histogramekin konparatu nahi dugunean.
 - E) Maiztasun absolutuak edo erlatiboak erabiltzea beti baliokidea da.

2. X aldagaiarentzat $m_4(x) = 5S_x^4$ bada, zera esan dezakegu:
 - A) Banaketa normal bat baino zapalagoa da.
 - B) Banaketa normal bat baino zorrotzagoa da.
 - C) Banaketa normal bat baino bi aldiz zorrotzagoa da.
 - D) Banaketa normal bat baino bi aldiz zapalagoa da.
 - E) Dena gezurrezkoa.

3. t_x eta t_y aldagai estatistiko tipifikatuentzat, $g_0(t_x) = 3g_0(t_y)$ dela badiozue, ondorengo zein baieztapen da zuzena?
 - A) Bi aldagai tipifikatuen aldakuntza-koefizienteen arteko erlazioa zentzugabea da.
 - B) t_x -ren kuantil tarteko ibiltartea t_y -rena baino 3 aldiz handiagoa da.
 - C) t_x -ren batezbestekoarekiko sakabanatzea t_y -rena baino 3 aldiz txikiagoa da.
 - D) t_x -ren batezbestekoarekiko sakabanatzea t_y -rena baino 3 aldiz handiagoa da.
 - E) Dena gezurrezkoa.

4. X aldagai estatistiko batentzat, honako erlazioetatik zein da zuzena?
 - A) $I_G(2x) = 2I_G(x)$.
 - B) $I_G(x + 2) \geq I_G(x)$.
 - C) $I_G(2x) = I_G(x)$.
 - D) $I_G(x + 2) = I_G(x) + 2$.
 - E) Dena gezurrezkoa.

5. Batezbesteko agregatu sinplearen indizea erabil daiteke:
 - A) Aldagaiak unitate berdinean adierazita daudenean.
 - B) Oinarri denborak ditugun datuen lehen urtearekin bat egiten duenean.
 - C) Ondasun bakoitzarentzat indize sinple bat eraiki dezakegunean.
 - D) Ondasun bakoitzaren prezio eta kantitateak ezagutzen ditugunean bakarrik.
 - E) Dena gezurrezkoa.

6. Laspeyres-en indizea, indize sinpleen batezbesteko ponderatu bezala adieraz daiteke, non ponderazioak diren:
- Oinarri urtean saldutako ondasun bakoitzaren balioa.
 - Oinarri urtean saldutako ondasun bakoitzaren kopurua.
 - Ponderazioak Laspeyres-en indizea prezioena edo kantitateena den arabera izango dira.
 - Oinarri urteko ondasun bakoitzaren prezioak.
 - Dena gezurrezkoa.
7. Kontingenti taula batean, f_{ij} maiztasun erlatiboak zer dira?
- $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$.
 - $f_{ij} = \frac{n_{i.}}{N}$.
 - $f_{ij} = \frac{n_{.j}}{N}$.
 - $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$.
 - Dena gezurrezkoa.
8. (X, Y) , bi aldagai estatistikoaren banaketan, independentzi baldintza beharrezko eta nahikoa honako hau da:
- $n_{ij} = n_{i.} \cdot n_{.j} \quad \forall i, j$
 - $\frac{f_{ij}}{N} = \frac{f_{i.}}{N} \cdot \frac{f_{.j}}{N} \quad \forall i, j$
 - $f_{ij} = f_{i.} + f_{.j} \quad \forall i, j$
 - Ez dago baldintza beharrezko eta nahikorik.
 - Dena gezurrezkoa.
9. Bi aldagai koerlazio gabeak izango dira, $\hat{Y}(X)$ eta $\hat{X}(Y)$ karratu txikieneko erregresio linealen bi zuzenen arteko angelua hauetariko bat denean:
- 0°
 - 60°
 - 45°
 - 90°
 - Dena gezurrezkoa.

10. $\hat{X}(Y)$ eta $\hat{Y}(X)$ -en K.T.E.L. erregresio-koefizienteak b_{xy} , b_{yx} badira hurrenez hurren, hurrengo erlazioetatik zein da zuzena?
- A) $r_{xy} = b_{xy}b_{yx}$
 B) $r_{xy} = -\sqrt{b_{xy}b_{yx}}$
 C) $|r_{xy}| = +\sqrt{b_{xy}b_{yx}}$
 D) $r_{xy}^2 b_{xy} = b_{yx}$
 E) Dena gezurrezkoa.
11. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioan $\bar{x}_1 = 30$ dela baldin badakigu, zenbatekoa da $\bar{\hat{x}}_1$?
- A) > 30
 B) 0
 C) < 30
 D) 1
 E) Dena gezurrezkoa.
12. $b_{12} = 0,8$, $L_{12} = -0,4$, $L_{12} = 0,5$ direla jakinik, zenbatekoa da $r_{12,3}$?
- A) 1
 B) $-0,8$
 C) $0,64$
 D) $0,8$
 E) Dena gezurrezkoa.
13. $r_{1,23} = 0,8$ eta $S_{x_1}^2 = 50$ badira $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio anizkoitzean, zenbat balio du S_e^2 -k?
- A) 32
 B) 18
 C) 10
 D) 40
 E) Dena gezurrezkoa.
14. $b_{12} = 0,75$, $S_1^2 = 25$, $S_2^2 = 16$, $S_3^2 = 36$, $S_4^2 = 49$ lortu badira $\hat{X}_1(X_2, X_3, X_4)$ erregresio anizkoitzean, zenbat balio du β_{12} ?
- A) $0,6$
 B) $0,9375$
 C) $0,75$
 D) $-0,6$
 E) Dena gezurrezkoa.

15. $r_{1,23} = 0,9$, $r_{12} = 0,7$, $r_{13} = 0,8$ balioak jakinik (X_1, X_2, X_3) aldagai tridimentsionalerako, zera baieztatu dezakegu:
- A) Berdin litzateke menpeko aldagai bat edo bi erabiltzea X_1 -en erregresioan.
 - B) X_3 menpeko aldagaia bakarrik erabiliz X_1 -en estimazioa fidagarriagoa litzateke.
 - C) X_2 menpeko aldagaia bakarrik erabiliz X_1 -en estimazioa fidagarriagoa litzateke.
 - D) X_2 eta X_3 menpeko aldagaiak erabiliz X_1 -en estimazioa fidagarriagoa litzateke.
 - E) Dena gezurrezkoa.
16. Datu multzo konkretu batentzat, zein izango litzateke $r_{12,3}$ koefizientearen balioa, $r_{12} = 0,9$, $r_{13} = 0$, $r_{23} = 0$ direla jakinik?
- A) $r_{12,3} = 0,9$, X_3 -k ez baitu eraginik X_1 eta X_2 -engan.
 - B) Ezin daiteke kalkulatu, mugagabea legoke.
 - C) $r_{12,3} < r_{12}$, X_3 -k eragin positiboa baitu X_1 eta X_2 -engan.
 - D) $r_{12,3} = 0$, X_3 -k ez baitu eraginik X_1 eta X_2 -engan.
 - E) Dena gezurrezkoa.
17. $r_{23} = 0,75$, $r_{23,1} = 0,95$ jakinik, hurrengo baieztapenetatik zein da zuzena?
- A) X_1 aldagaiak eragin positiboa du X_2 eta X_3 -engan.
 - B) r_{23} koerlazio-koefiziente sinpleak ez du X_2 eta X_3 -en arteko benetako erlazioa adierazten.
 - C) Koefiziente hauek gauza desberdinak neurtzen dituztenez, ezin daitezke konparatu.
 - D) Koerlazio-koefiziente partziala ezin daiteke sekula, koerlazio-koefiziente sinplea baino handiagoa izan.
 - E) X_1 aldagaiak ez du eraginik X_2 eta X_3 -en arteko erlazioan.
18. Edozein erregresio anizkoitz **tipifikatuan** hondar-bariantza eta estimatutako balioen bariantzaren arteko batura beti izango da:
- A) 0
 - B) 1
 - C) $2S_e^2$
 - D) Mugatze-koefizientea.
 - E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 6

1. Zabalera desberdineko mailatan bildutako aldagai baten histograman, maila bakoitzaren altuerak zera adierazten du:

- A) Maila bakoitzaren maiztasun erlatiboa.
- B) Maila bakoitzaren maiztasun absolutua.
- C) Zabalera unitate bakoitzerako maiztasuna.
- D) Maila bakoitzaren zabalera.
- E) Dena gezurrezkoa.

2. Baldin $S_x^2 = 25$, $m_3(x) = -36$ eta $Y = -3X + 2$ transformazio lineala egiten badugu, hurrengo baieztapenetatik zein da zuzena?

- A) Y aldagaiaren asimetri koefizientea 0,5 da.
- B) $S_y = -5$.
- C) $m_3(y) = -36$.
- D) $m_3(y) = 36$.
- E) Dena gezurrezkoa.

3. Hurrengo maiztasun taularen banaketa bidimentsionala daukagu, $x_1 < x_2$ X aldagaiaren bi balioentzako, eta $y_1 < y_2 < y_3$ Y aldagaiaren balioentzako. Zera esan dezakegu:

	Y			
X	y ₁	y ₂	y ₃	
x ₁	0	3	5	
x ₂	5	3	0	

- A) Bien arteko koerlazioa osoa eta zuzena da.
- B) Bien arteko koerlazioa osoa eta alderantzizkoa da.
- C) Talde honetan, bi aldagaien baloreen artean independentzia azaltzen du taulak.
- D) Bi aldagaien arteko koerlazio lineala alderantzizkoa da.
- E) Bi aldagaien arteko koerlazio lineala zuzena da.

4. Zein da ondoren daukagun taulako f_{13} -ren balioa, (X,Y) aldagai bidimentsionaleko maiztasun erlatiboen banaketa izan dadin?

	Y			
X	y ₁	y ₂	y ₃	
x ₁	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	f_{13}	
x ₂	$\frac{1}{4}$	0	0	

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{5}{4}$

E) Dena gezurrezkoa.

5. Mailatan bildutako aldagai jarrai batentzat $[L_{i-1}, L_i]$ mailak $N_i = \frac{N}{2}$ maiztasun absolutu metatua badu, orduan:

A) $Me = L_{i-1}$

B) $Me = \bar{x}$

C) $Me = L_i$

D) $Me = \frac{L_{i-1} + L_i}{2}$

E) Dena gezurrezkoa.

Hurrengo adierazburua 6. eta 7. galderei dagokie:

K mailatan bildutako X aldagaiaren maiztasun banaketa ikertzean, batezbesteko aritmetikoa oso errepresentagarria dela ikus dezakegu, hau da, datuak sakabanatze gutxi dute balio honekiko.

6. Orduan, maila desberdinen masa totalaren kontzentrazioa aztertzean, Lorenz-en kurba,

A) diagonaletik hurbil egongo da kontzentrazio handia azaltzen baitu.

B) diagonaletik hurbil egongo da uniformetasun handia azaltzen baitu.

C) diagonaletik urrun egongo da kontzentrazio handia azaltzen baitu.

D) diagonaletik urrun egongo da uniformetasun handia azaltzen baitu.

E) Dena gezurrezkoa.

7. Maila desberdinen masa totalaren kontzentrazioa aztertzean, lortuko dugun Gini-ren indizea izango da:

A) 0-tik hurbil egongo da, berorrek uniformetasun handiena adierazten baitu.

B) 0-tik hurbil egongo da, berorrek kontzentrazio handiena adierazten baitu.

C) 1-etik hurbil egongo da, berorrek uniformetasun handiena adierazten baitu.

D) 0-tik hurbil egongo da, berorrek kontzentrazio handiena adierazten baitu.

E) Dena gezurrezkoa.

8. Batezbesteko aritmetiko simple **prezio**-indizearen (S_t^P) eta batezbesteko agregatu simple **prezio**-indizearen (B_t^P) arteko diferentzia izango da:

- A) S_t^P beti B_t^P baino handiagoa da.
- B) S_t^P beti B_t^P baino txikiagoa da.
- C) S_t^P -k prezio-indize sinpleak hasierako kopuruaz ponderatzen ditu.
- D) B_t^P -k prezio-indize sinpleak hasierako prezioaz ponderatzen ditu.
- E) Dena gezurrezkoa.

9. $\hat{X}(Y)$ K.T.E.L.ean hondar-bariantza izango da:

- A) $S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{N}$
- B) $S_e^2 = S_x^2(1 - r_{xy}^2)$
- C) $S_e^2 = S_y^2(1 - r_{xy}^2)$
- D) $S_e^2 = b_{xy} - b_{yx}$
- E) Dena gezurrezkoa.

10. Datu multzo baterako $S_x^2 = S_y^2 = 1$ lortu dugu. Zera baieztatu dezakegu:

- A) $\hat{Y} - \bar{y} = S_{xy}(X - \bar{x})$
- B) $\hat{Y} = r_{xy}X$
- C) $\hat{Y} - \bar{y} = S_{xy}^2(X - \bar{x})$
- D) $\hat{Y} = r_{xy}^2X$
- E) Dena gezurrezkoa.

11. $L_{11} = 16$ $L_{22} = 64$ $L_{12} = -25$, $L(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ matrizearen adjuntuak ezagutuz, zein da $r_{12.345}$ koerlazio partzialaren balioa?

- A) 0,0488
- B) -0,0488
- C) 0,78125
- D) -0,78125
- E) Dena gezurrezkoa.

12. Datozen adierazpenetatik zeinek adierazten du erregresio partzial standardizatuaren koefizientearen, β_{ij} -ren, kalkulua?

A) $\beta_{ij} = \frac{-L_{ij}}{L_{ij}}$

B) $\beta_{ij} = \frac{-S_{ij}}{S_i^2}$

C) $\beta_{ij} = \frac{-R_{ij}}{R_{ij}}$

D) $\beta_{ij} = \frac{S_j}{S_i} b_{ij}$

E) Dena gezurrezkoa.

13. Karratu txikieneko erregresio anizkoitzean menpeko aldagaiaren eragin erlatiboa zein den jakiteko,

A) (b_{ij}) erregresio-koefizienteak konparatzen dira.

B) koerlazio-koefiziente sinpleak konparatzen dira.

C) koerlazio-koefiziente partzialak konparatzen dira.

D) (β_{ij}) erregresio-koefiziente standardizatuak konparatzen dira.

E) Dena gezurrezkoa.

14. Izan bitez $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 1$ duten hiru aldagai estatistiko (X_1, X_2, X_3) .

$\hat{X}_1(X_2, X_3)$ K.T.E.L-ren termino independenteak zein balio hartuko du $b_{13} = 2b_{12}$ dela jakinik?

A) $1 - 3b_{12}$

B) $1 + 3b_{12}$

C) $1 + b_{12}$

D) $1 - b_{12}$

E) Dena gezurrezkoa.

15. Zein izango da $r_{12,3}$ koerlazio partzialaren balioa, hurrengo datuak jakinik: $\beta_{12} = 0,8$, $R_{12} = -0,5$, $R_{22} = 0,7$?

A) $-0,7559$

B) Ezin daiteke kalkulatu.

C) $0,7559$

D) $0,5714$

E) Dena gezurrezkoa.

16. Zein izango da $r_{23,4}$ koerlazio partzialaren balioa, hurrengo datuak jakinik:
 $\text{cov}(e_{2,4}, e_{3,4}) = -36$, $S_{e_{2,4}}^2 = 81$, $S_{e_{3,4}}^2 = 25$?
- A) $-0,8$
 B) $-0,01\hat{7}$
 C) $0,8$
 D) $0,01\hat{7}$
 E) Dena gezurrezkoa.
17. Zein da $b_{12} = -0,9$ erregresio-koefizientearen esangura?
- A) Ez du esangura estatistikorik.
 B) X_1 eta X_2 aldagaien arteko erlazioa ahula da.
 C) X_1 eta X_2 aldagaien arteko erlazioa sakona eta negatiboa da, -1 era hurbiltzen baita.
 D) X_2 unitate batean handitzen bada, eta beste aldagaiak konstante mantentzen badira, \hat{X}_1 $0,9$ an murrizten da.
 E) Dena gezurrezkoa.
18. Edozein K.T.E.L. **tipifikatuan**, mugatze-koefizientea,
- A) hondar-bariantzaren berdina da.
 B) estimatutako balioen bariantzaren berdina da.
 C) hondar-bariantza eta estimatutakoaren baturaren berdina da.
 D) erregresio tipifikatu batean ezin daiteke mugatze-koefizienterik atera.
 E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 7

1. Maiztasun-poligonoari buruz esan dezakegu:
- A) Maiztasun-poligonoa eta barra-diagrama gauza bera dira.
 B) Banaketa baten soslaia deskribatzen du.
 C) Sektore-grafikoa bezalakoa da, baina lauki baten gainean eginda.
 D) Maiztasun-poligonoa eta populazio-piramidea gauza bera dira.
 E) Dena gezurrezkoa.
2. $S_x^2 = 3$, $S_y^2 = 8$ eta $S_z^2 = 9$ direla jakinik, halaber $Z = X + Y$ izanik, esan dezakegu:
- A) X eta Y koerlazio gabeak dira
 B) $S_{xy} = 2$

- C) $S_{xy} = -2$
D) $S_{xy} = 1$
E) $S_{xy} = -1$
3. (X,Y) aldagai bikoitzaren maiztasun taula baten kobariantzaren balioa $S_{xy} = 0$ baldin bada, hauxe esan dezakegu:
- A) X, Y aldagaien balioek menpekotasun osoa daukate.
B) X,Y aldagaien balioak independenteak dira.
C) X, Y aldagaien balioak koerlazio gabeak dira.
D) X, Y aldagaien balioek koerlazio osoa daukate.
E) Dena gezurrezkoa.
4. Maiztasun taula aztertu ondoren X, Y aldagaien banaketak independenteki banatuta daudela ikusten badugu, zenbat balioko du (x_i, y_i) bikotearen maiztasun absolutuak, bazter-maiztasunak 15 eta 12 balio badute, hurrenez hurren, eta indibiduen totala 30 bada?
- A) 15
B) 180
C) 18
D) 6
E) Dena gezurrezkoa.
5. X, Y aldagaien arteko S_{xy} kobariantza:
- A) Bigarren ordenako momentu arrunta da.
B) Bigarren ordenako momentu zentrala da.
C) $S_{xy} = S_x S_y$
D) $S_{xy} = a_{11} + \bar{x} \bar{y}$
E) Dena gezurrezkoa.
6. 0,40, A eskualdeko errentaren kontzentrazio-indizea, 0,20, B eskualdekoa eta 0,30, C eskualdekoa baldin badira, hiru eskualdeek osatzen duten multzoaren kontzentrazio-indizea izango da:
- A) $> 0,40$
B) $< 0,20$
C) $= 0,90$
D) $\in [0,20, 0,40]$
E) Dena gezurrezkoa.

7. Ondasun baten prezioaren gora-beherakadak, denboran zehar, urte finko batekiko ezagutu nahi baditugu, egokiena izango da:
- A) Indize sinpleen taula eraikitzea.
 - B) Kopuruz ponderatutako indizeen taula eraikitzea.
 - C) Ezin da inongo indizerik eraiki ondasun bakar batentzat.
 - D) Prezioaz ponderatutako indizeen taula eraikitzea.
 - E) Dena gezurrezkoa.
8. Noiz hurbilduko zaio gehiago Laspeyres-en prezio-indizea batezbesteko aritmetiko sinplearen indizeari?
- A) Ondasunen oinarri denborako prezioak berdintsuak direnean.
 - B) Ondasunen oinarri denborako kopuruak berdintsuak direnean.
 - C) Ondasunen oinarri denborako balioak berdintsuak direnean.
 - D) Indizea kalkulatzeko ari garen urtearen prezioak berdintsuak direnean.
 - E) Dena gezurrezkoa.
9. $\hat{Y}(X)$ K.T.E.L., $b_{xy} = 1$ lortu dugu. Ondoko zein baieztapen da zuzena erregresio horretarako?
- A) $b_{xy} = 1$
 - B) $S_{xy} = S_x^2$
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) $S_{xy} = 1$
 - E) $S_{xy} = S_y^2$
10. Datu multzo baterako $S_{xy} = 0$ balioa lortu badugu, $\hat{Y}(x)$ karratu txikiaren zuzenean, $x = 0$ baliorako daukagun ordenatua da:
- A) 0
 - B) 1
 - C) \bar{x}
 - D) \bar{y}
 - E) Dena gezurrezkoa.
11. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresio anizkoitzaren β_{12} koefizientearen balioa beti izango da:
- A) b_{12} baino txikiagoa.
 - B) b_{12} koefizientearen zeinua edukiko du.
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) b_{12} baino handiagoa.
 - E) Negatiboa izango da.

12. Zein izango da $r_{12,34}$ koerlazio-koefiziente partzialaren balioa $r_{12,3} = 0,6$, $r_{14,3} = 0,8$ eta $r_{24,3} = 0,6$ baldin badira?
- A) $-0,12$
 B) $0,25$
 C) $-0,25$
 D) $0,12$
 E) Dena gezurrezkoa.
13. Erregresio anizkoitz baten $b_{12} = 0,75$, $b_{13} = 0,85$ eta $b_{14} = 0,64$ balioak jakinez, ondoko zein baieztapen da zuzena?
- A) X_2, X_3, X_4 erregresore bakoitzaren eta X_1 erregretzailearen arteko erlazioa positiboa da.
 B) X_3 erregresoreak, $\hat{X}_1(X_2, X_3, X_4)$ erregresioan, indar erlatibo handiagoa dauka.
 C) Erregresio-koefiziente hauek ezinezkoak dira, ezin dira guztiak positiboak izan.
 D) Erregresoreen eta erregretzailearen arteko erlazioa sakona da.
 E) Dena gezurrezkoa.

Hurrengo galderaren adierazburua ondoko datuei dagokie:

$$L \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ & 1 & 0,5 & 0,6 \\ & & 1 & 0,3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{21} = 0,6, \beta_{23} = 0,5, \beta_{24} = 0,3$$

14. Zein da, aurreneko datuei dagokien $\hat{X}_2(X_1, X_3, X_4)$ erregresio anizkoitzaren doikuntzaren egokitasuna?
- A) % 100
 B) % 90
 C) % 91
 D) % 9
 E) Dena gezurrezkoa.
15. Zein da, ondoko adierazpenetatik, $\hat{X}_3(X_1, X_2)$ doikuntzaren egokitasunaren kalkulari dagokiona?

A) $r_{3,12}^2 = 1 - \frac{|R|}{R_{11}}$

$$B) r_{3,12}^2 = \frac{S_{\hat{X}_3}^2}{S_{X_3}^2}$$

C) Dena gezurrezkoa.

$$D) r_{3,12}^2 = \frac{|L|}{L_{33}}$$

$$E) r_{3,12}^2 = S_{X_3}^2 - S_e^2$$

16. Lau aldagai estatistikoren analisisa egitean, $r_{12} = 0$ lortu dugu. Zein izango da $r_{12,3}$ koefizientearen balioa?

A) 0

B) r_{13} eta r_{23} balioen menpe egongo da.

C) 1

D) Lau aldagai baldin badira koefiziente horrek ez du existitzen.

E) Dena gezurrezkoa.

17. $\hat{X}_2(X_1, X_3, X_4)$ erregresio anizkoitzarentzat, zein da ondoko adierazpenetatik, S_e^2 hondar-bariantzari dagokiona?

$$A) \frac{|L|}{L_{22}}$$

$$B) 1 - \frac{|L|}{L_{22}}$$

C) Dena gezurrezkoa.

$$D) S_{X_2}^2 (1 - r_{12}^2)$$

$$E) \frac{|R|}{S_{X_2}^2 R_{22}}$$

18. $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ erregresio anizkoitz tipifikatuarentzat, ondoko adierazpenetatik zein da zuzena?

$$A) 1 = S_e^2 + S_{\hat{T}_1}^2$$

$$B) 1 = S_e^2 + S_{T_1}^2$$

$$C) S_e^2 = 0$$

$$D) S_e^2 = 1 + S_{\hat{T}_1}^2$$

E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 8

1. Ondoko zein adierazpen dagokio, tarteka taldekatutako aldagai kuantitatibo baten medianaren estimazioari?

A) $L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}$

B) $L_{i-1} + \frac{N_i - N_{i-1}}{\frac{N}{2} - N_{i-1}} c_i$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} + N_{i-1}}{N_i + N_{i-1}} c_i$

E) $L_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - N_{i-1}}{N_i - N_{i-1}} c_i$

2. Zein izango da X aldagai kuantitatibo baten aldakuntza-koefizienta $a_1(X) = 2$ eta $a_2(X) = 8$ direla jakinik?

- A) Ez dugu datu nahikorik.
 B) Emandako datuak ez dira bateragarriak.
 C) 1
 D) 4
 E) Dena gezurrezkoa.

3. Aldagai estatistiko kuantitatibo zentratu batentzat $a_2 = -2$ da. Emaizta honen aurrean, honako hau esan dezakegu:

- A) Sakabanatze txikiko banaketa da.
 B) Balio negatiboak hartzen dituen banaketa da.
 C) Aldagai honen batezbesteko aritmetikoa negatiboa da.
 D) Banaketa honen asimetria negatiboa da.
 E) Dena gezurrezkoa.

4. Zein adierazpen dauka, aldagai estatistiko kuantitatibo baten, $m_3(X) = 0$ emaitzak?

- A) Bat ere ez, aldagai kuantitatibo baten hirugarren ordenako momentu zentratua edo batezbestekoarekikoa, beti zero baita.
 B) Banaketa normala da.

- C) Aldagai horren bariantza zero da.
D) Banaketa simetrikoa da.
E) Dena gezurrezkoa.
5. X, Y aldagai estatistikoaren artean ondoko erlazioa betetzen da: $Y = \frac{X - 4}{2}$.
Me(Y) = 8 dela jakinik, zein izango da X aldagaiaren mediana?
- A) 4
B) 20
C) Dena gezurrezkoa.
D) 2
E) Datu horien bidez ezin dugu kalkulatu.
6. Aldagai bat tipifikatua baldin bada, bere bariantzak:
- A) Batezbestekoaren eta modaren arteko balio bat hartuko du.
B) Zero izango da.
C) Batezbestekotik oso urrun dagoen balio bat hartuko du.
D) Ezin dugu zein balio hartuko duen esan, banaketa bakoitzaren menpe egongo baita.
E) Dena gezurrezkoa.
7. X aldagai estatistikoa Y aldagaia baino uniformeago banatuta badago kolektibo batean, ondoko baieztapenetatik, zein uste duzu dela zuzena?
- A) $I_G(X) < I_G(X + Y) < I_G(Y)$
B) Y aldagaiaren Lorenz-en kurba diagonal nagusitik hurbilago izango da X aldagaiarena baino.
C) $I_G(Y) \leq I_G(X)$
D) $I_G(X + Y) = I_G(X) + I_G(Y)$
E) Dena gezurrezkoa.
8. Batezbesteko agregatuaren kopuru-indizearen kasuan, indize sinpleen batezbesteko aritmetikoa bezala adierazirik:
- A) Prezioen indize sinpleak oinarri denborako kopuruaz ponderaturik daude.
B) Kopuruen indize sinpleak oraingo uneko prezioaz ponderaturik daude.
C) Prezioen indize sinpleak oraingo uneko kopuruaz ponderaturik daude.
D) Kopuruen indize sinpleak oinarri denborako kopuruaz ponderaturik daude.
E) Dena gezurrezkoa.
9. Ondasun baten ondoko prezio sinpleak jakinik: $I_{85,83}^p = 109,7$ eta $I_{85,90}^p = 81,2$,
lor ezazu $I_{90,83}^p$:
- A) 135,09

- B) 190,9
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 89,076
 E) 123,15
10. X, Y aldagaiak U, V aldagaiekin linealki erlazionatuta daude: $X = aU + b$, $Y = eV + f$ aldagai bikote bien kobariantzen arteko erlazioa, honako hau da:
- A) $S_{uv} = |ae| S_{xy}$
 B) $S_{xy} = \sqrt{aeS_{uv}}$
 C) $S_{xy} = \frac{S_{uv}}{ae}$
 D) $S_{xy} = a^2e^2S_{uv}$
 E) Dena gezurrezkoa.
11. T_x, T_y bi aldagai tipifikatu izanik, esan dezakegu:
- A) $r_{t_x t_y} = 0$
 B) $r_{t_x t_y} = S_{xy}$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) $r_{t_x t_y} = 1$
 E) $r_{t_x t_y} = r_{xy}$
12. Ondoko taularen datuak emanik, jarraian dauden emaitzetatik zein da egia?
- | X | Y |
|-----|-----|
| 0 | 3 |
| 1 | 4 |
| -1 | 2 |
| 1,5 | 4,5 |
- A) $r_{xy} = 1$
 B) $r_{xy} = -1$
 C) $r_{xy} = 0$
 D) $\bar{x} = 1,5$
 E) Dena gezurrezkoa.
13. X, Y bi aldagai estatistikorentzat $m_{11} = 60$ baldin bada, zein da zuzena ondoko erlazioetatik?
- A) $S_{xy} = 60 + \bar{x}\bar{y}$
 B) $60 = S_x S_y r_{xy}$

- C) Dena gezurrezkoa.
 D) $S_{xy} = 60 - \bar{x}\bar{y}$
 E) $60 = r_{xy}$
14. X, Y bi aldagai koerlazio gabeak izanik, zein izango da X, Z aldagaien arteko kobariantza, $Z = aY - b$ baldin bada?
- A) b
 B) 0
 C) -b
 D) -1 eta +1 tarteko edozein balio har dezake.
 E) Dena gezurrezkoa.

Ondoko bi galderak, jarraian daukagun kontingentzi taulari dagozkio.

X/Y	y_1	y_2	y_3
x_1	5	6	3
x_2	2	1	n_{23}

15. $f_{11} = 0,25$ dela jakinik, zenbat balioko du n_{23} maiztasunak?
- A) 0,15
 B) 3
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 7
 E) f_{11} ezin da 0,25 izan.
16. Banaketazko independentziaren baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuz, X eta Y independenteki bana daitezen kolektibo horretan, nahitaez bete beharko litzateke:
- A) $\frac{n_{23}}{17 + n_{23}} = \left(\frac{3 + n_{23}}{17 + n_{23}} \right)^2$
 B) $\frac{n_{23}}{17 + n_{23}} = \left(\frac{3 + n_{23}}{17 + n_{23}} \right)$
 C) $\frac{n_{23}}{17 + n_{23}} = f_2 \cdot f_3$
 D) $\frac{n_{23}}{17 + n_{23}} = f_2 + f_3$
 E) Dena gezurrezkoa.

17. Y aldagaiaren X aldagaiarekiko karratu txikiaren erregresio linealerako, % 75eko doikuntzaren egokitasuna lortu da. Hurrengo berdintasunetatik zein da zuzena?
- A) $S_{\hat{y}} = 0,75S_y$
 B) $S_y^2 = 0,75S_y^2$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) $S_e^2 = 0,75S_y^2$
 E) $S_e = 0,75S_y$
18. Izan bitez X, Y bi aldagai estatistiko. $\hat{X}(Y)$, $\hat{Y}(X)$ karratu txikiaren erregresio linealak eginik, ondoko erregresio-koefizienteak lortu dira: $b_{xy} = 0,9$ eta $b_{yx} = 0,4$. Zenbat balio du r_{xy} koefizienteak?
- A) 0,36
 B) 0,13
 C) 0,6
 D) -0,6
 E) Dena gezurrezkoa.
19. $\hat{Y}(X)$ K.T.E.K.ean, non Y aldagaia tipifikatua den, honako hau betetzen da:
- A) $\bar{\hat{y}} = \bar{x}$; $S_y^2 = 1 - S_e^2$
 B) $\bar{\hat{y}} = 0$; $S_y^2 = 1 + S_e^2$
 C) Erregresio zuzena (0,0) puntutik pasatuko da beti.
 D) $\bar{\hat{y}} = 0$; $r_{xy}^2 = 1 - S_e^2$
 E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 9

1. Tarteka taldekatuta dagoen aldagai kuantitatibo baten kasuan, moda lehen tartean baldin badago, alderantzizko banaketa proportzionalaren irizpidea (altueren irizpidea) aplikatuz:
- A) Ezin da aldagai horren moda estimatu.
 B) Moda tartearen goi muturrean estimatuko da.
 C) Moda eta mediana puntu batean egokituko dira.
 D) Moda ezin da inoiz lehen tartean izan.
 E) Dena gezurrezkoa.

2. X aldagai estatistiko baten bidez, Y aldagai berria, $Y = \frac{X - b}{a}$ bezala definitzen badugu, ondoko baieztapenetatik, zein da egokia?
- A) Posiziozko edo zentru-joeraren eta sakabanatzearen estatistiko guztietan a , b parametroek eragina daukate.
 - B) Zentru-joeraren estatistikoetan a parametroak soilik dauka eragina.
 - C) Sakabanatzearen estatistikoetan, g_0 izan ezik, a parametroak soilik dauka eragina.
 - D) Zentru-joeraren estatistikoetan b parametroak soilik dauka eragina.
 - E) Dena gezurrezkoa.
3. Aldagai kuantitatibo baten kasuan $\bar{x} = Mo = Me$ gertatzen da, ondorioz esan dezakegu:
- A) Aldagaia, simetrikoki banatzen da.
 - B) Ez dira inoiz berdintasun horiek beteko.
 - C) Aldagaia, zentratua da.
 - D) Hiru estatistikoak zero direnean beteko da soilik.
 - E) Dena gezurrezkoa.
4. Zenbat balioko du X aldagai tipifikatu baten kurtosi koefizienteak, $m_4(X) = 2$ baldin bada?
- A) Ez ditugu datu guztiak balio zehatza lortzeko.
 - B) 3 baino handiagoa den balio bat.
 - C) 0, tipifikatua izateagatik.
 - D) Ez dauka zentzurik kurtosi koefizientea kalkulatzeko, aldagai tipifikatu baterako.
 - E) Dena gezurrezkoa.
5. Banaketa baterako Gini-ren kontzentrazio-indizeak 0,95 balio du. honen arabera esan dezakegu:
- A) Banaketa honek sakabanatze handia dauka.
 - B) Ezin du 1 baino txikiagoa den balio bat izan.
 - C) Banaketa honetan, masa totalaren banaketa indibiduen artean oso uniforme edo egokia da.
 - D) Dagokion Lorenz-en kurba, diagonal nagusitik oso hurbil izango da.
 - E) Banaketa honek sakabanatze txikia dauka.

Hurrengo bi galderak ondoko adirazburuari dagozkie.

A eta B hirietan etxebizitzaren prezioen ikerketa egin da, ondoko emaitzak lorturik, $\{x_i\}$ eta $\{y_i\}$ A eta B hirietako datuak dira hurrenez hurren:

Prezioa (x_i)	Etxe kop.	Prezioa (y_i)	Etxe kop.
30	34	25	50
25	38	15	78
17	56	12	82
14	72	7	130
10	100	4	160
	300		500

Taula horien datuekin hurrengo estatistikoak lortu dira:

$$\bar{x} = 16,43 \quad \bar{y} = 9,91 \quad S_x^2 = 45,54 \quad S_y^2 = 40,91$$

6. Emaitza horiek ikusita, ondoko baieztapenetatik, zein uste duzu dela egokia?
- A hiriko etxebizitzaren prezioa, erlatiboki sakabanatuagoa dago.
 - Tamainu desberdinetako kolektiboak dira, hots, ez dira konparagarriak.
 - B hiriaren etxebizitzaren prezioa, erlatiboki sakabanatuagoa dago.
 - Bi banaketek sakabanatze berdina daukate.
 - Dena gezurrezkoa.
7. Ondoko baieztapenetatik, zein uste duzu dela egokia?
- 25 milioiko etxebizitzak, erlatiboki garestiagoak dira A hirian B hirian baino.
 - 25 milioiko etxebizitzak, erlatiboki garestiagoak dira B hirian A hirian baino.
 - Ezin ditugu baieztapen-mota hauek egin, banaketak ez direlako konparagarriak.
 - KPI ezagutu beharko genuke honelako baieztapenak egin ahal izateko.
 - Dena gezurrezkoa.
8. Ondoko prezio eta kopuru-indizeak emanik: $L_{92,83}^P = 165,3$, $L_{92,83}^Q = 173,2$, $P_{92,83}^Q = 180,2$, balio indizea, $B_{92,83}$ indizea hain zuzen, izango da:
- $B_{92,83} = 286,30$
 - $B_{92,83} = 291,67$
 - $B_{92,83} = 303,46$
 - $B_{92,83} = 297,87$
 - Dena gezurrezkoa.
9. Zein balio estimatuko zenuke $KPI_{83,92}$ -rentzat, $KPI_{92,83} = 165,3$ dela jakinik?
- 165,3
 - 100
 - 60,5

- D) Dena gezurrezkoa.
E) 160,5
10. $\hat{Y}(X)$ K.T.E.K. baterako, erroreen eta balio estimatuen baturaren bariantza, honako hau da:
- A) $S_{e+\hat{y}}^2 = S_y^2$
B) $S_{e+\hat{y}}^2 = S_{e\hat{y}}^2$
C) $S_{e+\hat{y}}^2 = S_e^2 - S_y^2$
D) $S_{e+\hat{y}}^2 = S_x^2(1 - r^2) + S_y^2$
E) Dena gezurrezkoa.
11. Y aldagaiaren X aldagaiarekiko Karratu Txikiaren erregresioaren hondar-bariantza, honako hau da:
- A) $S_e^2 = S_y^2(1 - r_{xy})$
B) $S_e^2 = S_x^2(1 - r_{xy}^2)$
C) $S_e^2 = S_y^2\left(1 - \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 S_y^2}\right)$
D) $S_e^2 = S_x^2\left(1 - \frac{S_{xy}}{S_x S_y}\right)$
E) Dena gezurrezkoa.
12. K.T.E.L. baterako $b_{xy} = 0$ emaitza lortu badugu, honako hau esan dezakegu:
- A) $S_{xy} = S_y^2$
B) $S_{xy} = S_x^2$
C) $b_{yx} = 1$
D) $b_{yx} = 0$
E) Dena gezurrezkoa.
13. Puntu-hodei baterako K.T.E.L.ak eginik, $\hat{Y} = 0,3 + 0,5X$, $\hat{X} = 0,2 - 1,3Y$ zuzenak lortu ditugu. Kasu honetan, honako hau esan dezakegu:
- A) $r_{xy} = -0,80$
B) $r_{xy} = 0,80$
C) $r_{xy} = -0,65$
D) $r_{xy} = 0,65$
E) $\hat{X}(Y)$ eta $\hat{Y}(X)$ zuzenak ez dira bateragarriak.

14. $X = -3U + 9$, $Y = 5V + 2$, transformazio linealak emanik, honako hau dakigu:
- A) $S_{xy} = -15S_{uv}$, $r_{xy} = r_{uv}$
 B) $S_{xy} = 15S_{uv}$, $r_{xy} = -r_{uv}$
 C) $S_{xy} = 2S_{uv}$, $r_{xy} = -r_{uv}$
 D) $S_{xy} = 2S_{uv} + 11$, $|r_{xy}| = |r_{uv}|$
 E) Dena gezurrezkoa.
15. T_x , T_y bi aldagai tipifikatu izanik, $S_{t_x t_y} = 30$ kobariantza lortu dugu. Ondoko baieztapenetatik, zein da zuzena?
- A) Bi aldagaien arteko erlazio lineala zuzena da.
 B) Bi aldagaien arteko erlazio lineala alderantzizkoa da.
 C) Aldagaien artean ez dago erlazio linealik.
 D) Ezin da emaitz hori lortu.
 E) Dena gezurrezkoa.
16. Izan bitez X aldagai zentratua eta Y aldagai tipifikatua. Kasu honetan, $\hat{X}(Y)$ K.T.E.L.aren zuzenak ondoko adierazpena dauka:
- A) $\hat{x} = r_{xy}y$
 B) $\hat{x} = S_{xy}y$
 C) $\hat{x} = r_{xy}y + a$
 D) $\hat{x} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}y$
 E) Dena gezurrezkoa.
17. X , Y aldagai estatistikoei buruz $a_{10} = -3$, $a_{01} = 2$ eta $a_{11} = 120$ momentu arruntak ezagutzen dira. Zein izango da X , Y aldagaien arteko kobariantzaren balioa?
- A) 120
 B) 126
 C) 114
 D) 121
 E) Dena gezurrezkoa.

Ondoko galderak, jarraian daukagun kontingentzi taulari dagozkie.

X/Y	y_1	y_2	y_3
x_1	3	14	7
x_2	12	0	15
x_3	9	42	21

18. Maiztasun erlatibotan:

- A) x_1 eta x_3 balioez baldintzatutako Y aldagaiaren banaketak berdinak dira.
- B) x_1 eta x_3 balioez baldintzatutako Y aldagaiaren banaketak ezberdinak dira.
- C) y_1 eta y_2 balioez baldintzatutako X aldagaiaren banaketak ezberdinak dira.
- D) y_1 eta y_2 balioez baldintzatutako X aldagaiaren banaketak berdinak dira.
- E) Dena gezurrezkoa.

19. Taula behatuz esan dezakegu:

- A) X, Y aldagaiak independenteki banatzen dira kolektibo horretan.
- B) X, Y aldagaien artean nolabaiteko menpekotasuna somatzen da.
- C) Koerlazio-koefizienteak 1 balioa hartuko du.
- D) Y aldagaia X-ekiko independenteki, baina X aldagaia Y-rekiko dependenteki banatuta daude.
- E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 10

1. Tamainu oso desberdineko bi kolektiboren populazio-piramideak parekatu nahi baditugu, gizonezkoen adin tarteak aurkezten dituzten laukizuzenen azalerek bi kolektibo horietako, honako hauen proportzionalak izan behar dute:

- A) Kolektiboaren gizonezkoen populazio totalarekiko maiztasun erlatiboari.
- B) Kolektiboaren populazio totalarekiko maiztasun erlatiboari.
- C) Tarte bakoitzaren maiztasun absolutu metatuari.
- D) Tarte bakoitzaren maiztasun absolutuari.
- E) Dena gezurrezkoa.

2. T_x aldagai tipifikatua X aldagaiaren $T_x = aX + b$ transformatu lineala izanik, a eskala aldaketaren parametroa, honako hau da:

- A) $-\frac{\bar{x}}{s_x}$
- B) $-\frac{s_x}{\bar{x}}$
- C) $\frac{1}{s_x}$
- D) $\frac{1}{s_x^2}$
- E) Dena gezurrezkoa.

3. Supermerkatu bateko 50 langileen alokairuen kontzentrazio-maila aztertu nahi da. Badakigu guztiek 80.000 pezeta hilean irabazten dutela. Zein izango da Gini-ren indizea?

- A) 0
- B) 0,5
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) Datu gehiago behar dugu Gini-ren indizea ateratzeko.
- E) 1

4. Ondoko adierazpenetatik, zein da balio-indizeari dagokiona?

- A) $\frac{L_{t,0}^p + P_{t,0}^k}{2}$
- B) $\sqrt{L_{t,0}^p P_{t,0}^k}$
- C) $\sqrt{P_{t,0}^p L_{t,0}^k}$
- D) $\frac{\sum_{i=1}^n p_{it} k_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} k_{i0}} 100$

E) Dena gezurrezkoa.

5. Ondasun baten kasurako $I_{85,80}^p = \% 124$ dela jakinik, zein izango da prezioaren batezbesteko tasa metakorra, 80-85 urte tartetarako?

- A) % 1,24
- B) % 4,4
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) % 10
- E) % 24

6. Aldagai batek berekiko duen kobariantza beti izango da:

- A) Bere bariantza.
- B) 0
- C) 1
- D) Bere bariantzaren alderantzizkoa.
- E) Dena gezurrezkoa.

7. Zein baieztapen da egiazkoa hurrengo kontingentzi taularako?

- A) Indibiduo guztien % 70ak, x_2 balioa hartzen du.
- B) y_2 balioa hartzen duten indibiduen % 50ak, X aldagaiaren balio bezala x_1 balioa hartzen du.

- C) x_1 balioa hartzen duten indibiduen % 50ak, Y aldagaiaren balio bezala y_2 balioa hartzen du.
- D) Indibiduo guztien % 20ak, x_1 balioa hartzen du.
- E) Dena gezurrezkoa.

X/Y	y_1	y_2	y_3	$n_{i.}$
x_1	n_{11}	20	n_{13}	40
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$n_{2.}$
$n_{.j}$	$n_{.j}$	$n_{.j}$	$n_{.j}$	100

8. Aurreko taularako: indibiduen zein portzentaia hartu beharko luke y_2 balioak, X, Y aldagaiak indibiduo horietan independenteki bana daitezen?

- A) % 0,5
- B) % 50
- C) % 20
- D) % 30
- E) Dena gezurrezkoa.

9. $\hat{X}(Y)$ karratu txikiaren erregresio linealaren ondoko zein propietate da egokia?

- A) $\bar{\hat{x}} = \bar{e}$
- B) $S_{x,\hat{x}} = 0$
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) $S_{ey} = 0$
- E) $S_{\hat{x}}^2 = S_x^2 + S_e^2$

10. Kolektibo batean X, Y aldagaiak neurtu ondoren, ondoko emaitza lortu da: $r_{xy} = 0$. Karratu txikiaren erregresioan $\hat{X}(Y)$, $\hat{Y}(X)$ zuzenak, noizbait batera etorriko dira? Noiz?

- A) Ez, elkartzutat (perpendikularrak) dira.
- B) Bai, errore guztiak zero direnean.
- C) Bai, malda berbera daukatenean.
- D) Ez, zuzen horiek 45° tako angelua osatuko dute.
- E) Dena gezurrezkoa.

Ondoko 8 galderak (11-18) Karratu Txikiaren Erregresio Anizkoitzari eta Koerlazio Partzialari dagozkie.

11. X_1 aldagaia X_2 , X_3 aldagaiekin koerlazio gabea baldin bada, honako hau esan daiteke: X_1 aldagaiaren kobariantza X_2 , X_3 aldagaien edozein ($aX_2 + bX_3$) konbinazio linealekin, izango da:
- A) abS_{x_1}
 B) $aS_{x_2x_3} + bS_{x_1x_2}$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 0
 E) $\frac{S_{x_1}}{a\sqrt{S_{x_2}} b\sqrt{S_{x_3}}}$
12. $\hat{X}_1(X_2X_3)$ erregresioaren X_1 menpeko aldagaiaren bariantzaren deskonposaketa batukorra balio estimatuen bariantzan eta hondar-bariantzan betetzen da:
- A) Inoiz.
 B) Doikuntzaren egokitasuna gutxienez % 90koa denean.
 C) $\bar{x}_1 \neq \hat{\bar{x}}_1$
 D) Beti.
 E) Dena gezurrezkoa.
13. $\hat{T}_1(T_2T_3)$ erregresioaren, $\hat{T}_1 = 0,6T_2 + 0,3T_3$ planoaren ekuazioa emanik, honako hau esan dezakegu.
- A) X_3 aldagaiaren unitate bateko gehikuntza bakoitzarentzat, X_1 aldagaiari unitate bateko gehikuntza dagokio.
 B) X_2 aldagaiaren aldagai tipifikatuaren unitate baten gehikuntzarentzat, X_1 aldagaiari aldagai tipifikatuari 0,6 unitateko gehikuntza dagokio T_3 -ren balioa konstante mantenduz.
 C) X_3 aldagaiaren 0,3 unitateko gehikuntza bakoitzarentzat, X_1 aldagaiari unitate bateko gehikuntza dagokio.
 D) X_2 aldagaiaren unitate bateko gehikuntza bakoitzarentzat, X_1 aldagaiari 0,6 unitateko gehikuntza dagokio T_3 -ren balioa konstante mantenduz.
 E) Dena gezurrezkoa.
14. Zein da adierazpen egokia (X_1, X_2, \dots, X_n) aldagaiarentzat?
- A) $|L| = S_1S_2S_3 \dots S_n |R|$
 B) $|L| = S_1S_2S_3 \dots S_n \frac{1}{|R|}$
 C) $|L| = S_1^2S_2^2S_3^2 \dots S_n^2 \frac{1}{|R|}$

$$D) |L| = S_1^2 S_2^2 S_3^2 \dots S_n^2 |R|$$

E) Dena gezurrezkoa.

15. $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ erregresioarentzat, ondoko emaitzak lortu dira: $\beta_{13} = -1,7$ eta $\beta_{12} = 0,3$. Ondoko baieztapenetatik, zein da zuzena?

A) Ezin dugu baieztatu aldagai batek besteak baino indar erlatibo gehiago daukanik, ez baititugu b_{12} eta b_{13} koefizienteak ezagutzen.

B) X_3 aldagaiak X_2 aldagaiak baino indar erlatibo gehiago dauka erregresio horretan.

C) β koefizienteak ezin dira inoiz negatiboak izan.

D) X_2 aldagaiak X_3 aldagaiak baino indar erlatibo gehiago dauka erregresio horretan $\beta_{12} < 0$ delako.

E) Dena gezurrezkoa.

16. Ondoko adierazpenetatik, zein da zuzena?

$$A) b_{12} = \frac{S_1 R_{12}}{S_2 R_{11}}$$

$$B) b_{12} = \frac{R_{12}}{R_{11}}$$

$$C) b_{12} = -\frac{R_{12}}{R_{11}}$$

$$D) b_{12} = -\frac{S_1 R_{12}}{S_2 R_{11}}$$

E) Dena gezurrezkoa.

17. Esaten badugu “ X_1 , X_2 aldagaien bidez egindako erregresioen hondarren koerlazio totala”, honako hau da:

A) $r_{12.3}$

B) r_{12}

C) Dena gezurrezkoa.

D) r_{23}

E) r_{13}

18. Zein da $\beta_{12} = 0,8$, $r_{12.3} = 0,7$, $b_{12} = 1,2$ datuek daukaten bateraezintasuna?

A) β_{12} erregresio partzial standardizatuaren koefizienteak ezin du b_{12} erregresio-koefizientea baino txikiago izan.

B) Bat ere ez.

C) b_{12} erregresio-koefizienteak ezin du 1 baino handiagoa izan.

- D) β_{12} erregresio partzial standardizatuaren koefizienteak ezin du $r_{12.3}$ koerlazio-koefiziente partziala baino handiagoa izan.
- E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA II

1. $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ izanik, ondoko banaketa bakunaren mediana, hauxe izango da:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
n_i	1	2	4	5	4

- A) $\frac{x_4 + x_5}{2}$
- B) $\frac{x_4 - x_5}{2}$
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) Moda bezalakoa.
- E) x_3
2. Aldagai batek eta beraren edozein transformazio linealak, beti, daukate:
- A) Batezbesteko berbera.
- B) Bariantza berbera.
- C) Aldakuntza-koefiziente berbera.
- D) Kurtosi edo zorrotasun berbera.
- E) Dena gezurrezkoa.
3. A enpresan 50 milioiko mozkina bere 20 bazkideen artean banatu da. B enpresan, aldiz, 100 milioiko mozkina bere 40 bazkideen artean banatu da. Zein izango da banaketa hauen kontzentrazio-indizeen arteko erlazioa?
- A) $I_G(B) = \frac{1}{2} I_G(A)$
- B) $I_G(B) = 2I_G(A)$
- C) $I_G(B) \neq I_G(A)$
- D) $I_G(B) = I_G(A)$
- E) I_G balioa enpresa bakoitzaren banaketaren menpe dago.
4. Ondoko prezioen eta balioen indizeak $P_{85.80}^p = 180$, $B_{85.80} = 179,6$ jakinik, zein izango da $L_{85.80}^k$ kopuruen indizea?
- A) 116,42
- B) 99,78
- C) 100,2

- D) 100
E) Dena gezurrezkoa.
5. Ondoko adierazpenetatik, zein da Paasche-ren prezio-indizearen ponderazioari dagokiona?
- A) $p_{i0}k_{i0}$
B) $p_{i0}k_{it}$
C) Dena gezurrezkoa.
D) I_{i0}^p
E) $p_{it}k_{i0}$
6. X, Y aldagai estatistikoentzat, beti, honako hau betetzen da:
- A) $S_{x+y}^2 \geq 2S_{xy}$
B) $S_{x+y}^2 = S_x^2 + S_y^2 - 2S_{xy}$
C) $S_{x+y}^2 = S_x^2 + S_y^2$
D) $S_{x+y}^2 = S_{xy}$
E) Dena gezurrezkoa.
7. Kolektibo batean, aldagai batek hartzen dituen balioak, beste batek hartzen dituenekiko independenteki banatzen badira, hauxe esan dezakegu:
- A) Bi aldagaien balioak ibil-zentzu berean aldatzen dira.
B) Bi aldagaien balioak gorantz eta beherantz batera dijoaz oszilatuz.
C) Aldagai baten balioen banaketa beste aldagaiaren balioak aldatzean aldatzen da.
D) Bi aldagaien balioak alderantzizko ibil-zentzuan aldatzen dira.
E) Dena gezurrezkoa.
8. (X,Y) aldagai bikoitzaren banaketa adierazten duen kontingentzi taularako, X-ek baldintzatutako Y aldagaiaren banaketa baldintzatuak:
- A) Bazter-banaketak bezainbeste izango dira.
B) X aldagaiak hartzen dituen balio desberdinak bezainbeste izango dira.
C) Y aldagaiak hartzen dituen balio desberdinak bezainbeste izango dira.
D) Kolektiboak dituen indibiduoak bezainbeste izango dira.
E) Dena gezurrezkoa.
9. $\hat{X}(Y)$ K.T.E. linealerako, ondoko adierazpenetatik, zein da egokia?
- A) $S_e^2 = S_y^2(1 - r_{xy}^2)$

$$B) 1 = \frac{S_x^2}{S_x^2} + \frac{S_e^2}{S_x^2}$$

C) Dena gezurrezkoa.

$$D) b_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

$$E) r_{xy}^2 = \frac{S_y^2}{S_y^2}$$

10. $\hat{T}_x(T_y)$ erregresio tipifikatua emanik, zein izango da r_{xy}^2 -ren balioa $S_{\hat{T}_x}^2 = 0,34$ baldin bada?

A) $r_{xy}^2 = 1$

B) $r_{xy}^2 > S_{\hat{T}_x}^2$

C) $r_{xy}^2 = 0,8$

D) $r_{xy}^2 = 0,34$

E) Dena gezurrezkoa.

Hurrengo 8 galderak (11-19) Karratu Txikienen Erregresio Anizkoitzari eta Koerlazio Partzialari dagozkie.

11. Ondokoetatik, zein da $L_{(3 \times 3)}$ matrize baten adjuntuen arteko erlazio egokia?

A) $L_{12} = S_1 S_2 S_3 R_{12}$

B) $L_{12} = S_1 S_2 S_3 R_{12}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $L_{12} = S_1^2 S_2^2 S_3^2 R_{12}$

E) $L_{12} = S_1 S_2 S_3^2 R_{12}$

12. $X_{(4 \times 4)}$ datu-matrizea eta dagokion kobariantza-matrizea baldin badauzkagu, $\hat{X}_3(X_1, X_2)$ erregresioaren koefizienteak, honako matrizearen adjuntuen bidez kalkulatuko ditugu:

A) Edozein $L_{(3 \times 3)}$ matrizea.

B) $L_{(4 \times 4)}$ matrizea.

C) $L_{(4 \times 4)}$ matrizearen laugarren errendaka eta laugarren zutabea kendu ondoren daukagun $L_{(3 \times 3)}$ matrizea.

- D) Datu matrizearen lau aldagaien datuak baldin baditugu, ezin da $\hat{X}_3(X_1, X_2)$ bezalako doikuntzarik egin.
- E) Dena gezurrezkoa.
13. Kolektibo batean, $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ eta $\hat{X}_2(X_1, X_3)$ erregresioak burutu dira. Ondoko emaitzetatik, zein da posible ez dena?
- A) $\beta_{12} = 0, \beta_{21} = 0$
- B) $\beta_{12} = 0,8, \beta_{21} = 0,8$
- C) $\beta_{12} = -1,8, \beta_{21} = 1,4$
- D) $\beta_{12} = -0,3, \beta_{21} = -0,9$
- E) $\beta_{12} = 0,7, \beta_{21} = 0,9$
14. $\hat{X}_4(X_1, X_2, X_3)$ erregresioarentzat eta $L_{41} = -2,222, L_{42} = 2,264, L_{43} = -3,232, L_{44} = 2,380$ direla jakinik, zein izango da β_{41} balioa?
- A) $-0,85$
- B) $0,933$
- C) $-1,071$
- D) $1,169$
- E) Emandako datuekin ezin da kalkulatu.
15. Ondoko adierazpenetatik, zein da egokia?
- A) $\beta_{12} = -\frac{L_{11}}{L_{12}}$
- B) $\beta_{12} = \frac{S_1}{S_2} b_{12}$
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) $\beta_{12} = \frac{S_1 R_{12}}{S_2 R_{11}}$
- E) $\beta_{12} = -\frac{S_1}{S_2} b_{12}$
16. Edozein erregresio anizkoitzean, errore karratuen batezbestekoa, beti, hauxe da:
- A) Erregresioan azaldutako menpeko aldagaiaren bariantzaren zatia.
- B) Erroreen bariantza.
- C) Doikuntzaren egokitasuna.
- D) Zero.
- E) Dena gezurrezkoa.

17. $\hat{X}_2(X_1, X_3)$ erregresiorako, ondoko emaitzak lortu dira: $r_{12} = 0,7$, $\beta_{21} = -0,4$, $r_{23} = 0,9$, $\beta_{23} = 0,8$. Zein izango da egindako doikuntzaren egokitasuna?
- A) % 44
 B) %74
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) % 100
 E) Datu hauen bidez ezin da kalkulatu, r_{12} eta β_{12} balioen zeinua ezberdina delako.
18. Ondoko emaitzak ikusirik: $r_{AB.C} = 0,33$ eta $r_{AB} = 0,5$, honako hau esan dezakegu:
- A) C aldagaiak, A, B aldagaien arteko erlazio negatiboa indartzen du.
 B) C aldagaiak, A, B aldagaien arteko erlazioan ez du eraginik.
 C) C aldagaiak, A, B aldagaien arteko erlazioan eragin positiboa dauka.
 D) Ezin dugu jakin C aldagaiak, A, B aldagaien arteko erlazioan zein eragin daukan.
 E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 12

1. Ondoko taulan, 18 urte baino gehiago duten 100 pertsonaren hileroko tabako-gastua daukagu. 100 pertsona horien arteko hileroko gasturik maizena (maiztasun handiena daukana) gutxi gora-behera da:

gastua (milaka ptatan)	pertsona kopurua
[0 – 2)	23
[2 – 3)	47
[3 – 6)	30

- A) 2.465 pta.
 B) 3.200 pta.
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 2.900 pta.
 E) 3.000 pta.
2. Osasun Sailak, kanpaina bat antolatu behar du tabako-kontsumoaren murrizketa bultzatzeko. Saiakuntza bat burutzean, gehien kontsumitzen duten % 50 pertsonatako lagin batekin hasiko da. Gutxi gora-behera, talde horretan sartuko diren pertsonen gastua, honako balio hau baino gehiago izango da:
- A) 2.000 pta.
 B) 3.000 pta.
 C) 2.700 pta.

- D) 2.574 pta.
E) Dena gezurrezkoa.
3. Aldagai zentratu baten aldakuntza-koefizientea $g_0(x) = 0,5$ bada, esan dezakegu:
- A) Bere sakabanatzea normala kontsidera dezakegu $g_0(x)$ -ren balioa $[0,1]$ tartean dagoelako.
B) Aldagaiaren banaketa oso sakabanatua da batezbestekoarekiko.
C) Aldagai zentratu baten aldakuntza-koefizienteak ezin du 0,5 izan.
D) Bere sakabanatzea, batezbestekoarekiko, txikia da $g_0(x) < 1$ delako.
E) Dena gezurrezkoa.
4. Zein da kurtosi koefizienteen arteko erlazioa, $U = \frac{X - 8}{-3}$ erlazioa jarraitzen duten bi aldagaientzat?
- A) $g_2(X) = -3g_2(U)$
B) $g_2(X) = \frac{1}{-3}g_2(U)$
C) $g_2(X) = g_2(U)$
D) $g_2(X) = -3g_2(U) + 8$
E) Dena gezurrezkoa.
5. Alokairu-banaketaren Gini-ren indizea, enpresa baterako, I_G da. Alokairuak $K = 3,5$ konstante batez biderkatzen badira, nolako izango da $I_{G'}$ Gini-ren indize berria?
- A) $I_{G'} = \frac{1}{3,5}I_G$
B) $I_{G'} < I_G$
C) Dena gezurrezkoa.
D) $I_{G'} = 3,5I_G$
E) $I_{G'} = I_G$
6. Aurreko galderaren adierazburu berberarentzat, zer gertatuko litzateke $K = 0,25$ bada eta gero soldata bakoitzari 25.000 pta gehitzen badiogu?
- A) $I_G = I_{G'}$
B) $I_G < I_{G'}$
C) $I_G > I_{G'}$
D) $I_G = I_{G'} + \frac{25}{K}$
E) Dena gezurrezkoa.

7. Ondasun multzo batentzat, Paasche-ren prezio-indizea eta Laspeyres-en prezio-indizea berdintsuak izango dira t urte batean, honako hau gertatzen bada:
- Paasche-ren prezio-indizea Laspeyres-ena baino handiagoa da beti.
 - Indize biak ez dira inoiz berdinak izango.
 - Gutxienez ondasun baten prezioa t . urtean eta oinarri denboran berdina izango da.
 - Ondasun bakoitzaren prezioa t . urtean eta oinarri denboran berdintsua izango da.
 - Dena gezurrezkoa.
8. Banaketa bikoitx baterako, estatistikoaren arteko $m_{11} = 2(S_x \cdot S_y)$ erlazioa daukagu. Nolako izango da X , Y aldagaien arteko erlazio lineala?
- Alderantzizkoa eta sakona.
 - Zuzena eta ahula.
 - Zuzena eta sakona.
 - m_{11} ikurraren eta balioaren menpe dago.
 - Datu hauek bateraezinak dira.
9. X , Y aldagaiak independenteki banatzen badira taula batean, esan dezakegu:
- $f_{ij}^2 = f_{i.}^2 f_{.j}^2 \quad \forall(i, j)$
 - $\frac{n_{ij}}{n_{.j}} f_{i.} = f_{i.} \quad \forall(i, j)$
 - Dena gezurrezkoa.
 - $\frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \frac{n_{i.}}{N}$ eta $\frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{.j}}{N} \quad \forall(i, j)$
 - $\frac{n_{ij}}{n_{i.}} f_{.j} = f_{.j} \quad \forall(i, j)$
10. $X = \frac{Z}{5}$ eta $Y = \frac{T}{2} - 1$ badira, esan dezakegu:
- $S_{xy} = \frac{1}{5 \cdot 2} S_{zt}$
 - $S_{xy} = 5^2 \cdot 2^2 S_{zt}$
 - $S_{xy} = 5 \cdot 2 S_{zt}$
 - $S_{xy} = \frac{1}{5^2 \cdot 2^2} S_{zt}$
 - Dena gezurrezkoa.

11. X, Y bi aldagai, ez badira independenteki banatzen taula batean, esan dezakegu:
- A) Koerlazioa osoa eta negatiboa izango da.
 - B) Koerlazioa osoa eta positiboa izango da.
 - C) X, Y aldagaiak koerlazio-gabeak izan daitezke.
 - D) Maila bateko erlazio lineala egongo da aldagai horien artean.
 - E) Dena gezurrezkoa.

12. Ondoko taula bikoitzaren aurrean, zein baieztapen da zuzena?

x^Y	0	1	2
2	2	4	2
4	1	2	1
6	2	4	2

- A) X, Y aldagaien arteko erlazio lineala osoa eta alderantzizkoa da.
 - B) X, Y aldagaiak, kolektibo horretan, independenteki banatzen dira.
 - C) X, Y aldagaien arteko erlazio lineala osoa eta zuzena da.
 - D) X, Y aldagaiak, kolektibo horretan, dependenteki banatzen dira.
 - E) Dena gezurrezkoa.
13. Izan bitez X, Y bi aldagai estatistiko tipifikatu; ondoko adierazpenetatik zein da beti zuzena?
- A) $r_{xy} = b_{xy}$
 - B) $r_{xy} = S_x S_y$
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) $r_{xy}^2 = 1$
 - E) $S_x^2 = S_e^2$
14. (X,Y) aldagaien banaketa bikoitz baterako, kobariantza negatiboa dela jakina da eta Y-ren X-ekiko, X-en Y-ekiko erregresioen mugatze-koefizientea 1etik hurbil dagoela:
- A) Bi erregresio-zuzenen arteko angelua 90° tik hurbil dago eta zuzenek malda positiboa daukate.
 - B) Bi erregresio-zuzenen arteko angelua 90° tik hurbil dago eta zuzenek malda negatiboa daukate.
 - C) Bi erregresio-zuzenen arteko angelua 0° tik hurbil dago eta zuzenek malda negatiboa daukate.
 - D) Bi erregresio-zuzenen arteko angelua 0° tik hurbil dago eta zuzenek malda positiboa daukate.
 - E) Dena gezurrezkoa.

15. $\hat{Y}(X)$ KTEL-aren mugatze-koefizientea 1 baldin bada, esan dezakegu:

A) $S_x^2 = S_y^2$

B) $S_e^2 = S_y^2 + S_{\hat{y}}^2$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $S_e^2 = S_y^2 - r_{xy}$

E) $S_{\hat{y}}^2 = S_y^2$

16. $S_x^2 = S_y^2$ baldin bada K.T.E.L. baterako, beteko da:

A) $S_e^2 = S_y^2(1 - b_{xy}^2)$

B) $r_{xy} = 1$

C) $r_{xy} = S_{xy}$

D) $S_e^2 = 1$

E) Dena gezurrezkoa.

17. $b_{xy} = -0,6$ eta $b_{yx} = 0,6$ baldin badira, esan dezakegu:

A) $r^2 = -0,36$

B) $r_{xy} = 0,36$

C) Erantzun hauek ez dira bateragarriak.

D) $r_{xy} = -0,36$

E) $r_{xy}^2 = 0,36$

18. $\hat{X}(Y)$ karratu txikiaren erregresio linealaren $b_{xy} = -0,9$ emaitza ikusirik, baieztatu dezakegu:

A) Egindako doikuntza oso egokia da b_{xy} balioa 1etik oso hurbil dagoelako.

B) Egindako doikuntza ez da egokia $b_{xy} < 1$ delako.

C) Erregresio-koefizienteak ezin dira negatiboak izan.

D) Azaldutako bariantzaren portzentaia % 90ekoa da.

E) Dena gezurrezkoa.

19. Ondoko propietateetatik, zein ez da beti zuzena?

A) $S_x^2 = S_{\hat{x}}^2 + S_e^2$

B) $\bar{e} = 0$

- C) $0 \leq r_{xy}^2 \leq 1$
- D) $S_{x+y}^2 = S_x^2 + S_y^2$
- E) $\hat{y} = y - e$

GALDERA-SORTA 13

1. X_i : -4, -3, 0, 2, 5, aldagaiaren balioak izanik:

- A) Zentratua da.
- B) Tipifikatua da.
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) Batezbestekoa 1 eta desbidazio tipikoa 0 dira.
- E) Kualitatibo diskretua da.

2 X aldagai estatistikoarentzat bi lehen momentu arruntak ezagutzen dira:

$$a_1(X) = -2, \quad a_2(X) = 9$$

$Y = \frac{1}{2} - X$ aldagaiaren aldakuntza-koefizientea da:

A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B) $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$

C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) Dena gezurrezkoa.

3. Aldagai estatistiko baten balio guztiei ikurra aldatzen bazaie:

- A) Desbidazio tipikoaren ikurra ez da aldatzen.
- B) Desbidazio tipikoa zero da.
- C) Desbidazio tipikoaren balioa handiagoa da.
- D) Desbidazio tipikoaren ikurra aldatu egiten da.
- E) Dena gezurrezkoa.

4. X aldagai estatistikoaren banaketak asimetria positiboa dauka 10 indibiduoko kolektibo baterako. $Y = -2X + 3$ aldagaia izanik, nolakoa izango da bere banaketa 10 indibiduoko kolektibo horretarako?

- A) Asimetria positiboa dauka.
- B) Asimetria negatiboa dauka.
- C) Simetrikoa.
- D) Emandako datuen bidez, ezin da jakin.
- E) Dena gezurrezkoa.

5. Ondoko prezio-indize konplexu ponderatua emanik:

$$I_t = \frac{\sum_i W_{it} I_{it}}{\sum_i W_{it}}$$

I_t Laspeyres-en prezio-indizea izan dadin, I_{it} prezio-indize sinpleen balioak eta W_{it} ponderazioak izango dira:

A) $I_{it} = \frac{P_{it}}{P_{io}} 100$, $W_{it} = p_{io} k_{io}$

B) $I_{it} = \frac{k_{it}}{k_{io}} 100$, $W_{it} = p_{io} k_{io}$

C) $I_{it} = \frac{k_{it}}{k_{io}} 100$, $W_{it} = p_{io} k_{it}$

D) $I_{it} = p_{it} 100$, $W_{it} = k_{io}$

E) Dena gezurrezkoa.

6. Ondasun baterako, badakigu $I_{89,83} = 155$ eta $I_{83,84} = 95$ direla. Ondasun honen batezbesteko hazkunde-tasa metakorra, 84 – 89 urte tartarako, izango da:

A) % 8,04

B) % 10,28

C) % 9,16

D) % 2,15

E) Dena gezurrezkoa.

7. Merkatu batean, bi fruitu-mota daude: aranak eta sagarrak. Fruitu horien prezioen eboluzioa ikus ahal izateko, ponderazio gabeko indize konplexu bat eraiki nahi da.

A) Ezin da eraiki indize bat ezaugarri horientzat.

B) Laspeyres-en prezio-indizea aukeratuko dugu.

C) Paasche-ren prezio-indizea aukeratuko dugu.

- D) Batezbesteko aritmetiko sinplearen indizea aukeratuko dugu.
E) Dena gezurrezkoa.
8. Zein da n_{22} balioa 2×2 maiztasun taula batean, $n_{11} = 2$, $n_{12} = 3$, $n_{21} = 4$, $f_{22} = 0,5$ direla jakinik?
- A) 5
B) 0,5
C) 11
D) 9
E) Dauzkagun datuen bidez, ezin dugu jakin.
9. $S_{XY} = -0,58$ bada, baieztatu dezakegu:
- A) X, Y aldagaiak ez direla independenteak.
B) X, Y aldagaiak independenteak direla.
C) X, Y aldagaiak koerlazio gabeak dira.
D) Ez dagoela erlazio linealik X, Y aldagaien artean.
E) Aurreko erlazioetatik, bat ere ezin dugu baieztatu.
10. X, Y aldagaiak 5 indibiduoko kolektibo batean neurtu dira, $f_{ij} = f_i \cdot f_j \quad \forall i, j$ direla lortuz. Emaizta honen aurrean, kolektibo horrentzat esan dezakegu:
- A) X, Y dependenteki banatzen dira.
B) X, Y aldagaiek erlazio lineal sakona eta zuzena daukate.
C) X, Y aldagaiek ez daukate erlazio linealik.
D) X, Y aldagaiak menpekotasunaren kasutik hurbil banatzen dira.
E) Dena gezurrezkoa.
11. $X = aU + b$, $Y = eV + f$, $S_{XY} = S_{UV}$ badira, ziur da:
- A) $|a| = |e| = 1$
B) $ae = 1$
C) a, e-ren edozein balioentzat betetzen da.
D) $a = e = 1$
E) $\sqrt{ae} = 1$
12. Ondoko maiztasun erlatibo bikoitzen banaketa emanik:

x^Y	y_1	y_2
x_1	0,3	0,2
x_2	0,3	0,4

- A) Egokia da, maiztasun erlatiboak direlako.
 B) Ez da egokia, taula bikoitz baten maiztasunak zenbaki arruntak direlako.
 C) Egokia da eta X, Y aldagaien arteko erlazioa zuzena da.
 D) Egokia da eta X, Y aldagaien arteko erlazioa alderantzizkoa da.
 E) Dena gezurrezkoa.
13. K.T.E.L. eta Batezbesteko Erregresioaren artean, ezaugarri amankomuna da:
- A) Erregresio biek doikuntzaren egokitasun berbera daukate.
 B) Erregretzaile eta erregresorearen arteko erlazio lineala, erregresio bien abiapuntua da.
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) Erregresio biek puntu-hodeia zatika laburtzen dute.
 E) Aldagai independentearen balio bakoitzari menpeko aldagaiaren balio bakar bat dagokio.
14. (X,Y) aldagai bikoitz baten banaketarentzat, $S_X^2 = S_Y^2 = 1$ lortu dugu. Y aldagaiaren X-ekiko K.T.E.L.aren zuzenerako, honako hau baieztatu dezakegu:
- A) X-en Y-rekiko K.T.E.L.aren zuzenarekin koinziditzen du.
 B) $b_{XY} b_{YX} = S_{XY}^2$
 C) Aldagai tipifikatuaren aurrean gaude, horrela $\hat{Y} = S_{XY} X$
 D) X-en Y-rekiko K.T.E.L.aren zuzenaren elkartzuta da.
 E) Dena gezurrezkoa.
15. Y-ren X-ekiko doikuntza lineala egitean, Y aldagaiaren (S_Y^2) balio estimatuen bariantza, S_c^2 hondar-bariantzaren hirukoitza bada, doikuntzaren egokitasuna izango da:
- A) % 75
 B) % 25
 C) Ezezaguna, S_Y^2 balioa ez baitugu ezagutzen.
 D) S_Y^2 balioarekiko independentea.
 E) Dena gezurrezkoa.
16. Y-ren X-ekiko doikuntza lineala egitean, S_c^2 balioa zerotik hurbil dagoela ikusten da:
- A) Errore batzuk handiak eta positiboak eta beste batzuk handiak eta negatiboak izango dira; batezbesteko karratikoan, praktikoki, konpentsatu egiten dira.
 B) Doikuntzaren egokitasuna erdizkakoa izango da.
 C) S_Y^2 bariantza gutxi gora-behera S_c^2 bariantzaren bikoitza izango da.

- D) $S_{\hat{Y}}^2$ bariantza S_Y^2 bariantzatik hurbil egongo da.
 E) Dena gezurrezkoa.

17. $\hat{X}(Y)$ K.T.E.L.aren ondoko emaitzak emanik,

$$S_X^2 = 25, S_{\hat{X}}^2 = 20, S_e^2 = 5$$

r_{XY}^2 balioa izango da:

- A) 0,89
 B) 0,2
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 0,8
 E) Dauzkagun datuekin ezin da kalkulatu.
18. Izan bitez X, Y koerlazio gabeko bi aldagai kolektibo batean. Esan dezakegu:
- A) $r_{XY}^2 = 1$
 B) $S_{\hat{X}}^2 = S_e^2$
 C) $S_{\hat{X}}^2 = 0$
 D) $S_{XY}^2 = S_X S_Y$
 E) Dena gezurrezkoa.
19. Kolektibo batean neurtutako bi aldagai estatistikoren $S_{XY} = S_X S_Y$ dela jakinik, esan dezakegu:
- A) $r_{XY} = S_{XY}$.
 B) $\hat{X}(Y)$ karratu txikiaren doikuntza lineala, osoa da.
 C) $\hat{Y}(X)$ karratu txikiaren doikuntza linealean estimatutako bariantzaren proportzioa zero da.
 D) X, Y koerlazio gabeko aldagaiak dira.
 E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 14

1. Sektore grafiko batean, sektore bakoitzaren zabalera izango da:

- A) Dagokion tartearen goi eta behe muturren arteko diferentzia.
 B) Dagokion mailaren indibiduen %-rekiko proportzionala.
 C) Dagokion aldagaiaren balioaren indibiduo kopurua.

- D) Dagokion aldagaiaren balioaren maiztasun metatuarekiko proportzionala.
E) Dena gezurrezkoa.
2. Aldagai baten transformazio linealak aplikatzea egokia izango da:
- A) Aldagaia, tartetan taldekatuta dagoenean.
B) Aldagaia, kualitatiboa denean.
C) Aldagaiaren balioak handiak eta korapilatsuak direlako kalkuluak sinplifikatu nahi ditugunean.
D) Estatistiko guztien zeinua aldatu nahi dugunean.
E) Dena gezurrezkoa.
3. (X, Y) aldagai bikoitz baten kontingentzi taula batean, zutabe guztiak elkarrekiko proportzionalak badira, honako hau gertatzen da:
- A) X, Y aldagaien arteko erlazio lineala osoa da.
B) X, Y aldagaien arteko erlazio lineala zuzena eta sakona da.
C) X, Y aldagaien arteko erlazio lineala alderantzizkoa eta sakona da.
D) X, Y koerlazio gabeak dira.
E) Dena gezurrezkoa.
4. X, Y bi aldagai banaketazko independenteak dira baldin eta soilik baldin:
- A) Aldagaiak koerlazio gabeak badira.
B) Bi aldagaien bazter-banaketak berdinak badira.
C) Batezbesteko eta bariantza berbera badauzkate.
D) Y aldagaiaren balio bakoitzaz baldintzatutako X aldagaiaren banaketa baldintzatutak elkarren artean desberdinak badira eta bazter-banaketarekin desberdinak.
E) Dena gezurrezkoa.
5. X aldagai estatistiko batentzat, m_h balioak h . ordenako momentu zentrala edo batezbestekoarekikoa adierazten badu, hurrengo adierazpenetatik zein da zuzena?
- A) $m_3 = m_2 + m_1$
B) $m_3 = m_2 m_1$
C) $m_1 = \bar{x}$
D) $m_1 = 0$
E) Dena gezurrezkoa.
6. Taula batean jasotako banatu behar den alokairu-masaren portzentaia metatuak, alde batetik, eta alokairua jasotzen duten indibiduen portzentaia metatuak, bestetik, erabiliz, ondoko emaitza daukagu: gutxien irabazten duten indibiduen

% 10ak alokairu-masa totalaren % 40a jasotzen du. Nola interpretatuko zenuke horrelako emaitza?

- A) Banaketa oso egokia edo bidezkoa da.
- B) Banaketa kontzentratua da.
- C) Emandako datuak ez dira nahikoak
- D) Emandako datuak ez dira bateragarriak.
- E) Banaketa sakabanatua da.

7. Ondasun baten prezioa % 5ean igo bada 90-91 tartean, % 2an 91-92 tartean eta % 3an jaitsi bada 92-93 tartean, zein izango da ondasun honen prezioaren $I_{93,90}^P$ indize sinplea 1993. urterako, 1990. urtean oinarriturik?

- A) 105
- B) 101,3
- C) 103,89
- D) 97
- E) Dena gezurrezkoa.

8. $I_{91,83}^k = 125$, $I_{92,83}^k = 130$ indizeak emanik, hurrengo adierazpenetatik zein da zuzena?

- A) Kopuruek %5eko gehikuntza izan dute 91-92 tartean.
- B) Kopuruek %130eko gehikuntza izan dute 91-92 tartean.
- C) Kopuruek %5eko murrizketa izan dute 91-92 tartean.
- D) Kopuruek %4ko gehikuntza izan dute 91-92 tartean.
- E) Dena gezurrezkoa.

9tik 18ra doazen galderak, (K.T.E.L.) Karratu Txikiaren Erregresio Linealari dagozkio.

9. T_x , T_y aldagai tipifikatuen $\hat{T}_x = 0,8T_y$, $\hat{T}_y = 0,45T_x$ K.T.E.L.ren zuzenak izanik, kolektibo bati dagozkionak izan ahal daitezke?

- A) Bai.
- B) Ez, $b_{T_x T_y}$ eta $b_{T_y T_x}$ koefizienteek berdinak izan behar dutelako.
- C) Ez, koefizienteen biderkadurak 1/2 baino txikiagoa izan behar duelako.
- D) Ez, koefiziente batek 1 baino handiagoa izan behar duelako.
- E) Dena gezurrezkoa.

10. $\hat{X}(Y)$ erregresiorako, emaitza hauek lortu dira: $S_x^2 = 25$, $S_c^2 = 18$. $\hat{U}(V)$ erregresiorako, ordea, $S_u^2 = 25$, $S_c^2 = 18$ lortu dira. Zein izango da erregresiorik egokiena?

- A) Biak berdina dira, hondar-bariantza berdina delako.
 B) Bigarrena, doikuntzaren egokitasuna handiagoa delako.
 C) Lehenengoa, doikuntzaren egokitasuna handiagoa delako.
 D) Biak berdina dira, doikuntzaren egokitasuna berbera delako.
 E) Dena gezurrezkoa.
11. (e) erroreak, X_1 aldagaiaren X_2 , X_3 aldagaiekiko erregresioarenak dira. Zein izango da e errore horien eta X_4 aldagai berriaren arteko kobariantza, $X_4 = bX_2 + a$ bezala definiturik eta a, b konstanteak izanik?
- A) 0
 B) $bS_{x_2e} + a$
 C) $bS_{\hat{x}_1x_2}$
 D) $S_{\hat{x}_1x_2}$
 E) Dena gezurrezkoa.
12. X_1 , X_2 , X_3 , hiru aldagairen arteko erregresio batean, zein da β_{21} koefizientearen adierazpena?
- A) $\frac{R_{12}}{R_{11}}$
 B) $\sqrt{\frac{R_{11}}{R_{22}}}r_{12.3}$
 C) $-\frac{S_1}{S_2}b_{21}$
 D) $\frac{-R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}$
 E) Dena gezurrezkoa.
13. Ondoko matrizea emanik,

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ & 16 & 10 \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

eta $\hat{X}_3(X_1, X_2)$ erregresioaren erroreen bariantzak 2 balio duela jakinik, mugatze-koefiziente anizkoitza izango da:

- A) $0,77\hat{7}$
- B) 0,5
- C) 0,875
- D) Dena gezurrezkoa.
- E) 1,105

14. X_1 aldagaiaren X_2, \dots, X_n aldagaiekiko erregresio lineala egin ondoren $S_{\hat{x}_1}^2 = 0,7$ dela lortu dugu. Esan dezakegu egindako doikuntzaren egokitasuna izango dela:

- A) % 70
- B) n aldagaien kopurua jakin behar dugu.
- C) S_e^2 jakin behar dugu.
- D) % 30
- E) Dena gezurrezkoa.

15. R matrizearen adjuntuen matrizea jakinik,

$$A_R = \begin{pmatrix} 0,42 & -0,46 & 0,06 \\ & 0,54 & -0,09 \\ & & 0,04 \end{pmatrix}$$

zein izango da $r_{23,1}$ koerlazio partzialaren balioa?

- A) 0,612
- B) -0,612
- C) -0,96
- D) 0,96
- E) Dena gezurrezkoa.

16. X_1, X_2, X_3 hiru aldagai estatistikoentzat, ondoko emaitzak lortzen baditugu, $r_{12,3} = -0,1$ eta $r_{12} = 0,7$, honako hau esan dezakegu:

- A) X_3 aldagaiak eragin negatibo handia dauka X_1 aldagaian eta positiboa X_2 aldagaian.
- B) X_3 aldagaiak eragin negatibo handia dauka X_1, X_2 aldagaien arteko erlazioan.
- C) X_3 aldagaiak eragin positibo handia dauka X_1, X_2 aldagaien arteko erlazioan.
- D) X_3 aldagaiak eragin negatibo handia dauka X_1 aldagaian eta baita X_2 aldagaian ere.
- E) Adierazburua ez da zuzena. Ezin dira lortu r_{12} eta $r_{12,3}$ zeinu desberdinekin.

17. X_1 aldagaiaren X_2 , X_3 aldagaiekiko doikuntza egin ondoren eta L matrizearen adjuntuen matrizea ondokoa izanik,

$$A_L = \begin{pmatrix} 0,0625 & -0,25 & -0,125 \\ & 1 & -0,5 \\ & & 0,25 \end{pmatrix}$$

zein izango dira b_{12} eta b_{13} balioak?

- A) $b_{12} = 4$ eta $b_{13} = -2$
 B) $b_{12} = -4$ eta $b_{13} = -2$
 C) $b_{12} = 4$ eta $b_{13} = 2$
 D) $b_{12} = -4$ eta $b_{13} = 2$
 E) Dena gezurrezkoa.
18. $L(X_1, X_2, X_3, X_4)$ matrizea jakinik, X_1 aldagaiaren erregresioa erregresore bakar batekiko egin nahi da. Zein aldagai baztertuko genituzke analisitik?
- A) X_4
 B) X_1 -ekin kobariantzarik txikiena daukatenak.
 C) X_1 -ekin koerlazio txikiena daukatenak.
 D) X_1 -ekin koerlazio negatiborik handiena daukatenak.
 E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 15

1. Barra-diagrama batean, altuera berdineko bi barra baditugu, honako hau esan dezakegu:
- A) Aldagai horren batezbesteko aritmetikoa barra horiei dagozkien balioen tartean egongo da.
 B) Aldagai horren bi balioek maiztasun berbera daukate.
 C) Ezin da inoiz horrelakorik gertatu.
 D) Aldagai estatistiko bimodala da.
 E) Dena gezurrezkoa.
2. Izan bedi $Y = aX + b$ ($a, b \neq 0$) X aldagai tipifikatu baten transformazio lineala; orduan:
- A) $g_0(Y) = |a|$
 B) $S_Y = 1$
 C) $g_0(Y) = \frac{|a|}{b}$

- D) $S_Y^2 = a^2 + b$
E) Dena gezurrezkoa.
3. (X,Y) aldagai bikoitz baten kontingentzi taula batean f_{ij} maiztasun erlatibo guztien batura, honako hau da:
- A) -1 baino handiagoa eta 1 baino txikiagoa den balio bat.
B) 0 baino handiagoa eta 1 baino txikiagoa den balio bat.
C) Kolektiboaren tamainua.
D) Aldagai baten bazter-maiztasun erlatiboaren batura.
E) Dena gezurrezkoa.
4. X, Y aldagaiak, independenteki banatzen dira kolektibo batean, honako kasu honetan:
- A) $f_{ij} = n_i \cdot n_j \quad \forall(i, j)$
B) $f_{ij} = f_{i.} + f_{.j} \quad \forall(i, j)$
C) $n_{ij} = \frac{n_i \cdot n_j}{N} \quad \forall(i, j)$
D) $n_{ij} = f_{i.} \cdot f_{.j} \quad \forall(i, j)$
E) $n_{ij} = n_{i.} + n_{.j} \quad \forall(i, j)$
5. X aldagai bakun baterako 3. ordenako momentu zentrala lortzen badugu ($m_3(X)$) eta negatiboa bada,
- A) Ezin dugu ezer esan aldagai horren simetriari buruz.
B) X-ek ezkerraldeetik edo asimetria negatiboa dauka.
C) X-ek eskuinaldeetik edo asimetria positiboa dauka.
D) X-ek banaketa simetrikoa dauka.
E) Dena gezurrezkoa.
6. Banaketa baten kontzentrazio-indizea 0 baldin bada, zein izango litzateke Q_i balioa $P_i = \% 30$ denean?
- A) $\% 0$
B) $\% 10$
C) Ez dugu datu nahikorik.
D) $\% 100$
E) Dena gezurrezkoa.

7. Ondasun baten prezioa 90-91 tartean % 5ean eta 91-92 tartean % 2an igo bada, eta % 3an jeitsi bada 92-93 urte tartean, zein izango da ondasun honen $I_{93,90}^P$ prezio-indize sinplea 1993. urterako 1990. urtean oinarriturik?
- A) 103,89
 B) 101,3
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 97
 E) 105
8. $P_{87,80}^P = 89$, $F_{87,80}^P = 79,17$, indizeak emanik, zein izango da $L_{87,80}^P$ Laspeyres-en prezio-indizea?
- A) 168,17
 B) 84,09
 C) 83,9
 D) 74,34
 E) Dena gezurrezkoa.

9tik 18ra doazen galderak, Karratu Txikiaren Erregresio Linealari dagozkio.

9. $\hat{Y}(X)$ K.T.E.L.aren $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 4$, $b_{yx} = 0,9$ datuak jakinik, zein izango da $x = 3$ balioa hartzen duen indibiduo baten balio estimatua?
- A) 0,9
 B) 7
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) 3
 E) 4
10. Ondoko Karratu Txikiaren Erregresio Linealaren zuzenak emanik, $\hat{X} = 0,8Y - 0,6$; $\hat{Y} = 0,92X + 1,5$ eta kolektibo berbererako lortuak izanik, zein izango da r_{xy} balioa?
- A) -0,736
 B) 0,92
 C) Zero, ez dutelako kointziditzen.
 D) 0,736
 E) Dena gezurrezkoa.

11. $b_{12} = 0,27$, $S_2^2 = 900$ eta $S_1^2 = 100$ izanik, β_{12} balio izango da:
- A) $-0,75$
 - B) $2,43$
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) $-0,03$
 - E) $0,75$
12. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioa izan dadin, ondoko baieztapenetatik zein da gezurrezkoa?
- A) Erregresioan eragin gehien daukan aldagaia b koefizientea handiena daukana izango da.
 - B) β_{12} koefizienteak X_2 erregresorearen indar erlatiboa neurtzen digu erregresioan.
 - C) β_{12} koefizienteak X_2 , \hat{X}_2 aldagaien arteko erlazioaren zeinua adierazten du.
 - D) b_{12} koefizienteak \hat{X}_1 , X_2 aldagaien arteko erlazioaren zeinua adierazten du.
 - E) β_{12} koefizientea b_{12} koefizientearen balioaren menpe dago.
13. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ erregresioan, $\bar{\hat{x}}_1$ izango da:
- A) Bariantza totalarekiko bariantza estimatuaren portzentaiaren menpekkoa.
 - B) 0
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) \bar{x}_1 balioa.
 - E) \bar{x}_1 balioa baino txikiagoa.
14. X_1 aldagaiaren X_2 , X_3 aldagaiekiko doikuntza egiten badugu, $S_{X_1}^2 = 1,3$ eta $S_e^2 = 0,3$ direla dakigu; doikuntzaren egokitasuna izango da:
- A) Ezin da lortu.
 - B) $\% 81,25$
 - C) $\% 100$, $S_e^2 < 5$
 - D) $\% 23,07$
 - E) Dena gezurrezkoa.
15. Zein izango da $r_{23.1}$ koerlazio-koefiziente partzialaren balioa, $r_{12} = 0,9$, $r_{13} = 0,8$ eta $r_{23} = 0,7$ direla jakinik:
- A) $-0,141$
 - B) $0,374$
 - C) Datuak bateraezinak dira, emaitza negatiboa lortzen dugulako.

- D) $-0,076$
 E) $0,783$

16. $r_{12,3} = 0$ eta $r_{12} = 0,75$ izanik, honako hau baieztatu dezakegu:

- A) X_1, X_2 koerlazio gabeak dira.
 B) X_3 aldagaiaren balio konstanteentzat, X_1, X_2 koerlazio gabeak dira.
 C) Adierazburuaren datuak zentzugabeak dira.
 D) Hirugarren aldagaiak ez digu garrantzizko informaziorik ematen X_1, X_2 aldagaien arteko erlazioari buruz.
 E) Dena gezurrezkoa.

17. X_1 aldagaiaren X_1, X_2 aldagaiekiko erregresioaren errore karratuen batezbestekoa honela adieraz daiteke:

- A) $\frac{|R|}{R_{11}}$
 B) $\frac{|L|}{L_{11}}$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) $\frac{|R|}{R_{11}S_1^2}$
 E) $\frac{|L|}{L_{11}S_1^2}$

18. Izan bedi $\hat{X}_1 = a + b_{12}X_2 + b_{13}X_3$ erregresioa. Ondoko baieztapenetatik, zein da gezurrezkoa?

- A) $S_{x_2e} = 0$
 B) $S_{\hat{x}_1e} = 0$
 C) $\bar{\hat{x}}_1 = \bar{x}_1$
 D) $S_e^2 = S_{\hat{x}_1}^2(1 - r_{1.23}^2)$
 E) $\bar{e} = 0$

GALDERA-SORTA 16

1. Aldagai jarrai baten banaketari dagokion histograma eraikitzean, tarte bakoitzari dagokion laukizuzenaren azalera ondorengo balio honen proportzionala izango da:
 - A) Maiztasun absolutua.
 - B) Maiztasun erlatibo metatua.
 - C) Maiztasun absolutu metatua.
 - D) Tartearen unitate bakoitzeko maiztasuna.
 - E) Dena gezurrezkoa.

2. X aldagaiaren banaketarentzat $m_4 = 2S_x$ lortu da. Esan dezakegu:
 - A) X-en banaketa, Normala bezain zorrotza da $S_x^3 = 2 / 3$ baldin bada.
 - B) X-en banaketa, Normala baino zorratzagoa da $S_x^3 > 2 / 3$ baldin bada.
 - C) X-en banaketa, Normala baino zapalagoa da $S_x^3 < 2 / 3$ baldin bada.
 - D) X-en banaketa eskuinerantz asimetrikoa da $S_x^3 > 2 / 3$ baldin bada.
 - E) Dena gezurrezkoa.

3. A enpresak langileen alokairua bikoiztea erabaki du uztaileako. B enpresak, ordea, langile bakoitzari 200.000 pezetako ordainketa berezia eman nahi dio, hilabete horretan. Ondoko baieztapenetatik, zein da zuzena?
 - A) Uztaileko I_G eta beste hilabetekoa berdinak dira bi enpresentzat.
 - B) Uztailean, A enpresaren I_G indizeak beste hilabetekoa bikoiztu egiten du.
 - C) A enpresaren I_G indizea B enpresarena baino handiagoa izango da urte guztian zehar.
 - D) Uztailean, B enpresaren I_G indizea beste hilabeteekiko jaitsi egin da.
 - E) Dena gezurrezkoa.

4. Kontingentzi taula batean, erlatiboki adierazita, beti betetzen da:
 - A) $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_j} \cdot \frac{n_{ij}}{n_i} \quad \forall i, j$
 - B) $\frac{n_{ij}}{n_j} = f_{i.} \cdot f_{.j} \quad \forall i, j$
 - C) $\frac{n_{ij}}{n_j} = \frac{n_{ij}}{n_i} \cdot f_{i.} \quad \forall i, j$

$$D) \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = f_{i.} \quad \forall i, j$$

$$E) f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} \cdot f_{i.} \quad \forall i, j$$

5. Ondasun baten kontsumatutako kopurua % 40a igo da 1990-1994 urte tartean. Zein izango da kopuru horren urteroko batezbesteko hazkunde-tasa metakorra?

- A) % 0,79
- B) % 40
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) % 8,77
- E) % 10

6. Zein da $I_{90,93}^p$ indizea, $I_{93,90}^p = 114,7$ bada?

- A) % 87,26
- B) % 114,6
- C) Ezin da kalkulatu, emandako datua, beste oinarri batean baitago.
- D) % 100
- E) Dena gezurrezkoa.

7. X, Y bi aldagai estatistikorentzat $\bar{x} = 30,3$, $\bar{y} = 34,7$, $S_x^2 = 88,28$, $S_y^2 = 177,91$ direla dakigu. Zein da S_{xy} balioa?

- A) 150
- B) 100
- C) Ez dugu datu nahikorik.
- D) 125
- E) 75

8. $X = 1 + 5U$, $Y = 3 - V$, $S_{xy} = 1,5$, $S_x = 2$, $S_y = 1$ baldin badira, honako hau esan dezakegu:

- A) $r_{uv} = 1,5$
- B) $r_{uv} = 0,75$
- C) $S_{uv} = -0,3$
- D) $S_{uv} = +0,3$
- E) $S_{uv} = 7,5$

9-19 tarteko galderak Karratu Txikienen Erregresio Linealari (K.T.E.L.) dagozkio.

9. Ondoko adierazpenetatik, zein da puntu-hodei bikoitz batean doitutako zuzenari dagokiona $S_x^2 = 12$, $S_y^2 = 6$, $S_{xy} = 0$ baldin badira?
- A) $\hat{X} = \bar{x}$
B) $\hat{X} = \bar{y}$
C) Dena gezurrezkoa.
D) $\hat{X} = 0$
E) $\hat{X} = Y - \bar{y}$
10. K.T.E.L.aren zuzena $\hat{Y} = 3 + 2X$ baldin bada, zein izango da doikuntza honetan egindako errorea (3,5) koordinatuak dituen indibiduo batentzat?
- A) 4
B) - 4
C) 10
D) Doikuntzaren egokitasuna ezagutzea beharrezkoa da.
E) Dena gezurrezkoa.
11. (X_1, X_2, X_3) hiru aldagai estatistikorentzat $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 1$ batezbestekoak, $L_{12} = -L_{11}$ eta $L_{13} = 0$ direla dakigu. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ doikuntzaren jatorriaren ordenatua izango da:
- A) 1
B) - 1
C) 0
D) 2
E) Dena gezurrezkoa.
12. (X_1, X_2, X_3) hiru aldagaientzat $S_2 = 1$, $S_3 = 2,5$, $R_{13} = 4$ eta $R_{12} = 2$ direla dakigu. Honako hau betetzen da:
- A) $b_{13} = 4/5 b_{12}$
B) $b_{13} = b_{12}$
C) X_1, X_2, X_3 aldagaiak koerlazio gabeak dira.
D) $b_{13} = -b_{12}$
E) $b_{13} = 0$

13. (X_1, X_2, X_3) hiru aldagai estatistikorentzat $r_{12} = 1/3$, $r_{13} = 1/4$, $\beta_{12} = 0,6$ eta $\beta_{13} = 0,4$ baldin badira, $r_{1,2,3}^2$ mugatze-koefizientea izango da:
- A) 0,6
 - B) 0,3
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) 0,02
 - E) 0,1
14. K.T.E.L. batean X_1 aldagaia X_2 , X_3 aldagaien funtzioan estimatzen bada eta $b_{12} = 30$, $b_{13} = -20$, $\beta_{12} = 1,3$, $\beta_{13} = -2,6$ lortzen ditugun balioak baldin badira, honako hau esango dugu:
- A) X_2 aldagaiak X_3 aldagaiak baino eragin gehiago dauka X_1 aldagaiaren estimazioan.
 - B) X_2 aldagaiak X_3 aldagaiak baino eragin gutxiago dauka X_1 aldagaiaren estimazioan.
 - C) X_2 , X_3 aldagaiek eragin berdina daukate X_1 aldagaiaren estimazioan.
 - D) Emandako emaitzak bateraezinak dira.
 - E) Dena gezurrezkoa.
15. Hiru aldagairen artean $r_{12,3} = 0,90$ eta $r_{12} = 0,40$ direla dakigu. Honek, ikasitako kolektiborako, esan nahi du:
- A) Hirugarren aldagaiak beste bi aldagaien arteko erlazioan eragin negatiboa dauka.
 - B) Hirugarren aldagaiak beste bi aldagaien arteko erlazioan eragin positiboa dauka.
 - C) r_{13} eta r_{23} ezagutu gabe ezin dugu ezer esan.
 - D) Hirugarren aldagaiak beste bi aldagaien arteko erlazioan ez dauka inongo eraginik.
 - E) Dena gezurrezkoa.
16. Zein izango da $r_{12,3}$ koerlazio-koefiziente partzialaren balioa $S_{e_{1,2}e_{2,3}} = -6$, $S_{e_{1,3}}^2 = 9$ eta $S_{e_{2,3}}^2 = 25$ baldin badira?
- A) $-0,4$
 - B) $0,6$
 - C) 3
 - D) $-0,6$
 - E) $0,4$

17. $\beta_{12} = 0,3$, $\beta_{13} = 1,2$, $b_{12} = 0,1$, $b_{13} = 1,8$ emaitzak bateraezinak dira. Zergatik?
- A) β_{12} eta β_{13} balioek zeinu berbera eduki behar dute.
 - B) $|\beta_{12}|$ balioa ezin da $|b_{12}|$ balioa baino handiagoa izan.
 - C) β_{12} eta b_{12} balioek zeinu berbera eduki behar dute.
 - D) β_{13} balioa ezin da 1 baino handiagoa izan.
 - E) Ez dira bateraezinak.
18. (X_1, X_2, X_3, X_4) aldagaien arteko K.T.E.L. egin ondoren, honako hau gertatzen da: X_1 aldagaia unitate batean gehituz eta X_2, X_3 aldagaiak konstante mantenduz, X_4 aldagaiaren balio estimatua 0,7 unitatetan murrizten da. Ondoko baieztapenetatik zein da egiazkoa?
- A) $r_{14.23} = 0,7$
 - B) $r_{14.23} = -0,7$
 - C) $b_{41} = -0,7$
 - D) X_1 erregresoreak X_4 aldagaiaren sakabanatzearen % 70a azaltzen du.
 - E) Dena gezurrezkoa.
19. Karratu txikien doikuntza linealaren gai askea (jatorriaren ordenatua) zero izateak, halaberrez esan nahi du:
- A) Doikuntza ezin da hobea izan.
 - B) Aldagai tipifikatuekin gabiltza lanean.
 - C) Doikuntzaren egokitasuna zero da.
 - D) Doikuntza aldagai tipifikatu nahiz tipifikatu gabeaz egitea berdin da.
 - E) Dena gezurrezkoa.

GALDERA-SORTA 17

1. Apartamentuak alokatzen dituen mugiezinen enpresa batek, batezbeste 67 m² dituzten 200 apartamentu alokatzen ditu. Apartamentu baten hileroko alokairua bere azaleraren menpe dago, (m²-a 400 pezeta/hilabete alokatzen da) eta kopuru finko bat hilabeterako komisio bezala. Komisio honen balioa, apartamentuen hilabeteko batezbesteko alokairua 30.000 pezetakoa baldin bada, izango da:
- A) 38.400 pta.
 - B) 267 pta.
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) 3.200 pta.
 - E) 2.800 pta.

2. X aldagaiarentzat, $m_3 = -2S_x^3$ lortu da. Aldagai horren banaketarentzat baieztatu dezakegu:
- Banaketa Normala baino zapalagoa da.
 - Batezbestekoarekiko simetrikoa da.
 - Asimetria negatiboa dauka.
 - Banaketa Normala baino zorrotzagoa da.
 - Dena gezurrezkoa.
3. Izan bitez Z, Y aldagaiak, non $Z = X + h$; $Y = \lambda X + h$ $h > 0$, eta X aldagaia zentratua den. λ koefizienteak hartu behar duen balioa Z aldagaiaren aldakuntza-koefizientea Y aldagaiarenaren erdia izateko izango da:
- $|\lambda| = 3$
 - $|\lambda| = 0,5$
 - Dena gezurrezkoa.
 - $|\lambda| = 2$
 - $|\lambda| = 4$
4. X aldagai estatistikoaren $\bar{x} = 2$ batezbestekoa eta $S_x^2 = 1$ bariantza dira. $Z = (-X + 3)/2$ transformazioa egin ondoren aldagai berriaren batezbestekoa eta bariantza dira:
- $\bar{z} = \frac{5}{2}$, $S_z^2 = \frac{1}{4}$
 - $\bar{z} = \frac{1}{2}$, $S_z^2 = 1$
 - $\bar{z} = 1$, $S_z^2 = 2$
 - $\bar{z} = 2$, $S_z^2 = \frac{1}{4}$
 - Dena gezurrezkoa.
5. Aldagai bat 100 eta 500 indibiduoko bi kolektibo desberdinetan neurtu da eta aldagaiaren balio desberdin berberak hartzen ditu bi kolektiboentzat. Ondoko baiteztapenetatik zein da egiazkoa?
- 500 indibiduo dituen kolektiboarentzat Gini-ren indizea txikiago izango da.
 - Gini-ren indizea bi kolektiboentzat berdina izango da beti.
 - Gini-ren indizea, bi kolektiboentzat, aldagaiaren balioen banaketan menpe dago.
 - 500 indibiduoko kolektiboarentzat Gini-ren indizea 100 indibiduokoarena baino 5 bider handiagoa da.
 - Dena gezurrezkoa.

6. Zein izango da $P_{90,83}^p$ indizea, $L_{90,83}^k = 125$ eta $B_{90,83} = 130$ direla jakinik?
- A) $P_{90,83}^p = 104$
 B) $P_{90,83}^p = 101,9$
 C) $P_{90,83}^p = 127,5$
 D) $P_{90,83}^p = 162,5$
 E) Dena gezurrezkoa.
7. Ondoko adierazpenetatik, zein da i. aldagaiaren balio-indize sinpleak balio-indize konplexua ateratzerakoan daukan ponderazioari dagokiona?
- A) k_{i0}
 B) $p_{i0}k_{i0}$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) p_{i0}
 E) $p_{i0}k_{it}$
8. Kontingentzi taula batean, $Y/X = x_j$ banaketaren maiztasun erlatiboak dira:
- A) $f_{ij} / f_{.j} \quad \forall j$
 B) $f_{ij} / f_{i.} \quad \forall j$
 C) $f_{i.}$
 D) $F_{.j}$
 E) Dena gezurrezkoa.

9-18 tarteko galderak Karratu Txikiaren Erregresio Linealari (K.T.E.L.) dagozkie.

9. Ondoko adierazpenetatik, zein da $\hat{X}(Y)$ K.T.E.L.ren hondar-bariantzari dagokiona?
- A) $S_e^2 = S_y^2 + S_{\hat{y}}^2$
 B) $S_e^2 = S_y^2(1 - r_{xy}^2)$
 C) $S_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{X}_i)^2$
 D) $S_e^2 = 1 - S_{\hat{y}}^2$
 E) Dena gezurrezkoa.

10. Zein kasutan dute r_{12} koerlazio-koefiziente linealak eta aldagai horien erregresio-koefizienteak balio berbera?
- A) Ez dute inoiz balio berbera.
 B) Aldagaiak koerlazio positiboa dutenean.
 C) Biek balio berbera dute beti.
 D) Aldagaiak tipifikaturik daudenean.
 E) Dena gezurrezkoa.
11. $\hat{X}_2(X_1, X_3)$ K.T.E.L.ren X_2, X_3 aldagaien arteko erregresio-koefizientea zero izango da, honako hau betetzen bada:
- A) $r_{23.1}$ koerlazio partzialaren koefizientea zero da.
 B) X_2, X_3 aldagaiak koerlazio gabeak dira ($S_{23} = 0$).
 C) Doikuntza txarra da.
 D) $\hat{X}_2(X_3)$ erregresio-koefizientea zero da.
 E) Dena gezurrezkoa.
12. Ondoko berdintasunetatik, zein da egiazkoa $\hat{X}_1(X_2, \dots, X_n)$ eta $\hat{X}_2(X_1, \dots, X_n)$ erregresioekiko?
- A) $b_{12} = \frac{L_{11}}{L_{22}} b_{21}$
 B) $b_{12} = \frac{L_{22}}{L_{11}} b_{21}$
 C) $b_{12} = \frac{S_1}{S_2} b_{21}$
 D) $b_{12} = \frac{S_1^2}{S_2^2} b_{21}$
 E) Dena gezurrezkoa.
13. Izan bitez X_1, X_2, X_3 aldagaiak; $C_j = (X_j - \bar{x}_j)$, $j = 1, 2, 3$ transformazioa egiten badugu, $\hat{C}_1(C_2, C_3)$ K.T.E.L.ren erregresio-koefizientak b_{12} eta b_{13} izanik, zein da $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ K.T.E.L.aren gai askea (jatorriaren ordenatua)?
- A) $\bar{x}_1 + b_{12}\bar{x}_2 + b_{13}\bar{x}_3$
 B) $C_1 - b_{12}C_2 - b_{13}C_3$
 C) Dena gezurrezkoa.
 D) $\bar{x}_1 - b_{12}\bar{x}_2 - b_{13}\bar{x}_3$
 E) 0

14. K.T.E.L.ren balio estimatuen batezbestekoa, honako honen berdina izango da:
- Hondarren batezbestekoa.
 - Menpeko aldagaiaren balio errealeko batezbestekoa.
 - Lehen erregresorearen balioen batezbestekoa.
 - Zero.
 - Dena gezurrezkoa.
15. $\hat{X}_1(X_2, X_3)$ K.T.E.L.rako $S_1^2 = 10$, $|L| = 2$, $L_{11} = 5$ direla dakigu. Hondar-bariantza izango da:
- 0,6
 - 0.04
 - Dena gezurrezkoa.
 - 0,4
 - 0,06
16. $\hat{T}_1(T_2, T_3)$ K.T.E.L.aren hondar-bariantza 0,6, $\beta_{12} = \beta_{13} = 1$ eta $r_{12} = 0,5$ dira. r_{13} koerlazio-koefizientearen balioa izango da:
- 0,1
 - 0,2
 - 0,1
 - 0
 - Dena gezurrezkoa.
17. (X_1, X_2, X_3) aldagaientzat $r_{12} = 0$ dela dakigu. $r_{12,3}$ balioa izango da:
- $\frac{r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$
 - $-\frac{r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}}$
 - $r_{23,1}$
 - 0
 - $r_{13,2}$
18. X_1, X_2, \dots, X_n n aldagaientzat, $\beta_{12} = -0,6$ eta $\beta_{21} = 0,4$ baldin badira, $r_{12,3\dots n}^2$ izango da:
- 0,24
 - 0,24
 - Beta koefizienteen balioak bateraezinak dira.
 - 0
 - Dena gezurrezkoa.

ADIERAZPIDE GRAFIKOEI BURUZKO GALDERAK

1. Izan bitez X_1, X_2 bi aldagai estatistiko. \mathbf{c}_1 eta \mathbf{c}_2 dagozkien bektore zentratuek osatzen duten angelua oso txikia bada, zera esan dezakegu:
 - A) X_1, X_2 ia koerlazio gabeak dira, beraien arteko koerlazio-koefizientea 1etik hurbil egongo baita.
 - B) X_1, X_2 oso koerlatuak daude, beraien arteko koerlazio-koefizientea zerotik hurbil baitago.
 - C) X_1, X_2 oso koerlatuak daude, beraien arteko koerlazio-koefizientea 1etik hurbil baitago.
 - D) X_1, X_2 ia koerlazio gabeak dira, beraien arteko koerlazio-koefizientea zerotik hurbil baitago.
 - E) Dena gezurrezkoa.

2. Hurrengo datuak emanik, $m = 10$, $\|\mathbf{c}_1\| = 40$, $S_y^2 = 9$ eta $\langle \mathbf{c}_1 / \mathbf{c}_2 \rangle = 50$, hurrengo erantzunetatik zein izango da egiazkoa?
 - A) $r_{xy} = 0,13$
 - B) $\cos\alpha = -0,13$
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) $S_{xy} = 37,95$
 - E) $r_{xy} = 1$

3. Izan bitez \mathbf{c}_1 eta \mathbf{c}_2 , 60° tako angelua osatzen duten (X_1, X_2) bi aldagaien balio zentratuen bektoreak. \mathbf{c}_1 , $2K$ -rengaitik biderkatzen badu eta \mathbf{c}_2 bektorea K -gaitik zatitzen badugu (K edozein konstante izanik), zenbatekoa izango da bi aldagai transformatuen arteko koerlazio-koefizientea?
 - A) 0
 - B) $-1/2$
 - C) $\cos 30^\circ$
 - D) 1,5
 - E) $1/2$

4. Izan bitez X_1, X_2 , 16 indibiduoaz osatutako kolektibo batean neurtutako bi aldagai, non $\|\mathbf{c}_1\| = 8$, $\|\mathbf{c}_2\| = 4$ eta $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle = 32$ diren. X_1, X_2 -ren baturaren bariantza izango da:
 - A) 9
 - B) 28
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) 7
 - E) 24

5. Grafikoki, X_1 -en X_2 -rekiko erregresio lineala, \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 bektore zentratuetan adierazten da:
- A) \mathbf{x}_2 -ren norabidean \mathbf{x}_1 -en proiektzioaren bitartez.
 - B) \mathbf{x}_1 -en norabidean \mathbf{x}_2 -ren proiektzioaren bitartez.
 - C) \mathbf{x}_1 bektorearen bitartez.
 - D) \mathbf{x}_2 bektorearen bitartez.
 - E) Dena gezurrezkoa.
6. Izan bitez X , Y 100 indibiduoaz osatutako kolektibo bateko bi aldagai koerlazio gabeak. $S_x^2 = 25$ eta $S_y^2 = 9$, baldin badira t_x , t_y balio tipifikatuen bektoreen adierazpen grafikoa R^{100} espazioan nolako izango da?
- A) Modulutzat 50 eta 30 izango duten bi bektore ortogonal.
 - B) Modulutzat 10 duten gainjarritako bi bektore.
 - C) Modulutzat 10 duten bi bektore ortogonal.
 - D) Modulutzat 50 eta 30 duten gainjarritako bi bektore.
 - E) Dena gezurrezkoa.
7. Honako informazio hau emanik: X , Y aldagaiak koerlazio osoa eta negatiboa dute, zein izango da bi aldagai hauen balio tipifikatuen bektoreek osatzen duten angelua?
- A) 60°
 - B) 135°
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) 0°
 - E) Bi bektoreen normak ezagutu behar ditugu
8. Zein izango da $\hat{T}_1(T_2)$ doikuntzaren erregresio koefizientearen balioa, $\langle \hat{T}_1, \hat{T}_2 \rangle = 3$ eta 6 indibiduoaz osatutako kolektibo bateko doikuntza egin bada?
- A) 0
 - B) 0,5
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) 1
 - E) 3
9. Bi aldagairen balio normatuen bektoreek beti betetzen dute:
- A) Beren normen karratua $\frac{1}{m}$ da.
 - B) Ortogonalak dira.
 - C) Beraien biderkadura eskalarra beraien arteko koerlazio-koefizientea da.

- D) Gero eta koerlazio gutxiago eduki, beraien artean osatzen den angelua gero eta txikiagoa da.
- E) Dena gezurrezkoa.
10. 9 indibiduoaz osatutako kolektibo batean, $\|\mathbf{c}_1\| = 2,8$, $\|\mathbf{c}_2\| = 1,2$ eta $r_{xy} = 0,5$ direla jakinik, zenbat balioko luke S_{xy} kobariantzak?
- A) $-0,186$
- B) $0,56$
- C) $1,86$
- D) $0,186$
- E) Dena gezurrezkoa.

DOIKUNTZA ORTOGONALAREN ZUZENARI BURUZKO GALDERAK

1. $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0$ D.O.Z.aren ekuazioan:
- A) $\mathbf{u}_1 = (\alpha, \beta)^t$
- B) $\mathbf{u}_2 = (\alpha, \beta)^t$
- C) $\mathbf{u}_1 = (-\alpha, \beta)^t$
- D) $\alpha^2 + \beta^2 = 0$
- E) Dena gezurrezkoa.
2. Doikuntza ortogonalean, hurrengo baieztapenetatik zein da egiazkoa?
- A) R-ren bi autobalioak berdinak dira.
- B) R eta L-ren autobalioak berdinak dira.
- C) R-ren autobalioak $1 + r$ eta $1 - r$ dira.
- D) L-ren autobalioak $1 + r$ eta $1 - r$ dira.
- E) Dena gezurrezkoa.
3. Doikuntza ortogonalean, bi ardatz nagusi adierazten baditugu, planoaren fidegarritasuna izango da:
- A) $> \% 50$ eta $< \% 100$ orokorki.
- B) $\% 100$
- C) Daturik gabe ezin da jakin.
- D) $\% 50$
- E) Dena gezurrezkoa.
4. D.O.Z. definizioz,
- A) X_1 -en estimatutako bariantza maximizatzen duen zuzena da.
- B) X_2 -ren estimatutako bariantza maximizatzen duen zuzena da.

- C) Indibiduo-puntuek jatorrira duten distantzien karratuen batura maximizatzen duen zuzena da.
- D) Hodeiaren proiektatutako inertzia maximizatzen duen zuzena da.
- E) Dena gezurrezkoa.
5. Bi doikuntza ortogonal normatzen baditugu, $r = 0,5$ lehenengoarentzat eta $r = 0,7$ bigarrenarentzat izanik:
- A) Lehenengo D.O.Z., OX_2 ardatzari gehiago hurbiltzen zaio bigarrena baino.
- B) Lehenengo D.O.Z., OX_1 ardatzari gehiago hurbiltzen zaio bigarrena baino.
- C) D.O.Z.k berdinak dira eta lehen eta hirugarren koadranteen erdikariei dagozkie.
- D) D.O.Z.k berdinak dira eta bigarren eta laugarren koadranteen erdikariei dagozkie.
- E) Dena gezurrezkoa.
6. Puntu-hodei batean doikuntza lineal ortogonal bat egiten badugu eta $\lambda_2 = 1$ lortzen badugu, λ_1 honako hau izango dela esan dezakegu:
- A) $S_x^2 S_y^2$
- B) 1
- C) Ez daukagu λ_1 kalkulatzeko datu nahikorik.
- D) $S_x^2 + 2S_{xy} + S_y^2$
- E) $S_x^2 + S_y^2 - 1$
7. Karratu txikieneko doikuntza ortogonal bat egitean, $\lambda_2 = 0$ erantzunarekin aurki gaitzke?
- A) Ez, L edo R-ren autobalio bat ezin baitaiteke 0 izan.
- B) Bai, $\lambda_1 = 0$ denean.
- C) Bai, aldagaiak guztiz koerlatuak direnean.
- D) Bai, aldagaiak koerlazio gabeak direnean.
- E) Dena gezurrezkoa.
8. X_1 , X_2 bi aldagai estatistiko zentratu eta birreskalaturen D.O.Z.k eta aldagai horien zentru normatuenak beti betetzen dute:
- A) Malda berdina dute.
- B) Doikuntzaren fidegarritasun berdina lortzen da.
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) Zuzen berdinak dira.
- E) Zuzenaren gaineko proiektatutako inertzia berdina da.

Hurrengo hiru galderak, koerlazioa positiboa izanik, aldagai normaturekin egindako doikuntza ortogonalari dagozkio.

9. Zuzenaren doikuntzaren egokitasuna edo fidegarritasuna izango da:

A) $\frac{1+r}{2}$

B) $\frac{1-r}{2}$

C) $\frac{1+r}{1-r}$

D) $\frac{1}{2}$

E) Dena gezurrezkoa.

10. $g_1(1)$ lehenengo aldagaiaren proiektzioa lehen faktorearekin izango da:

A) $0,707 \frac{1}{\sqrt{1-r}}$

B) $0,707 \sqrt{1-r}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $0,707 \sqrt{1+r}$

E) $-0,707$

11. Zein proiektzio dira berdinak?

A) Indibiduo guztiena lehen ardatzaren gain.

B) Indibiduo guztiena bigarren ardatzaren gain.

C) Bi aldagaiena lehen ardatzaren gain.

D) Bi aldagaiena bigarren ardatzaren gain.

E) Berdinak badira, kasualitatez izango da.

O.N.A.RI BURUZKO GALDERAK

1. O.N.A. zentratu baten, lehen ardatz faktorialean puntu baten fidegarritasuna, batekotan, horrela kalkulatzen da:

A) $\frac{g_1^2(j)}{g_2^2(j)}$

B) $\frac{g_1^2(j)}{g_j^2}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $\frac{g_1^2(j)}{\bar{x}_j}$

E) $\frac{g_1^2(j)}{g_1^2(j) + g_2^2(j)}$

2. Noiz egingo zenuke O.N.A. normatu bat?

- A) Aldagaien unitateak oso handiak direnean.
- B) Aldagaien unitateak oso txikiak direnean.
- C) Aldagaien unitateak desberdinak direnean.
- D) Aldagaien unitateak milioitan neurtuak direnean.
- E) Dena gezurrezkoa.

Hurrengo adierazburua 3 eta 4 galderei dagokie:

Aldagai eta indibiduo kopurua 7 eta 15 direnean hurrenez hurren, O.N.A. normatu bat egin da.

3. Lehen ardatz faktorialaren inertzia-tasa % 60koa dela jakinik, koerlazio-matri-zearen λ_1 -ak, autobaliorik handienak, hurrengo balioa izango du:

- A) 9
- B) 4,2
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) 1,6
- E) 4,5

4. Plano nagusian proiektatutako inertzia-tasa %70koa dela jakinik, λ_2 , bigarren autobaliorik handiena, izango da:

- A) 0,7
- B) 1,5
- C) 0,75
- D) -0,7
- E) Dena gezurrezkoa.

5. O.N.A.n, indibiduen hodeiaren azterketa R^n espazioan eta aldagaien hodeiaren azterketa R^m espazioan, hurrengo formularen bidez erlazionatzen dira:

A) $\lambda_k^2 \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k$; $\lambda_k^2 \mathbf{v}_k = \mathbf{f}_k$

B) $\mathbf{u}_k = \sqrt{\lambda_k} \mathbf{g}_k$; $\mathbf{v}_k = \sqrt{\lambda_k} \mathbf{f}_k$

- C) Dena gezurrezkoa.
- D) $\mathbf{u}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{g}_k$; $\mathbf{v}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{f}_k$
- E) $\lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k$; $\lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{g}_k$
6. O.N.A. normatu baten k. ardatz faktorialaren gain aldagai puntuen proiektzioak, balio absolutuan, beti izango dira:
- A) Aldagaiaren desbidazio tipikoaren berdinak edo handiagoak.
- B) Aldagaiaren bariantzaren berdinak edo handiagoak.
- C) Ien berdinak edo txikiagoak.
- D) Indibiduo-puntuen proiektzioen berdinak edo txikiagoak.
- E) Dena gezurrezkoa.
7. O.N.A. baten lehen eta bigarren autonomarabideetan indibiduen proiektzioen bektoreak \mathbf{f}_1 eta \mathbf{f}_2 badira, zein da osatzen duten angelua?
- A) 60° , $r_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2} = \frac{1}{2}$ baita.
- B) 90° , $r_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2} = 0$ baita.
- C) 180° , $r_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2} = -1$ baita.
- D) 0° , $r_{\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2} = 1$ baita.
- E) Dena gezurrezkoa.
8. Plano faktorial batean aldagai eta indibiduo-puntuen baterako adierazpidea transizio erlaziotan oinarritzen da, eta hauek azken finean, honako honetan oinarritzen dira:
- A) $X^T X$, XX^T matrizeak berdinak dira.
- B) X datu-matrize zentratutik abiatzen gara.
- C) $X^T X$, XX^T matrize simetrikoen diagonalizazioak R^{n-n} eta R^{m-n} , hurrenez hurren, autobektore berdinak ditu.
- D) $X^T X$, XX^T matrize simetrikoen diagonalizazioak R^{n-n} eta R^{m-n} , hurrenez hurren, autobalio berdinak eta zeroren desberdinak ditu.
- E) Dena gezurrezkoa.
9. Plano faktorial batean aldagai puntuak proiektatzean, baliteke proiektzio horiekin gertatzea:
- A) Orokorrean, zentratuak ez direnez, denak planoaren alde berdinean koka daitezke.
- B) Beti zentratuak direnez, lehen ardatzaren bi aldeetan koka daitezke.

- C) Zentratuak direnez, planoaren alde berdinean koka daitezke.
D) Beti zentratuak direnez, grabitate-zentruaren inguruan koka daitezke.
E) Dena gezurrezkoa.
10. Transizio erlaziotan oinarriturik R^n espazioan, indibiduo-hodeiaren analisiaren k . ardatz faktorialaren \mathbf{u}_k bektore unitarioaren osagaiak aztertuz, zera ondoriozta dezakegu:
- A) Ardatz faktorial horretan aldagaien garrantzia.
B) Ardatz faktorial horretan indibiduoaren garrantzia.
C) Ardatz faktorial horretan aldagaien eta indibiduoaren garrantzia ezin daiteke jakin.
D) Ardatz faktorial horretan indibiduo bakoitzaren adierazpidearen fidegarritasuna.
E) Dena gezurrezkoa.
11. (10,4) dimentsioko datuen taula batean O.N.A. bat egitean, plano nagusian i . indibiduoaren fidegarritasuna % 87koa da. Zein izango litzateke 3. eta 4. ardatz faktorialez osatutako hondar planoan indibiduo horren fidagarritasuna?
- A) %13
B) % 6,5
C) Dena gezurrezkoa.
D) Ezin daiteke; plano nagusien gain fidagarritasunak beti gutxienez % 90ekoa izan behar du.
E) % 0
12. n aldagairen O.N.A. normatuaren kasuan, zera daukagu: edozein k . ardatzaren gaineko aldagai-puntuaren proiektzioen balioek, balio absolutuan:
- A) Edozein balio har dezakete.
B) 1 balio dute.
C) 0 eta $n/3$ tartean egon behar dute.
D) 1 edo balio txikiagoak dira.
E) Dena gezurrezkoa.
13. m indibiduoaz eta n aldagaiez osatutako datu taula baten O.N.A. normatu bat egitean, zein izango da lehen hiru ardatz faktorialez osatutako espazioaren doikuntzaren egokitasuna?
- A) $\frac{\lambda_1}{m}$
B) $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{m}$

- C) Dena gezurrezkoa.
- D) $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{n}$
- E) $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{m}$
14. Plano faktorial baten gain indibiduo-puntuak proiektatzerakoan, zer ikus dezakegu:
- A) Proiekzio horiek lehen koadrantean kokatzen dira, koerlazio guztiak positiboak baitira.
- B) Zentratuak daudenez, bi ardatzen bi aldeetan kokatzen dira.
- C) Lehen ardatzaren bi aldeetan kokatzen dira eta bigarrenaren alde batean, berriz.
- D) Planoaren alde berean kokatzen dira, ez baitute zentratu egon beharrik.
- E) Dena gezurrezkoa.
15. $L_{3 \times 3}$ -ren aztarna 250 izanik, eta bere bi autobaliorik handienak $\lambda_1 = 125$ eta $\lambda_2 = 100$, zein izango da λ_3 -ren balioa?
- A) 75
- B) 0
- C) Dena gezurrezkoa.
- D) 50
- E) 100
16. (m, n) dimentsioko datu taula batean O.N.A. normatua egitean, k . ardatz faktorialaren gain aldagaien proiektzioak izango dira:
- A) Aldagaien eta k . faktorearen arteko koerlazio-koefizienteak.
- B) m -gaitik zatitutako aldagaien desbidazio tipikoak.
- C) n aldagai eta n faktorearen arteko koerlazio-koefizienteak.
- D) m -gaitik zatitutako aldagaien bariantzak.
- E) Dena gezurrezkoa.
17. (5×3) dimentsioko datu-matrizean O.N.A. bat aplikatzean lortutako autobalioak $\lambda_1 = 540$, $\lambda_2 = 28$ eta $\lambda_3 = 14$ dira. Zein izango da plano nagusiaren egokitasuna?
- A) 0,927
- B) 0,9874
- C) Datuak urriegiak dira, dimentsioa 5 baita.
- D) 0,95
- E) 0,97

18. $X_{6 \times 3}$ datu taula batentzat egindako O.N.A. batean, λ_1 autobalioari dagokion autobektore unitarioa $[0,62, 0,60, 0,50]^T$ da. Aurkakoa izan al zitekeen?
- A) Bai, aldagaien proiektzioak denak positiboak izan baitaitezke.
 - B) Bai, norabide propio berdinari dagokion autobektore unitarioa izango litzateke.
 - C) Ez, aldagaien proiektzioek positiboak izan behar baitute.
 - D) Ez, lehen norabide propioan, bektore unitario bakarra baitauekagu.
 - E) Dena gezurrezkoa.
19. 4 aldagaien O.N.A. bat egitean, lehen ardatzaren gaineko indibiduo-puntu baten fidagarritasuna bigarrenaren gain % 50ekoa da. Hurrengo baieztapenetatik, zein da zuzena?
- A) Plano nagusiaren gain indibiduo horren fidagarritasuna doikuntza totalaren egokitasunaren araberakoa da.
 - B) Ezin daiteke lehen ardatzaren gain indibiduo baten fidegarritasuna bigarrenaren gainekoa baino txikiagoa izan.
 - C) Bigarren ardatzaren gain indibiduo baten fidagarritasuna ezin daiteke %45ekoa baino handiagoa izan.
 - D) Plano nagusiaren gain indibiduo horren fidegarritasuna % 90ekoa da.
 - E) Dena gezurrezkoa.
20. O.N.A. batean, $L_{3 \times 3}$ kobariantza-matrizea diagonalizatzean, ezinezkoa izango da hurrengo lortzea:
- A) $\lambda_1 + \lambda_2 < \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
 - B) $\lambda_1 \geq \lambda_2$
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$
 - E) $\lambda_1 < 0$
21. Hurrengo erlazioetatik zein ez da O.N.A.ren propietate bat?
- A) $\bar{f}_k = 0$
 - B) $I_{F_k} = \lambda_k$
 - C) $\bar{g}_k = 0$
 - D) $I_{G_k} = \lambda_k$
 - E) Dena gezurrezkoa.

22. Ondoko adierazpenetatik, zein da O.N.A. baten k . ardatz nagusian i . indibiduoaren aurkezpenaren fidagarritasunari dagokiona? ($\|\mathbf{x}(i)\| = d(0,i)$)

A) $\frac{f_k^2(i)}{\lambda_k}$

B) $\frac{f_k^2(i)}{\|\mathbf{x}(i)\|^2}$

C) Dena gezurrezkoa.

D) $\frac{f_k^2(i)}{\lambda_k^2}$

E) $\frac{f_k^2(i)}{\|\mathbf{x}(i)\|}$

23. O.N.A. normatu bati dagokion (1,2) plano nagusian, bi aldagai oso ondo aurkeztu eta oso hurbil proiektatuta daudela ikusten dugu. Zera baieztatu dezakegu:

A) Koerlazio sakona eta negatiboa dute.

B) Koerlazio sakona eta positiboa dute.

C) Ia koerlazio gabeak dira.

D) Beste aldagai guztiakin koerlazio negatiboa dute.

E) Dena gezurrezkoa.

24. O.N.A. baten lehen ardatz faktoriala neurri ardatza bada, orduan:

A) Ardatz horren alde negatiboan proiektatzen dira indibiduo guztiak.

B) Ardatz horren alde positiboan proiektatzen dira indibiduo guztiak.

C) Bigarren ardatzean indibiduo gehienek proiektzio nuloak dituzte.

D) Ardatz horren alde batean proiektatzen dira indibiduoak.

E) Dena gezurrezkoa.

25. Hurrengo adierazpenetatik, zein da O.N.A.ren propietate bat:

A) $\sum_{j=1}^n g_k(j) = \lambda_k \quad \forall k$

B) $\sum_{j=1}^m f_k(i) = \lambda_k \quad \forall k$

C) $\sum_{j=1}^m f_h(i)f_k(i) = \lambda_k^2 \quad \forall k \neq h$

D) $\sum_{j=1}^m f_k^2(i) = \lambda_k, \quad \forall k$

E) $\sum_{j=1}^m g_h(j)g_k(j) = \lambda_k^2, \quad \forall k \neq h$

26. (8,3) dimentsioko X datu-matrizearen O.N.A. normatua egiten badugu eta lehen bi ardatz faktorialak osatzen duten plano nagusian proiektatutako inertzi-tasa 0,95ekoa dela baldin badakigu, zenbat balio du λ_3 -k?
- A) 0,10
 - B) 0,25
 - C) 0,15
 - D) 0,05
 - E) 0,4
27. O.N.A. zentratu batean, k. ardatz faktorialez aurkeztutako j. aldagaiaren fidagarritasunari hurrengo zein adierazpen dagokio?
- A) $\frac{g_k(j)}{|L|}$
 - B) $\frac{g_k^2(i)}{s_k^2}$
 - C) Dena gezurrezkoa.
 - D) $\frac{g_k(j)}{s_j}$
 - E) $\frac{g_k^2(j)}{s_j^2}$
28. O.N.A. normatu batean, hodei dualean bi aldagai gero eta urrunago baldin badaude, beraien arteko erlazioa izango da:
- A) Sakonagoa eta zuzena.
 - B) Ahulago eta alderantzizkoa.
 - C) Ahulagoa eta zuzena.
 - D) Sakonagoa eta alderantzizkoa.
 - E) Dena gezurrezkoa.
29. Indibiuo-puntuaren hodeiaren eta aldagai-puntuaren hodeiaren baterako aurkezpena oinarritzen da:
- A) F_k ardatzaren gaineko indibiduen proiektzioak, G_k ardatzaren gaineko aldagaien proiektzioen erdia dira.
 - B) Bi kasuetan matrize berbera diagonalizatzen da.
 - C) F_k ardatzaren gaineko indibiduen proiektzioak, G_k ardatzaren v_k bektore unitarioaren osagaien proportzionalak dira, eta G_k ardatzaren gaineko aldagaien proiektzioak, F_k ardatzaren u_k bektore unitarioaren osagaien proportzionalak dira.
 - D) F_k ardatzaren gaineko indibiduen proiektzioak, G_k ardatzaren gaineko aldagaien proiektzioak bider λ_k dira.
 - E) Dena gezurrezkoa.

ERANTZUNAK**GALDERA-SORTA 1**

1. B 2. D 3. A 4. B 5. A 6. A 7. E
8. C 9. B 10. B 11. B 12. C 13. B 14. B
15. B 16. B 17. C 18. B 19. B

GALDERA-SORTA 2

1. A 2. D 3. A 4. A 5. A 6. B 7. B
8. D 9. B 10. D 11. A 12. B 13. C 14. E
15. B 16. A 17. B 18. C 19. C

GALDERA-SORTA 3

1. D 2. B 3. C 4. A 5. B 6. A 7. A 8. D

GALDERA-SORTA 4

1. C 2. E 3. B 4. C 5. D 6. C 7. B
8. B 9. B 10. D 11. D 12. A 13. D 14. C
15. E 16. C 17. D

GALDERA-SORTA 5

1. D 2. B 3. A 4. C 5. A 6. A 7. D
8. E 9. D 10. C 11. E 12. D 13. B 14. A
15. D 16. A 17. B 18. B

GALDERA-SORTA 6

1. C 2. E 3. D 4. E 5. C 6. B 7. A
8. D 9. B 10. A 11. C 12. D 13. D 14. A
15. C 16. A 17. D 18. B

GALDERA-SORTA 7

1. B 2. E 3. C 4. D 5. B 6. D 7. A
8. C 9. B 10. D 11. B 12. B 13. A 14. C
15. B 16. B 17. A 18. A

GALDERA-SORTA 8

1. E	2. C	3. E	4. D	5. B	6. E	7. A
8. D	9. A	10. E	11. E	12. A	13. B	14. B
15. B	16. A	17. B	18. C	19. D		

GALDERA-SORTA 9

1. B	2. C	3. A	4. E	5. A	6. C	7. B
8. D	9. C	10. A	11. C	12. D	13. E	14. E
15. D	16. B	17. B	18. A	19. B		

GALDERA-SORTA 10

1. B	2. C	3. A	4. D	5. B	6. A	7. C
8. B	9. D	10. A	11. D	12. D	13. B	14. D
15. B	16. D	17. A	18. B			

GALDERA-SORTA 11

1. D	2. D	3. E	4. B	5. B	6. A	7. E
8. B	9. B	10. D	11. E	12. C	13. C	14. E
15. C	16. B	17. A	18. C			

GALDERA-SORTA 12

1. A	2. D	3. C	4. C	5. E	6. C	7. D
8. E	9. A	10. A	11. C	12. B	13. A	14. C
15. E	16. A	17. C	18. E	19. D		

GALDERA-SORTA 13

1. A	2. A	3. A	4. B	5. A	6. A	7. D
8. D	9. A	10. C	11. B	12. E	13. E	14. B
15. A	16. D	17. D	18. C	19. B		

GALDERA-SORTA 14

1. B	2. C	3. D	4. E	5. D	6. D	7. C
8. D	9. B	10. B	11. A	12. B	13. A	14. C
15. A	16. C	17. C	18. C			

GALDERA-SORTA 15

- | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. C | 3. D | 4. C | 5. B | 6. E | 7. A |
| 8. E | 9. E | 10. E | 11. C | 12. A | 13. D | 14. B |
| 15. D | 16. B | 17. B | 18. D | | | |

GALDERA-SORTA 16

- | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A | 2. A | 3. D | 4. E | 5. D | 6. A | 7. C |
| 8. C | 9. A | 10. B | 11. C | 12. A | 13. B | 14. B |
| 15. A | 16. A | 17. C | 18. C | 19. E | | |

GALDERA-SORTA 17

- | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D | 2. C | 3. D | 4. E | 5. C | 6. A | 7. B |
| 8. B | 9. C | 10. D | 11. A | 12. B | 13. D | 14. B |
| 15. D | 16. C | 17. B | 18. C | | | |

ADIERAZPIDE GRAFIKOEI BURUZKO GALDERAK

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. C | 2. A | 3. E | 4. A | 5. A |
| 6. C | 7. C | 8. B | 9. C | 10. D |

DOIKUNTZA ORTOGONALAREN ZUZENARI BURUZKO GALDERAK

- | | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|------|
| 1. B | 2. C | 3. B | 4. D | 5. C | 6. E |
| 7. C | 8. C | 9. A | 10. D | 11. A | |

O.N.A.-RI BURUZKO GALDERAK

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. C | 3. B | 4. A | 5. D | 6. C |
| 7. B | 8. D | 9. A | 10. A | 11. A | 12. D |
| 13. D | 14. B | 15. C | 16. A | 17. E | 18. B |
| 19. D | 20. E | 21. C | 22. B | 23. B | 24. E |
| 25. D | 26. C | 27. E | 28. D | 29. C | |