RECOPILACION DE

EXAMENES DE

ECONOMETRIA

Edición revisada
Enero 2012

Autores:

Aurora Alonso	Juan I. Modroño
Josu Arteche	M. Paz Moral
Begoña Eguía	Iñaki Murillo
Ignacio Díaz-Emparanza	Ainhoa Ogiza
M. Victoria Esteban	Susan Orbe
Ana I. Fernández	Jesus Orbe
Beatriz Goitisolo	Marta Regúlez
Inmaculada Gallastegui	Jorge Virto
M. Carmen Iglesias	Marian Zubia
Petr Mariel	

Índice

EXAMENES DE ECONOMETRIA

Plan antiguo

Temas de Econometría

PROBLEMA PV-G.1 (Feb-1993)

Se conoce que la relación entre inversión (Y_i) y beneficios (Z_i) de una empresa es de la forma:

$$Y_i = \alpha + \beta Z_i + u_i$$

donde u_i es una perturbación aleatoria. Se dispone de estas variables para 100 empresas y se propone estimar los parámetros α y β por el método de mínimos cuadrados ordinarios.

a) Si se sospecha que la inversión en empresas con grandes beneficios es más variable que en empresas con pequeños beneficios, es decir, $\text{var}(Y_i)$ es una función creciente con Z_i,

   I) ¿Qué hipótesis clásica del modelo de regresión lineal no se satisface?

   II) ¿Qué implicaciones tiene esto sobre los estimadores de α y β por MCO?

   III) ¿Qué implicaciones tiene sobre el estimador de la matriz de covarianzas de $\hat{\alpha}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{MCO}$ definido como $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$?

b) Suponiendo que se satisfacen todas las hipótesis básicas del modelo de regresión lineal pero las perturbaciones no se distribuyen con función de distribución normal:

   I) ¿Qué ocurre con las propiedades de $\hat{\alpha}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{MCO}$?

   II) ¿Qué puedes decir sobre la validez del contraste de la hipótesis $H_0 : \beta = 0$ usando el estadístico t usual? ¿Será este válido asintóticamente? ¿Por qué?

PROBLEMA PV-G.2 (Feb-1993)

Comenta, explicando por qué, si es cierta o falsa esta afirmación:

"En el modelo

$$\begin{aligned} Y_t &= a + bY_{t-1} + cX_t + u_t \\ u_t &= 0{,}5u_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

obtendremos estimadores de a, b y c consistentes si estimamos por el método de mínimos cuadrados ordinarios."

[0] CVS Id: $Id: fingen2.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

PROBLEMA PV-G.3 (Jun-1993)

Considera el modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

donde X_t es un regresor no estocástico y $u_t \sim N(0, \sigma_t^2), \forall t$.

a) ¿Qué propiedades tiene el estimador por M.C.O. de α y β? Deriva su distribución.

b) Explica cómo obtendrías un estimador alternativo de α y β que tuviera mejores propiedades que M.C.O. ¿Qué problema surge si no se conocen los valores de $\sigma_t^2, \quad t = 1, \ldots, T$? ¿Cómo lo solucionarías?

c) Suponiendo σ_t^2 conocido $\forall t$, explica detalladamente el procedimiento para contrastar $H_0 : \beta = 1$.

PROBLEMA PV-G.4 (Jun-1993)

Considera el siguiente modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

donde X_t es un regresor estocástico generado por el siguiente proceso estocástico:

$$X_t = 0{,}7X_{t-1} + v_t \qquad\qquad v_t \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2) \quad \forall t$$

Explica qué propiedades tiene el estimador de α y β por M.C.O. y si propondrías un estimador alternativo con mejores propiedades en cada uno de los siguientes casos:

a) Las perturbaciones u_t y v_t son variables aleatorias independientes y $u_t \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2), \forall t$.

b) Las perturbaciones u_t y v_t son variables aleatorias independientes y $u_t = 0{,}5u_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\epsilon^2), \forall t$.

c) Las perturbaciones u_t y v_t son variables aleatorias tales que $u_t \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2)$ y $E(u_t v_s) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad t = s \\ 0 & \text{si} \quad t \neq s \end{cases} \quad \forall t, \forall s.$

PROBLEMA PV-G.6 (Sep-1993)

Indica qué propiedades tendrá el estimador MCO de los coeficientes del modelo:

$$Y_t \quad = \quad \text{a}Y_{t-1} + \text{b}X_t + u_t \qquad u_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

¿Qué pasaría si las perturbaciones siguieran el esquema $u_t = \rho u_{t-1} + e_t, \qquad e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$?

PROBLEMA PV-G.8 (Feb-1994)

Considera el siguiente modelo dinámico:

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\epsilon^2)$ y X_t es un regresor fijo $\forall t$.

a) Razona las propiedades del estimador MCO de los parámetros del modelo en cada uno de los siguientes casos.

   I) Cuando $\beta_1 = 0$.
   II) Cuando $\rho = 0$.
   III) Cuando $\beta_1 = 0$ y $\rho = 0$.
   IV) Cuando todos los parámetros son **distintos** de cero.

b) En aquellos casos que consideres oportuno, propón un estimador alternativo al de MCO, razonando la respuesta.

PROBLEMA PV-G.9 (Feb-1994)

Un investigador quiere estimar la propensión marginal al consumo de un determinado país utilizando datos anuales de series temporales y utilizando MCO en el modelo:

$$C_t = \alpha + \beta_1 Y_t^d + \beta_2 T_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde $u_t \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2) \quad E(Y_t^d u_t) = 0 \quad E(T_t u_t) = 0$
C_t : Consumo.
Y_t^d : Renta disponible.
T_t : Recaudación de impuestos.

El investigador se enfrenta al problema de no observar la renta disponible, sino la renta agregada Y_t, que cree que se relaciona con la renta disponible por medio de la expresión $Y_t = Y_t^d + \epsilon_t$ con $\epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\epsilon^2)$ y

$$E(Y_t^d \epsilon_t) = 0 \qquad E(\epsilon_t u_t) = 0 \qquad E(T_t \epsilon_t) = 0$$

Si consideramos el modelo en términos de variables observadas a la hora de estimar por MCO a β_1 y β_2, ¿será consistente el estimador MCO de β_1? ¿Por qué? ¿Y el de β_2? Razona tu respuesta.

PROBLEMA PV-G.14 (Feb-1995)

Sea el modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Y_{t-2} + u_t$$

donde X_t es no estocástica y
u_t sigue un proceso de medias móviles de orden 1.

¿Son los estimadores MCO consistentes? ¿Son eficientes asintóticamente? Explica claramente el por qué de tus afirmaciones y propón en su caso un método de estimación alternativo.

PROBLEMA PV-G.17 (Jun-1995)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde: $E(u_t^2) = \sigma_t^2$
$E(u_t) = 0$
$E(u_t u_s) = 0$ si $t \neq s$ X_t no estocástica.

a) Obtener el estimador MCO de α y β, demostrar si es insesgado y hallar su matriz de varianzas y covarianzas.

b) Utilizando los estimadores MCO de los parámetros del modelo. ¿Qué estadístico utilizarías para contrastar $H_0 : \beta = 0$ que fuera válido al menos asintóticamente? ¿Por qué?

c) ¿Cómo podemos obtener estimadores eficientes de α y β si $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t^2$? Razona tu respuesta.

d) ¿Cómo podemos contrastar si $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t^2$? Explica claramente el procedimiento del contraste que utilizarías, la hipótesis nula y la alternativa.

PROBLEMA PV-G.18 (Jun-1995)

Se propone la siguiente especificación para la función de demanda de vino de un país:

$$Q_t = \beta P_t + u_t$$

donde $u_t \sim iid(0, 0{,}0921)$. Dado que el precio P_t se determina simultáneamente con la cantidad Q_t, se sospecha que P_t pueda estar correlacionada con u_t. Se dispone de datos de un índice de costes de almacenamiento, S_t, que se determina exógenamente, por lo que se considera independiente de u_t.

Dados los siguientes datos trimestrales para los años 1955-1975:

$\sum P_t Q_t = 1{,}78$ $\sum S_t^2 = 2{,}1417$
$\sum P_t^2 = 0{,}507$ $\sum P_t S_t = 0{,}50$
$\sum S_t Q_t = 2{,}754$

a) Utiliza el contraste de Hausman para contrastar esa sospecha, explicando el funcionamiento del contraste.

b) Dado el resultado del contraste, ¿qué estimador de β eligirías? ¿Por qué?

PROBLEMA PV-G.19 (Sep-1995)

Un investigador propone el siguiente modelo para explicar el consumo en función de la renta y la población para las provincias de Vizcaya y Alava:

$$C_t^V = \beta_1 R_t^V + \beta_2 P_t^V + u_t^V \quad t = 1, .., T$$

$$C_t^A = \gamma_1 R_t^A + \gamma_2 P_t^A + u_t^A \quad t = 1, .., T$$

donde C_t^V, R_t^V y P_t^V son el Consumo, la Renta y la Población en el periodo t para Vizcaya, y C_t^A, R_t^A y P_t^A los correspondientes a Alava.

En los apartados siguientes, **explica** *un método eficiente de estimación* de los parámetros del modelo. Indica en cada caso el modelo, la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones, y si existe otro método de estimación equivalente. Razona tu respuesta.

a) $u_t^V \sim iid(0, 2)$, $u_t^A \sim iid(0, 4), cov(u_t^V, u_s^A) = 0$, para todo t, s.

b) $u_t^V \sim iid(0, 2)$, $u_t^A \sim iid(0, 4), cov(u_t^V, u_s^A) = 3$ para todo $t = s$ y 0 en otro caso.

c) $\beta_1 = \gamma_1$, $u_t^V \sim iid(0, 2)$, $u_t^A \sim iid(0, 4), cov(u_t^V, u_s^A) = 0$, para todo t, s.

d) $Var(u_t^V) = 2P_t^V$, $Var(u_t^A) = 4$, $cov(u_t^V, u_s^A) = 0$, para todo t, s.

e) $Var(u_t^V) = 2$ y $u_t^A = 0{,}5u_{t-1}^A + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \sim iid(0, 1)$, $cov(u_t^V, u_s^A) = 0$ para todo t, s.

PROBLEMA PV-G.20 (Sep-1995)

Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El estimador de Variables Instrumentales es más general que el estimador de MCO porque éste se puede ver como un caso particular del primero.

b) La existencia de heterocedasticidad en un modelo de regresión no supone *ningún* problema para la estimación MCO, si para contrastar hipótesis sobre los coeficientes se utiliza un estimador consistente de su matriz de varianzas y covarianzas, por ejemplo el estimador de White.

c) El contraste de Durbin-Watson no es el contraste adecuado si hay variables endógenas retardadas y tampoco es el adecuado si hay variables exógenas retardadas.

d) Si los regresores son estocásticos en un Modelo de Regresión Lineal General y satisfacen que $E(X_{it}u_t) = 0$ $(i = 1, 2, ..., K, t = 1, 2, ..., T)$, entonces los estimadores de MCO tienen las mismas propiedades en muestras pequeñas y en muestras grandes que si se consideran a los regresores fijos.

PROBLEMA PV-G.21 (Feb-1996)

Un cinéfilo decide analizar la relación entre la asistencia a películas de tipo nacional y extranjeras en función del número de salas comerciales en funcionamiento. Dispone de datos anuales para Vizcaya desde 1980 a 1992 para las siguientes variables:

- $Y_{1t} =$ miles de espectadores a películas nacionales.
- $Y_{2t} =$ miles de espectadores a películas extranjeras.
- $X_t =$ número de salas comerciales en funcionamiento.

De estimar **separadamente** por MCO una ecuación para cada tipo de película, obtiene los siguientes resultados:

$$\hat{Y}_{1t} = \underset{(2.38)}{1372{,}44583} - \underset{(-1.9869)}{43{,}6473}\,X_t + \underset{(2.7487)}{0{,}415071}\,X_t^2$$

$$R_1^2 = 0{,}9571 \qquad \bar{R}_1^2 = 0{,}94858 \qquad SCR_1 = 1699384{,}61 \qquad DW_1 = 2{,}59$$

$$\hat{Y}_{2t} = \underset{(2.4812)}{8138{,}47121} - \underset{(-2.2203)}{193{,}3502}\,X_t + \underset{(3.14984)}{1{,}694243}\,X_t^2$$

$$R_2^2 = 0{,}89693 \qquad \bar{R}_2^2 = 0{,}876316 \qquad SCR_2 = 2655102{,}64 \qquad DW_2 = 1{,}6316$$

a) Contrasta para cada tipo de película, al nivel de significación del $5\,\%$, si la relación entre el número de espectadores y el número de salas en funcionamiento es o no cuadrática. Indica la hipótesis nula y la alternativa además de los supuestos en los que se basa el contraste.

b) ¿Para qué se utiliza el estadístico DW? Defínelo. Dados los resultados obtenidos, ¿se puede inferir algún problema?

c) Utiliza el contraste de Goldfeld y Quandt para contrastar, al nivel de significación del $5\,\%$ la igualdad de las varianzas de las perturbaciones correspondientes a películas nacionales y extranjeras, suponiendo que estas varianzas son constantes en el tiempo. Escribe la hipótesis nula y la alternativa además de los supuestos en los que se basa el contraste.

A continuación, este cinéfilo estima por MCO el siguiente modelo:

$$Y_{it} = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_t^2 + u_{it} \qquad i = 1, 2 \qquad t = 1980, \ldots, 1992$$

y obtiene:

$$\hat{Y}_{it} = \underset{(2.8097)}{4010{,}51535} - \underset{(-2.5206)}{95{,}52055}\, X_t + \underset{(3.578875)}{0{,}837716}\, X_t^2$$

$$SCR = 58892726{,}9$$

d) Suponiendo que no se rechaza la H_0 del apartado anterior, contrasta, al nivel de significación del $5\,\%$, la hipótesis nula de que los parámetros de la ecuación que relaciona el número de espectadores y el número de salas comerciales en funcionamiento son los mismos para películas nacionales y extranjeras.

PROBLEMA PV-G.22 (Feb-1996)

Dado el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t no es estocástica. El económetra no observa la variable X_t.

Se dispone de observaciones de otra variable, X_t^* que puede aproximarse a X_t, esto es:

$$X_t^* = X_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

donde $E(\varepsilon_t u_t) = 0 \qquad \forall t$.

a) Demostrar que si se utiliza X_t^* en lugar de X_t, para estimar β por MCO en el modelo:

$$Y_t = \beta X_t^* + v_t \qquad t = 1, ..., T$$

el estimador MCO de β no será consistente.

b) ¿Qué método de estimación puedes utilizar para obtener un estimador de β consistente? Escribe la fórmula del estimador que propones y las condiciones bajo las cuales este estimador es consistente.

PROBLEMA PV-G.23 (Feb-1996)

Considera el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$$

donde $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\mid \rho \mid < 1$, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

a) ¿Es el estimador por MCO de β_1, β_2 y β_3 lineal e insesgado? ¿Por qué? Razona tu respuesta.

b) ¿Es el estimador por MCO de β_1, β_2 y β_3 consistente? ¿Por qué? Razona tu respuesta.

c) Si queremos utilizar el método de Variables Instrumentales para obtener estimadores consistentes de los parámetros β_1, β_2 y β_3, ¿es Y_{t-2} un instrumento adecuado para Y_{t-1}? ¿Por qué?

PROBLEMA PV-G.24 (Jun-1996)

Un comerciante quiere analizar el consumo textil (Y) en el periodo de 1960 a 1995 en función de la renta real disponible (X). Para estos años dispone de observaciones para dos grupos de la población: Hombres y Mujeres. Para ello propone el siguiente modelo:

$$Y_t^M = \alpha^M + \beta^M X_t^M + u_t^M \quad u_t^M \sim NID(0, \sigma_M^2) \qquad t = 1960, ..., 1995.$$
$$Y_t^H = \alpha^H + \beta^H X_t^H + u_t^H \quad u_t^H \sim NID(0, \sigma_H^2) \qquad t = 1960, ..., 1995.$$

donde el supraíndice M corresponde a la mujer y H al hombre. El comerciante propone esta especificación debido a su creencia de que la mujer tiene un consumo autónomo y una propensión marginal a consumir distinta de los hombres.

a) Si se supone que ambas muestras son independientes, y $\sigma_M^2 = \sigma_H^2$, ¿cómo llevarías a cabo un contraste para verificar la creencia del comerciante? Especifica la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico junto con su distribución y el proceso de decisión del contraste.

b) Si se supone que ambas muestras son independientes pero $\sigma_H^2 \neq \sigma_M^2$, ¿sería correcto el contraste realizado en a)? ¿Podrías utilizar el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores MCO propuesto por White para corregir este problema? Indica cómo llevarías a cabo el contraste en este caso.

PROBLEMA PV-G.25 (Jun-1996)

Una empresa desea estimar los costes totales de elaboración de un producto, en función del precio de la materia prima que emplea en su fabricación. Para ello se especifica el siguiente modelo:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t$$

a) Con una muestra de tamaño 80, el economista de la empresa estima por MCO y obtiene un valor del estadístico de Durbin-Watson $DW = 0{,}8846$. ¿Qué sugiere el valor de este estadístico?

b) Este economista piensa que igual la especificación del modelo no es correcta y se ha omitido alguna variable relevante correlacionada con las variables incluidas. Si dispone de observaciones de una variable exógena Z_t independiente de u_t y correlacionada con P_t. ¿Podría contrastar si este es el problema utilizando el contraste de Hausman? Explica detalladamente como lo llevaría a cabo.

c) ¿Sería adecuada la utilización del método de Cochrane-Orcutt para solucionar el problema de una mala especificación de la parte sistemática del modelo? ¿Qué solución propondrías? Razona tu respuesta.

PROBLEMA PV-G.26 (Jun-1996)

Se ha estimado por MCO un modelo para analizar la influencia de la renta per capita (RTA) en los gastos por turismo (G) en el año 1990. Utilizando una sección cruzada de 20 países europeos se han obtenido los siguientes resultados:

$$\hat{G}_i = \underset{(0{,}422)}{0{,}41556} + \underset{(0{,}0067)}{0{,}06743} RTA_i \qquad R^2 = 0{,}87358 \qquad SCR = 262{,}9587$$

Se sospecha la existencia de heterocedasticidad, con varianza creciente, con la población del país (POP_i).

a) Con la información que se ofrece a continuación contrasta esta hipótesis. Razona tu respuesta e indica la hipótesis nula y la alternativa.

$$\widehat{\hat{u}_i^2} = \underset{(4{,}238)}{-2{,}68901} + \underset{(0{,}0732)}{0{,}152} RTA_i - \underset{(0{,}000176)}{0{,}000257} RTA_i^2 \qquad R^2 = 0{,}4$$

$$\frac{\widehat{\hat{u}_i^2}}{13{,}15} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 POP_i \qquad R^2 = 0{,}871 \qquad SCR = 3{,}1102181$$

b) De acuerdo con los resultados del contraste anterior, ¿qué método de estimación utilizarías? ¿Por qué? Escribe cómo obtendrías ese estimador y cita sus propiedades.

PROBLEMA PV-G.28 (Sep-1996)

Dos municipios vecinos, A y B, pretenden realizar un estudio sobre el comportamiento del consumo en ambos municipios. Para ello, especifican las siguientes ecuaciones:

$$C_t^A = \alpha_1 R_t^A + \alpha_2 P_t^A + u_t^A \qquad t = 1, .., T \qquad u_t^A \sim NID(0, \sigma_A^2)$$
$$C_t^B = \beta_1 R_t^B + \beta_2 P_t^B + u_t^B \qquad t = 1, .., T \qquad u_t^B \sim NID(0, \sigma_B^2)$$

donde C_t^j denota el consumo del municipio j en t, R_t^j la renta media de las familias del municipio j en t y P_t^j la población del municipio j en t, donde $j = A, B$.

$$E(u_t^A, u_s^B) = \begin{cases} \sigma_{AB} & \text{si } t = s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Indica **separadamente** para cada uno de los siguientes casos, cómo contrastarías las siguientes hipótesis nulas. Explica razonadamente en cada caso, el método de estimación que eliges, el estadístico del contraste y los supuestos bajo los cuales el contraste es válido.

a) Si $\sigma_{AB} = 1,\ \sigma_A^2 = 2,\ \sigma_B^2 = 2$. Contrastar $H_0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

b) Si $\sigma_{AB} = 0,\ \sigma_A^2 = 2,\ \sigma_B^2 = 1$. Contrastar $H_0 : \alpha_2 = \beta_2$

PROBLEMA PV-G.32 (Feb-1997)

Un analista de una empresa recibe el encargo de proponer un modelo para explicar las ventas de una empresa. Después de pensarlo, propone el siguiente modelo:

$$V_t = \beta_0 + \beta_1 H_t + \beta_2 P_t + u_t \tag{1}$$

donde:
V_t son las ventas del producto en el mes t
H_t es el número de horas trabajadas en el mes t
P_t es el precio del producto en el mes t
Estima el modelo tomando datos de estas variables en los 24 últimos meses con los siguientes resultados:

$$\hat{V}_t = \underset{(0,27)}{1,73} + \underset{(1,03)}{0,77}\, H_t + \underset{(0,42)}{1,24}\, P_t \tag{2}$$

$$R^2 = 0,943 \qquad DW = 0,14$$

(entre paréntesis aparece la desviación típica estimada del coeficiente estimado correspondiente)

y se lo presenta a su jefe. Este mira los resultados obtenidos y le da orden de incluir una variable más que recoja el ciclo económico.

a) Explica las razones que puede tener el jefe para hacer esta propuesta.

b) Reestimando el modelo los resultados son:

$$\hat{V}_t = \underset{(1,2)}{2,14} + \underset{(0,14)}{0,03}\,H_t + \underset{(0,14)}{1,22}\,P_t + \underset{(0,23)}{0,79}\,C_t \tag{3}$$

$$R^2 = 0,987 \qquad DW = 2,01$$

(entre paréntesis, desviaciones típicas estimadas)

donde C_t es la variable que mide el ciclo económico en el mes t. Interpreta los resultados obtenidos y decide si el jefe tenía o no razón en sus apreciaciones.

c) Supongamos que la variable C_t mide el ciclo económico sólo de manera aproximada, ¿Qué implicaciones tiene este hecho sobre las estimaciones de la ecuación (3)?

PROBLEMA PV-G.33 (Jun-1997)

Queremos estudiar las calificaciones de Econometría de los alumnos de 4.º de Económicas (Plan Viejo), Y^V, y las de los alumnos de 3.º de Económicas (Plan Nuevo), Y^N. Para ello disponemos de los siguientes modelos:

$$Y_i^V = \alpha_1 + \beta_1 X_i^V + \gamma_1 Z_i^V + u_i^V \quad u_i^V \sim NID(0, \sigma^2) \tag{1}$$
$$Y_i^N = \alpha_2 + \beta_2 X_i^N + \gamma_2 Z_i^N + u_i^N \quad u_i^N \sim NID(0, \sigma^2) \tag{2}$$

donde u_i^V y u_i^N son independientes y

Y_i^s : Calificación del alumno i.

X_i^s : Número de horas de estudio.

Z_i^s : Calificación media del resto de las asignaturas del alumno i.

($s = V$ si el alumno es del Plan Viejo y $s = N$ si es del Plan Nuevo).

Se pide:

a) ¿Cómo contrastarías que los coeficientes de ambas ecuaciones son iguales?
Escribe el modelo no restringido y el restringido; especifica la hipótesis nula y la alternativa, el estadístico de contraste y la regla de decisión.

b) Supón que dispones de datos para realizar el contraste anterior, lo haces y llegas a la conclusión de que **no rechazas** la hipótesis nula. ¿Cómo estimarías los parámetros del modelo?

PROBLEMA PV-G.34 (Jun-1997)

Sea el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

Comenta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y por qué. (Salvo que se diga lo contrario, se satisfacen las hipótesis del MRLG. Analiza cada afirmación independientemente del resto).

a) Si $u_t \sim NID(0, \sigma^2)$, los estimadores MCO de este modelo son un caso particular de MCG.

b) Si X_t es estocástica, de forma que la covarianza entre ésta y la perturbación es cero, las propiedades del estimador MCO no cambian.

c) Si la perturbación presenta heterocedasticidad y no se conoce la estructura de ésta, al estimar el modelo por MCO, no hay ninguna manera de contrastar la hipótesis nula $H_0 : \beta = 0$, ni siquiera asintóticamente.

d) Si se tiene un error de medida en la variable explicativa, se puede utilizar el estadístico de Durbin-Watson para contrastar la existencia de autocorrelación.

e) Una teoría económica dice que la variable X afecta positivamente a Y, y que otra variable Z también afecta positivamente a Y. Para contrastar esta hipótesis un económetra decide estimar las siguientes regresiones y ver el signo de los coeficientes:

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha_1 + \beta_1 X_t + u_t \quad u_t \sim NID(0, \sigma^2) \\ Y_t &= \alpha_2 + \beta_2 Z_t + w_t \quad w_t \sim NID(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

Si no se rechaza $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 > 0$, entonces se acepta la teoría económica.

PROBLEMA PV-G.35 (Jun-1997)

Para analizar la inflación en Brasil (Y_1) y Argentina (Y_2) se propone el modelo

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + u_{1t} \quad u_{1t} \sim NID(0, \sigma_1^2) \\ Y_{2t} &= \alpha_2 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t} \quad u_{2t} \sim NID(0, \sigma_2^2) \end{aligned}$$

siendo X_{1t} y X_{2t} la tasa de crecimiento de la oferta monetaria en Brasil y Argentina respectivamente en el mes t. La información muestral recogida se resume a continuación donde se observa que las muestras son de diferente tamaño y se suponen independientes y con distinta varianza.

BRASIL	ARGENTINA
$X_1'X_1 = \begin{pmatrix} 50 & 25 \\ 25 & 100 \end{pmatrix}$	$X_2'X_2 = \begin{pmatrix} 150 & 25 \\ 25 & 500 \end{pmatrix}$
$X_1'Y_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 160 \end{pmatrix}$	$X_2'Y_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 300 \end{pmatrix}$
$T_1 = 50$	$T_2 = 150$
$Y_1'Y_1 = 450$	$Y_2'Y_2 = 2700$

a) Comprueba teóricamente que la estimación de los parámetros por MCO en cada país es equivalente a la estimación conjunta por MCG. ¿Cuál es la idea intuitiva detrás de este resultado?

b) Obtén los valores numéricos de dicha estimación así como de sus matrices de varianzas y covarianzas.

c) ¿Cómo llevarías a cabo un contraste sobre la igualdad de parámetros en ambos países?

d) Supongamos que **no rechazas** la igualdad de parámetros. Explica y justifica cómo estimarías el modelo restringido.

PROBLEMA PV-G.39 (Feb-1998)

Queremos analizar los factores que con más fuerza han incidido en la producción industrial vasca, en el año 1997. Para ello elegimos una función de producción Cobb-Douglas, que expresa la producción en función de los factores productivos a través de la siguiente relación:

$$Y_i = A \cdot L_i^{\alpha} \cdot K_i^{\beta} \cdot ID_i^{\gamma} \cdot e^{u_i} \tag{1}$$

donde

Y_i : producción.	L_i: número de ocupados.
K_i : capital privado.	ID_i : inversión en Investigación y Desarrollo (I+D).
A : constante.	e^{u_i} : perturbación aleatoria.

En este modelo, además de los factores que normalmente se consideran, número de ocupados y stock de capital privado, añadimos también la inversión en I+D.

Tomamos logaritmos neperianos para linealizar la función, por lo que la relación a estimar es:

$$\ln Y_i = a + \alpha \ln L_i + \beta \ln K_i + \gamma \ln ID_i + u_i \tag{2}$$

Disponemos de datos sobre 350 empresas del sector industrial. Sabemos que algunas de estas empresas son bastante homogéneas entre sí por lo que respecta a los factores trabajo y capital; pero bastante heterogéneas en lo que refiere al factor I+D.

a) ¿Cómo contrastarías la H_0 de rendimientos a escala constantes, es decir, $\alpha + \beta + \gamma = 1$? Explica detalladamente todos los elementos: el estadístico del contraste, su distribución bajo H_0, cuándo aceptarías H_0, así como el modelo bajo H_0 y el modelo bajo H_a.

b) Un investigador cree que existe heterocedasticidad debida a la variable I+D, de la forma $Var(u_i) = k(\ln ID_i)$, con $k > 0$ desconocida. ¿Cómo contrastarías si tiene o no razón? Explica detalladamente todo el proceso del contraste.

Supón que tras realizar el contraste anterior, aceptas la existencia de heterocedasticidad, de la forma dada en el apartado b).

c) ¿Existe algún problema en el contraste hecho en a)?

d) ¿Cuál es, para **este modelo concreto**, el criterio de estimación MCG? Escribe la función criterio y el estimador. Explica porqué es más adecuado el estimador MCG que el MCO en este caso.

PROBLEMA PV-G.42 (Sep-1998)

Sea el modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad , \quad t = 1, ..., T,$$

donde X_t es no estocástica, $E(u_t) = 0$ y

$$E[uu'] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cómo contrastarías si $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t^4$? Explica en detalle el procedimiento de contraste.

b) Si $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t^4$, explica detalladamente cómo obtendrías estimadores eficientes de α y β.

PROBLEMA PV-G.43 (Sep-1998)

Sea el modelo

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t \\ u_t &= \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2), \end{aligned}$$

siendo X_t una variable no estocástica.

a) ¿Cuál es la covarianza entre u_t e Y_{t-1}?

b) Explica qué efectos tiene tu respuesta en el apartado a) sobre las propiedades del estimador MCO de β_1 y β_2.

c) Propón, si existe, un estimador alternativo con mejores propiedades que el MCO. Razona tu respuesta.

[0] CVS Id: $Id: finemp2.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

PROBLEMA PV-E.1 (Feb-1993)

Un inversor en Bolsa quiere estudiar la relación entre el rendimiento de las acciones de Dragados y Construcciones (DRA_t) y el rendimiento medio de la Bolsa de Madrid. Con este motivo, especifica la siguiente relación:

$$(DRA_t - RS_t) = \alpha + \beta(REM_t - RS_t) + u_t \qquad (1)$$

donde RS es el rendimiento de un activo "seguro" (las Letras del Tesoro a 6 meses) y REM es el rendimiento medio de la citada Bolsa. Para estimar la ecuación (1) se utilizan 260 cotizaciones diarias en la Bolsa de Madrid en 1990.

a) Teniendo en cuenta que $(REM_t - RS_t)$ es una variable aleatoria y suponiendo que $E[(REM_t - RS_t)u_t] = 0$, ¿cuáles son las propiedades de los estimadores MCO? ¿Conoces algún método de estimación más adecuado? En caso de que la respuesta a esta última pregunta sea afirmativa, ¿cuál y por qué?

b) ¿Cómo responderías a las preguntas del apartado anterior si sabes que $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ donde $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ y $\rho < 1$?

PROBLEMA PV-E.2 (Feb-1993)

Se ha estimado por MCO con datos anuales la siguiente relación entre el consumo de gasolina y el precio en una empresa:

$$\hat{C}_t = 5278{,}44 - 23{,}36P_t$$

Año	$\hat{u}_t$	Año	$\hat{u}_t$
1980	-112.93	1986	58.55
1981	-74.53	1987	155.71
1982	9.46	1988	43.67
1983	33.75	1989	-19.90
1984	58.49	1990	-85.66
1985	59.33	1991	-125.96

a) Realiza el contraste de Durbin-Watson. Interpreta el resultado y expón las consecuencias que tiene sobre el método de estimación utilizado.

b) Supón que la verdadera relación entre consumos y precios es:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 P_t^2 + u_t$$

y dispones de datos mensuales durante 10 años. ¿Se mantienen tus conclusiones del apartado anterior sobre los estimadores MCO? Razona la respuesta.

c) La empresa cierra por vacaciones gran parte del mes de agosto. Escribe un modelo que recoja dicha incidencia sobre el consumo e interprétalo.

PROBLEMA PV-E.3 (Feb-1993)

Dado el siguiente modelo biecuacional:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2) \qquad t = 1, \cdots, T$$

$$Y_{2t} = \beta_1 + \beta_2 Z_{2t} + \beta_3 Z_{3t} + u_{2t} \qquad u_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2) \qquad t = 1, \cdots, T$$

Especifica el modelo a estimar y explica cómo lo estimarías bajo los siguientes supuestos:

a) $E(u_{1t}u_{2s}) = 0 \qquad \forall t, s$
   $\alpha_1 = \beta_1$

b) $E(u_{1t}u_{2s}) = \begin{cases} \sigma_{12} & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases} \qquad \forall t, s$

PROBLEMA PV-E.4 (Feb-1993)

Supón que en el modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

se ha llegado a la conclusión de que $var(u_t) = tX_{2t}^2$. Un procedimiento de estimación consiste en aplicar M.C.O. tras realizar una transformación en el modelo de modo que las perturbaciones sean homocedásticas. Escribe un modelo transformado que cumpla dicha condición.

PROBLEMA PV-E.6 (Jun-1993)

Supongamos el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, 2, \cdots, T$$

donde:

$$E(u_t) = 0 \qquad \forall t$$
$$E(u_t^2) = \frac{1}{X_{3t}^2} \qquad \forall t$$
$$E(u_t, u_s) = 0 \qquad \forall t \neq s$$

a) Escribe el modelo transformado en el que las perturbaciones sean homocedásticas. Busca la distribución de estas perturbaciones transformadas.

b) En el caso de que T=4, escribe la matriz de regresores, X, del modelo transformado sabiendo que:

t	1	2	3	4
X_{2t}	0	1	1	2
X_{3t}	3	0.5	1	1

PROBLEMA PV-E.7 (Jun-1993)

a) Supón que tratamos de estimar el siguiente modelo:

(1) $$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

$$u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$$

Si se sabe que $E(X_{2t}, u_t) \neq 0$, ¿qué método de estimación propondrías? Explica claramente las razones de tu elección y las propiedades que conseguirías con tus estimadores.

b) Otro investigador nos advierte que el modelo (1) es incorrecto puesto que para el modelo:

(2) $$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{2t-1} + v_t \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

$$v_t \sim iid(0, \sigma_v^2)$$

se cumple $E(X_t' v_t) = 0 \quad X_t = [X_{1t}\ X_{2t}\ X_{2t-1}]$, con lo que en consecuencia deberíamos estimar este modelo por Mínimos Cuadrados Ordinarios. ¿Es correcta la postura de este investigador?

c) Si tú tuvieras que estimar uno de los dos modelos, decide cuál elegirías y explica razonadamente en qué te basas para tu elección.

PROBLEMA PV-E.8 (Sep-1993)

Sea el modelo $\quad Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad$ donde $\quad E(u_t^2) = t X_t^2$

a) Conociendo tres observaciones de Y_t y X_t obtén por M.C.O. y en forma matricial, las estimaciones de α y β del modelo anterior.

t	1	2	3
Y_t	1	1	0
X_t	1	-1	1

b) Ahora ademas se conoce:

$$E(u_1 u_3) = E(u_3 u_1) = 1$$
$$E(u_1 u_2) = E(u_2 u_1) = E(u_2 u_3) = E(u_3 u_2) = 0$$

Dadas las observaciones de Y_t e X_t y la información sobre $E(u_t u_s)$, calcula la matriz de varianzas y covarianzas del estimador M.C.O.

c) Dada la información anterior, ¿qué propiedades tiene el estimador Mínimo-Cuadrático Ordinario?

d) ¿Conoces un estimador con mejores propiedades? ¿Cuál es? ¿Qué propiedades tiene? Escribe su matriz de varianzas y covarianzas. (No la estimes, escribe solo su fórmula y dí que son cada uno de sus elementos.)

e) Si en el modelo $\quad Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad$ se cumple:

$E(u_t^2) = tX_t^2 \qquad y \qquad E(u_t u_s) = 0 \qquad \forall t, s \qquad t \neq s$

Escribe el modelo transformado que corrija este problema y demuestra que sus perturbaciones tienen varianza constante.

f) Estima, por el método de M.C.O. y utilizando cálculo matricial, los parámetros del modelo transformado.

PROBLEMA PV-E.9 (Feb-1994)

Para explicar los tipos de interés reales en España entre 1958 y 1993 se especifica la ecuación:

$$r_t = \beta_1 + \beta_2 \triangle D_t + \beta_3 \triangle M_t + u_t \qquad t = 1958, ..., 1993$$

donde $\quad r$: tipo de interés real

$\triangle D$: tasa de crecimiento del stock de Deuda Pública

$\triangle M$: tasa de crecimiento de la oferta monetaria

Se sospecha que la varianza de las perturbaciones es una función creciente del tiempo. Contrasta la hipótesis de que dicha varianza es menor antes de la primera crisis del petróleo que después de la segunda crisis, sabiendo que:

$$1958 - 1971: \qquad \hat{r}_t = 0{,}88 + 0{,}41 \triangle D_t + 0{,}97 \triangle M_t \qquad \sum_{t=1958}^{1971} \hat{u}_t^2 = 437$$

$$1980 - 1993: \qquad \hat{r}_t = 1{,}04 + 0{,}37 \triangle D_t + 0{,}91 \triangle M_t \qquad \sum_{t=1980}^{1993} \hat{u}_t^2 = 612$$

PROBLEMA PV-E.12 (Jun-1994)

Para estimar el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 6$$

se dispone de los siguientes datos:

t	1	2	3	4	5	6
Y_t	5	0	-3	0	4	9
X_t	1	2	4	5	6	6

Se pide:

a) Estima los parámetros α y β por MCO. Estima σ_u^2.

b) Contrasta la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación utilizando el estadístico de Durbin-Watson para un nivel de significación del 5 %. Plantea claramente la hipótesis nula y la alternativa.

c) En un gráfico de Y frente a X, representa los datos de la muestra y dibuja la recta de regresión muestral. Comenta la posible causa del resultado del contraste del apartado (b). ¿Plantearías algún modelo alternativo al del enunciado? ¿Cuál?

PROBLEMA PV-E.14 (Jun-1994)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 X_{2t} + u_t$$

donde Y_t : gasto familiar en comida
X_{1t} : renta familiar
X_{2t} : número de personas de cada familia (tamaño familiar)

a) Si sospechas que $Var(u_t) = \alpha_1 + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t}$, explica cómo llevarías a cabo el contraste de Breusch y Pagan (Plantéalo, paso a paso, desde la hipótesis nula hasta llegar al estadístico de contraste).

b) Si la regresión por MCO con 38 observaciones da lugar a:

$$\hat{Y}_t = \underset{(0.84)}{2{,}24} + \underset{(4.64)}{0{,}16}\, X_{1t} + \underset{(2.76)}{1{,}45}\, X_{2t} \qquad R^2 = 0{,}45 \qquad SCR = 644{,}35$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{16{,}95} = \underset{(1.95)}{29{,}16} + \underset{(2.12)}{0{,}42}\, X_{1t} + \underset{(2.61)}{6{,}04}\, X_{2t} \qquad R^2 = 0{,}24 \qquad SCR = 200{,}03$$

(entre paréntesis están los estadísticos t)

Lleva a cabo el contraste propuesto en el apartado (a).

PROBLEMA PV-E.15 (Sep-1994)

Un investigador A quiere explicar los gastos de los estudiantes con el siguiente modelo:

$$(1) \qquad Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad i : 1, \ldots, N$$

siendo Y_i : gastos del estudiante i
X_i : ingresos del estudiante i

En el modelo (1) se cumplen todas las hipótesis básicas, especialmente

$E(u_i) = 0$
$Var(u_i) = \sigma_u^2 \qquad \forall i$
$E(u_i u_s) = 0 \qquad \forall i \neq s$

Otro investigador B dice que es mejor agrupar los datos de cada clase, para simplificar los cálculos, y estimar los parámetros con los datos agrupados. En total los alumnos están divididos en 8 clases y el número de alumnos en cada clase es n_1, n_2, $\ldots$, n_8. El investigador B utilizará por tanto 8 observaciones de cada variable, cada una correspondiente a una clase:

$$\overline{Y}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} Y_k}{n_j} \qquad \overline{X}_j = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} X_k}{n_j} \qquad j: 1, 2, \ldots, 8$$

El modelo que plantea es el siguiente:

$$\overline{Y}_j = \alpha + \beta \overline{X}_j + v_j \qquad j: 1, 2, \ldots, 8$$

a) ¿Cuáles son la media y varianza de la perturbación v_j?

b) Los dos investigadores desean estimar sus modelos por mínimos cuadrados. ¿Qué métodos te parecen adecuados a cada caso? ¿Por qué?

c) ¿Cómo cambiarían tus conclusiones del apartado anterior si el número de alumnos fuera el mismo en todas las clases?

PROBLEMA PV-E.16 (Sep-1994)

Un investigador desea estimar el modelo:

$$(1) \qquad Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

planteado sobre las variables teóricas X e Y. Suponemos que en dicho modelo se cumplen todas las hipótesis del modelo lineal clásico.

Sin embargo, Y_t es una variable cuyos valores no se conocen directamente, sino que se observan con error: $Y_t^* = Y_t + \varepsilon_t$, siendo $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$ de manera que el investigador sólo dispone de observaciones para estimar el modelo:

$$(2) \qquad Y_t^* = \alpha^* + \beta^* X_t + u_t^*$$

Supondremos que ε_t y u_t son independientes.

a) Estudia la relación entre los coeficientes del modelo observado (2) y los del modelo correcto (1).

b) Deriva las propiedades de la nueva perturbación u_t^*.

c) Los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios $\widehat{\alpha}^*$ y $\widehat{\beta}^*$, ¿son estimadores insesgados de α y β? ¿Cómo cambiaría tu respuesta si X_t fuera una variable estocástica? Demuéstralo (Añade las hipótesis que necesites).

PROBLEMA PV-E.17 (Sep-1994)

Sea el modelo

$$Y = X\beta + u$$

donde X es una matriz no estocástica y $u_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$, siendo $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon I)$

a) ¿Qué forma tiene la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones u_t? (Obtenerla en función de θ y σ^2_ε).

b) Considerando que θ es desconocido,

   I) ¿Es insesgado el estimador MCO de β?, demuéstralo.

   II) Un estimador de Mínimos cuadrados generalizados factibles de β ¿es lineal? ¿es insesgado? Demuéstralo.

PROBLEMA PV-E.18 (Feb-1995)

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ donde se cumplen todas las hipótesis básicas. Entonces, el modelo que corresponde a la variable $Y^*_t = Y_t - Y_{t-1}$ es:

$$Y^*_t = \beta(X_t - X_{t-1}) + u^*_t \qquad (1)$$

donde $u^*_t = u_t - u_{t-1}$.

a) Calcula el valor medio y la matriz de varianzas y covarianzas de u^*_t.

b) ¿Cuál es la varianza de Y^*_t?

c) Deriva el estimador MCO de la pendiente del modelo (1).

d) Propón un estimador eficiente del parámetro que interviene en el modelo (1) y justifica tu elección.

PROBLEMA PV-E.19 (Feb-1995)

Un investigador opina que la situación general de la economía es un fuerte determinante de los rendimientos bursátiles, y se propone analizar la relación entre la rentabilidad de un activo (r_t) y el *estado general de la economía* (E_t). Dado que el *estado de la economía* no es una variable directamente observable, decide emplear como aproximación el índice de producción industrial (IPI_t). Así, propone el siguiente modelo para explicar el comportamiento de la rentabilidad del activo:

$$r_t = \delta_0 + \delta_1 IPI_t + u_t \qquad u \sim N(0, \sigma^2_u I)$$

¿Qué implicaciones tiene para las propiedades de los estimadores por MCO de los parámetros de este modelo el uso de una variable que aproxima el *estado general de la economía*? Demuéstralo.

<u>PROBLEMA PV-E.20</u> (Feb-1995)

Sea el modelo

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

con Var(u_i)=$P_i^2 \sigma^2$.

Decide cuál de los siguientes modelos está <u>correctamente</u> transformado para corregir este problema de heterocedasticidad y explica por qué.

$$(1) \qquad P_i Y_i = \alpha + \beta P_i X_i + P_i u_i$$

$$(2) \qquad \frac{Y_i}{P_i} = \frac{\alpha}{P_i} + \beta \frac{X_i}{P_i} + \frac{u_i}{P_i}$$

$$(3) \qquad P_i Y_i = \alpha P_i + \beta P_i X_i + P_i u_i$$

$$(4) \qquad \frac{Y_i}{P_i} = \alpha + \beta \frac{X_i}{P_i} + \frac{u_i}{P_i}$$

<u>PROBLEMA PV-E.21</u> (Jun-1995)

La sociedad constructora CARPANTA, instalada en Donostia- San Sebastián, utiliza la siguiente relación para fijar los precios de venta de las viviendas en esta ciudad:

$$Y_{Dt} = \alpha + \beta R_{Dt} + \delta S_{Dt} + u_t, \qquad u \sim N(0, \sigma_u^2\ I) \qquad \text{con } \ \sigma_u^2 = 2 \qquad (1)$$

donde:

- Y es el precio medio de las viviendas puestas en venta en el año t.
- R es la renta media familiar del municipio en el año t.
- S es la superficie edificable que hay en el municipio en el año t.

para lo cual dispone de la siguiente información:

t	Y_{Dt}	R_{Dt}	S_{Dt}
1988	3	1	1
1989	3	3	4
1990	4	4	3
1991	1	3	2
1992	3	2	1
1993	4	3	1
1994	3	3	4

a) Estima el modelo (1).

b) Contrasta la hipótesis nula $H_o : \delta = 1$.

c) Contrasta la hipótesis de que $\beta + \delta = 1$.

PROBLEMA PV-E.22 (Jun-1995)

La misma constructora opera en Soria. El gerente opina que en esta ciudad los precios se fijan según la ecuación:

$$Y_{St} = \eta + \gamma R_{St} + v_t, \qquad v_t \sim NID(0, \sigma_v^2) \tag{2}$$

donde Y_{St} y R_{St} se interpretan de igual forma que en (1) respecto a Soria. Los resultados de la estimación **para los mismos años** son los siguientes;

$$\hat{Y}_{St} = 10{,}2 + 3R_{St}, \qquad R^2 = 0{,}80 \qquad DW = 0{,}5 \tag{3}$$

a) Contrasta la existencia de autocorrelación de orden uno.

b) ¿Es la renta media familiar una variable significativa para explicar Y_{St}?

c) El gerente no está seguro de su decisión anterior y a continuación ha estimado el siguiente modelo:

$$Y_{St} = \eta + \gamma R_{St} + \lambda S_{St} + v_t \qquad v_t \sim NID(0, \sigma_v^2) \tag{4}$$

obteniendo un valor del estadístico Durbin-Watson de DW=2.01 ¿Hay evidencia de autocorrelación en el modelo (4)? A la vista de este resultado, ¿cómo solucionarías los problemas de los apartados anteriores?

PROBLEMA PV-E.23 (Jun-1995)

En el sistema formado por las ecuaciones (1) y (4) anteriores, suponiendo que ambas muestras son independientes y que σ_u^2 y σ_v^2 son desconocidas pero iguales

a) Se quiere contrastar: $H_o : \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

escribe el modelo adecuado para contrastar dicha hipótesis, el estadístico, su distribución y el criterio de decisión correspondiente.

b) Si no se rechaza la hipótesis nula, ¿existe alguna manera de lograr mejores estimaciones, en el sentido de obtener una menor varianza de los estimadores? ¿En este caso, cómo deberían estimarse las ecuaciones? Explica detalladamente todo el proceso.

PROBLEMA PV-E.24 (Jun-1995)

Considera el siguiente modelo para las reservas de agua embalsada en la Comunidad Autonónoma de La Rioja:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t, \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim NID(0, \sigma_\epsilon^2) \tag{5}$$

donde

- Y_t = Volumen de agua embalsada al final del año t.
- X_t = Litros de agua de lluvia recogida durante el año t.

Explica detalladamente cuál es el método de estimación más adecuado para el modelo (5) bajo los siguientes supuestos:

a) $\rho = 0$.

b) $\rho = 0,9$.

c) El valor de ρ es desconocido, tal que $-1 < \rho < 1$.

PROBLEMA PV-E.26 (Sep-1995)

Un investigador efectúa un estudio econométrico del comercio alimenticio en pequeñas superficies en España, para el período 1983-1994. Decide que el modelo adecuado para explicar el *nivel de inventarios* (Y_t) es:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \tag{1}$$

siendo X_t el *volumen de ventas*.

Por problemas de ocultación de datos, no conoce el verdadero valor de X_t y utiliza X_t^*, una variable que él cree que puede servir como *aproximación* de X_t, es decir,

$$X_t^* = X_t + \varepsilon_t$$

con $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e incorrelacionada con u_t

a) Especifica el modelo que va a utilizar el investigador en su estudio. ¿Cumple todas las hipótesis básicas del modelo de regresión lineal general?

b) ¿Resulta adecuado estimar por MCO el modelo propuesto en el apartado anterior?

c) Sabiendo que $r_{X_t^* X_{t-1}^*} = 0{,}998$ ¿Qué método de estimación propondrías para el modelo propuesto en a)?

d) ¿Qué habría ocurrido si la variable medida con error hubiera sido la variable endógena Y_t?

PROBLEMA PV-E.27 (Sep-1995)

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-2} + u_t \tag{2}$$

donde X_t es una variable no estocástica.

a) Determina las propiedades de los estimadores MCO de los coeficientes del modelo (2) si $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ con $|\rho| < 1$ y $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$. ¿Existe en este caso algún otro estimador con mejores propiedades? Demuéstralo

b) ¿Cómo cambian tus conclusiones del apartado a) si $u_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$? ($\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$)

PROBLEMA PV-E.30 (Feb-1996)

Sea el modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad \text{con} \quad t = 1, \ldots, T. \tag{1}$$

Determina cuáles son los coeficientes, o combinaciones de coeficientes, estimables en cada uno de los siguientes casos, especificando el método de estimación que utilizarías en cada uno de ellos. (Nota: Cuando no se indique lo contrario, se mantienen los supuestos básicos del modelo lineal)

a) $X_{3t} = 5X_{2t} + 4$

b) $E(u_t^2) = \alpha X_{2t}$ siendo α un parámetro desconocido.

c) $E(u_t^2) = \alpha_1 + \alpha_2 t^2$ siendo α_1 y α_2 parámetros desconocidos.

d) $2\beta_2 + \beta_3 = 6$

PROBLEMA PV-E.31 (Feb-1996)

Un investigador efectúa un estudio econométrico sobre el tratamiento fiscal a las familias en España. Para ello establece una relación lineal entre los impuestos agregados pagados (Y_t) y la renta agregada total de las familias (X_t). Sin embargo, debido al problema de la ocultación de datos por parte de las familias, en lugar de trabajar con la renta agregada verdadera X_t ha de trabajar con la renta declarada X_t^*. El modelo que estima es el siguiente:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + u_t \tag{2}$$

a) ¿Cumple el modelo (2) las hipótesis básicas del Modelo de regresión lineal?

b) Estimando (2) por MCO se han obtenido los siguientes resultados:

$$Y_t = \underset{(-1,79)}{-1,92} + \underset{(53,64)}{1,53}\, X_t^* + \hat{u}_t \qquad DW = 1,86 \qquad R^2 = 0,839$$

Discute la conveniencia de la aplicación de MCO al modelo (2). En base a tus conclusiones, interpreta los resultados obtenidos.

c) Sabiendo que $r_{X_t^* X_{t-1}^*} = 0,899$ ¿Qué método de estimación propondrías para el modelo (2)? Coméntalo brevemente.

PROBLEMA PV-E.33 (Jun-1996)

Un analista propone el siguiente modelo que representa el crecimiento de cada sector económico, en España, en función del crecimiento general de la economía americana:

$$\begin{aligned} I_t &= \beta_1 + \beta_2 X_t + u_{1t}, \qquad u_{1t} \sim NID(0, \sigma_1^2) \\ S_t &= \alpha_1 + \alpha_2 X_t + u_{2t}, \qquad u_{2t} \sim NID(0, \sigma_2^2) \end{aligned}$$

donde u_{1t} y u_{2s} son variables independientes $\forall t, s = 1, \ldots, T$ y

- I_t es la tasa de variación del PIB industrial del año t respecto al anterior.
- S_t es la tasa de variación del PIB del sector servicios del año t respecto al anterior.
- X_t es la tasa de variación del PIB general de Estados Unidos del año t respecto al anterior.

Con datos anuales de 1971 a 1990 estima separadamente las dos ecuaciones por MCO y obtiene (entre paréntesis, la estimación de la desviación típica del estimador):

$$\begin{aligned} \widehat{I}_t &= \underset{(0,564)}{-1,375} + \underset{(0,141)}{1,459}\, X_t \qquad SCR = 38,12 \\ \widehat{S}_t &= \underset{(0,251)}{1,5304} + \underset{(0,063)}{0,635}\, X_t \qquad SCR = 7,57 \end{aligned}$$

a) ¿Qué propiedades tienen los estimadores MCO en este modelo?

Este analista opina que el sector industrial es más sensible a los ciclos económicos de la economía americana que el sector servicios. Apoya su idea en dos contrastes que debes realizar a continuación.

b) El sector industrial es muy sensible al conjunto del sistema productivo americano si β_2 es mayor que la unidad. (Utiliza un estadístico tipo t-Student)

c) El sector servicios es menos sensible que el industrial si α_2 es menor que β_2. (Utiliza un estadístico tipo t-Student)

d) Si las perturbaciones de una y otra relación no fuesen independientes, sino que $E(u_{1t}u_{2t}) = 0{,}5 \quad \forall t$, ¿cómo habrías estimado los parámetros del modelo? Razónalo adecuadamente.

<u>PROBLEMA PV-E.34</u> (Jun-1996)

En el modelo de regresión

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \tag{1}$$

las variables Y, X_2 y X_3 son aleatorias. Con 180 observaciones se ha estimado la ecuación (1) por MCO y por VI, y el valor calculado del estadístico de Hausman ha sido m=5,2

a) Escribe la fórmula del estadístico de Hausman, su distribución y explica para qué se usa.

b) ¿Qué nos indica el valor del estadístico en este caso? Comenta qué propiedades tienen entonces los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{VI}$ (incluidas las asintóticas).

<u>PROBLEMA PV-E.35</u> (Sep-1996)

Una empresa tiene dos plantas, una en Pamplona y otra en Madrid. Las funciones de costes en cada planta son:

$$C_{1t} = \alpha_1 + \alpha_2 W_{1t} + \alpha_3 R_t + \alpha_4 Y_{1t} + u_{1t} \qquad t = 1, \ldots, 50. \tag{1}$$

$$C_{2t} = \beta_1 + \beta_2 W_{2t} + \beta_3 R_t + \beta_4 Y_{2t} + u_{2t} \qquad t = 1, \ldots, 50. \tag{2}$$

Siendo:

- C_i: Costes en i, con i=1,2 (1=Pamplona, 2=Madrid).
- W_i: Salarios en i.
- R: Tipo de interés, común para ambas plantas.
- Y_i: Producción en i.

Se supone que en las dos ecuaciones se cumplen las hipótesis básicas, entre ellas $\sigma^2_{u_1} = \sigma^2_{u_2} = \sigma^2$, y además $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0 \quad \forall t, s$

a) Explica <u>con detalle</u> el método adecuado de estimación de σ^2

b) Tras estimar las ecuaciones (1) y (2), se ha obtenido $\sum \hat{u}^2_{1t} = 1155$ y $\sum \hat{u}^2_{2t} = 1400$. Plantea el contraste de que los salarios y el tipo de interés afectan de igual modo a los costes de ambas plantas. Expón claramente la H_0, la H_a, cómo estimarías las funciones de costes, cuál sería el modelo restringido y cuál sería el estadístico para realizar el contraste.

PROBLEMA PV-E.36 (Sep-1996)

Responde a las siguientes cuestiones, indicando si son verdaderas o falsas y explicando por qué.

a) En un modelo de regresión lineal con matriz de datos X estocástica, cuando X es independiente de la perturbación, no existe ningún problema para la estimación MCO, puesto que tenemos estimadores insesgados y consistentes.

b) El estimador de variables instrumentales siempre es consistente, y por tanto, siempre es preferible al de MCO.

c) Es probable que, estimando conjuntamente las funciones de producción de dos empresas del sector eléctrico, obtengamos mejores estimaciones que estimando las ecuaciones aisladas, incluso si los parámetros de las funciones de producción son todos distintos.

d) En un MRLG estimado por MCO, no se pueden realizar contrastes cuando las perturbaciones tienen heterocedasticidad y autocorrelación, incluso si su matriz de varianzas y covarianzas $E(uu')$ es conocida.

PROBLEMA PV-E.37 (Sep-1996)

Sea el modelo

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + u_t \\ \\ u_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{array} \right.$$

siendo X_t y Z_t variables no estocásticas.

a) ¿Cuál es la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación u_t?

b) Un investigador cree que Y_t depende también de Z_{t-1}, es decir, de una de las variables exógenas retardada un período, y la incluye en el modelo. ¿Cómo cambian entonces las propiedades de los estimadores MCO?

c) Un segundo investigador, sin embargo, opina que Y_t no depende de Z_{t-1} sino que depende de Y_{t-1} ¿Cuál es el método adecuado para estimar los coeficientes del modelo (3)? Razónalo

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \\ \\ u_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{array} \right. \tag{3}$$

PROBLEMA PV-E.38 (Feb-1997)

El modelo de consumo:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + u_t \qquad (1)$$

se ha estimado con datos anuales de la CAV desde 1965 hasta 1994. Se han realizado dos estimaciones MCO por separado, con los diez primeros datos y con los diez últimos:

$$\begin{array}{lll} 1965-1974: & \hat{C}_t = 22699,0 + 0,336R_t & \\ & SCT_1 = 9703500,0 & R_1^2 = 0,85 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1985-1994: & \hat{C}_t = 38767,0 + 0,6542R_t & \\ & SCT_2 = 457036363,0 & R_2^2 = 0,78 \end{array}$$

a) Utiliza el contraste de Goldfeld y Quandt para comprobar la existencia de homocedasticidad entre los dos períodos.

b) Al estimar por MCO con todos los datos (1965-1994) se ha obtenido:

$$C_t = 35205,0 + 0,586R_t + \hat{u}_t \qquad R^2 = 0,82 \qquad (2)$$

y la regresión sobre R_t:

$$\frac{\hat{u}_t^2}{\hat{\sigma}^2} = 64519,0 + 0,52R_t + \hat{v}_t \qquad R^2 = 0,71 \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{20} \quad SCR = 1500 \qquad (3)$$

Utiliza la información que te proporcionan estas dos últimas regresiones para contrastar la misma hipótesis nula que en el apartado a).

c) Teniendo en cuenta lo obtenido en los apartados anteriores, ¿qué método de estimación utilizarías para el modelo de consumo?, ¿Por qué?. Explícalo detalladamente.

PROBLEMA PV-E.39 (Feb-1997)

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ con $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$

a) Sabiendo que $\rho = 0,5$ estima este modelo de forma eficiente con los siguientes datos:

Y_t	3	3	4	3	2	2
X_t	1	2	3	4	5	6

b) ¿Cómo estimarías el modelo si ρ fuera desconocido?.

PROBLEMA PV-E.40 (Jun-1997)

Para analizar el efecto del stock de capital (K) sobre el valor añadido bruto por ocupado (VAB) en la Comunidad Autónoma Vasca (CAV) se dispone de los siguientes datos:

t	1987	1988	1989	1990	1991	1992
VAB-PV	30	36	38	42	49	50
K-PV	60	60	61	62	65	66

Con ellos se trata de estimar la relación:

$$VABPV_t = \alpha_1 + \alpha_2\, KPV_t + u_t \quad \text{donde} \quad u_t \sim NID\,(0, \sigma_u^2)$$

a) Estima por MCO los parámetros del modelo y contrasta la significatividad de la variable stock de capital.

   Para la Comunidad Autonoma de Navarra se supone un modelo análogo:

$$VABN_t = \beta_1 + \beta_2\, KN_t + v_t \quad \text{donde} \quad v_t \sim NID\,(0, \sigma_v^2) \;\; \text{y } t: 1987, \ldots, 1992.$$

b) Si se sabe que $E(u_t\, v_t) \neq 0$, ¿Cómo estimarías α_2 y β_2 teniendo en cuenta este hecho? (Describe con detalle el modelo y el estimador que utilizarías).

c) Si $E\,(u_t\, v_t) = \sigma_{uv}$, σ_u^2 y σ_v^2 fuesen conocidos, ¿Cómo estimarías α_2 y β_2? Comenta las diferencias entre este estimador y el que utilizas en el apartado anterior.

PROBLEMA PV-E.41 (Jun-1997)

La empresa aseguradora de automóviles SEGURCAR desea analizar la estructura de riesgo de los clientes que han declarado algún siniestro en el último año. Para ello utiliza el modelo

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

donde:

- N: N.º de clientes que han declarado algún siniestro.
- Y_i: coste en pesetas de los siniestros declarados por el cliente i.
- X_{2i}: edad del cliente i.
- X_{3i}: años transcurridos desde la obtención del permiso de conducir.

Explica con qué problema te encontrarías y qué solución (si la hay) darías a cada una de estas situaciones por separado:

a) Muchos asegurados falsearon sus datos al contratar sus pólizas, de forma que no son ellos quienes realmente conducen, sino otros familiares con menos experiencia, de forma que X_{3i} está medida con error.

b) Los individuos de menor edad presentan una mayor variabilidad en el alcance de los siniestros declarados (Y_i), de forma que $Var(u_i) = \sigma^2/X_{2i}^2$.

PROBLEMA PV-E.42 (Jun-1997)

Se quiere estudiar la dependencia de la bolsa de Madrid de las bolsas de Nueva York y Londres. Para ello se define el siguiente modelo

$$MAD_t = \beta_0 + \beta_1 LON_{t-1} + \beta_2 NY_{t-1} + u_t \qquad \text{con } \ t : 2, \ldots, 30.$$

Su estimación por MCO proporciona el siguiente resultado:

$$\underset{(Desv.\ tipicas\ \rightarrow)}{\widehat{MAD}_t} = \underset{(0,0032)}{0,0095} + \underset{(0,1200)}{0,4990}\, LON_{t-1} + \underset{(0,1900)}{0,1800}\, NY_{t-1} \qquad DW = 0,82 \quad R^2 = 0,88 \quad (1)$$

a) Contrasta la significatividad individual de las variables explicativas.

b) Contrasta la existencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones.(Especifica claramente la hipótesis nula, alternativa, estadístico de contraste y regla de decisión)

Posteriormente se añade la variable explicativa MAD_{t-1} al modelo y se estima con los mismos datos obteniendo:

$$MAD_t = \underset{(0,0012)}{0,0031} + \underset{(0,0800)}{0,1910}\, MAD_{t-1} + \underset{(0,2460)}{0,8400}\, LON_{t-1} + \underset{(0,0120)}{0,0600}\, NY_{t-1} + \hat{v}_t \qquad (2)$$

con $DW = 1,9$ y

$$\hat{v}_t = \underset{(0,002)}{0,0001} + \underset{(0,09)}{0,03}\, \hat{v}_{t-1} + \underset{(0,3)}{0,009}\, MAD_{t-1} + \underset{(0,1)}{0,04}\, LON_{t-1} + \underset{(0,03)}{0,006}\, NY_{t-1} + \hat{e}_t \quad R^2 = 0,09$$

c) Contrasta la hipótesis de existencia de autocorrelación de tipo AR(1) en v_t.

d) A la vista de los resultados de B y C ¿qué puedes afirmar sobre la validez de los modelos (1) y (2)?

PROBLEMA PV-E.43 (Jun-1997)

Sea el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-2} + \gamma X_t + \delta W_t + u_t \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

donde X_t y W_t son variables no estocásticas.

a) ¿Qué propiedades tienen los estimadores MCO de α, β, γ y δ?

b) Si las propiedades no te parecen satisfactorias, ¿qué otro estimador crees tú que sería el más adecuado para este modelo?

PROBLEMA PV-E.44 (Sep-1997)

En la siguiente tabla se recogen los datos de salarios (Y) y horas trabajadas (X) para los empleados de una empresa. Además se conoce si el empleado es hombre (H) o mujer (M):

Y	170	180	165	165	105	95	100	90
X	40	50	30	40	50	35	40	35
Sexo	H	H	H	H	M	M	M	M

$\sum Y_i^2 = 153900$ $\quad \sum Y_i = 1070$
$\sum X_i = 320$ $\quad \sum X_i^2 = 13150$
$\sum X_i Y_i = 43075$

Para explicar los salarios de los trabajadores de la empresa, un investigador propone el siguiente modelo: $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ donde $u_i \sim NID(0, \sigma_u^2)$

a) Estima por MCO los parámetros del modelo y contrasta la significatividad de la variable X.

b) ¿Hay evidencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones del modelo?

c) Otro investigador piensa que el sexo es una variable relevante para la determinación del salario. Propón y estima un modelo que tenga en cuenta esta hipótesis y contrástala.

d) Teniendo en cuenta que en este modelo el estadístico de Durbin y Watson toma el valor $d = 2,2$ ¿hay evidencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones de este modelo? ¿Cómo se relaciona este resultado con lo obtenido en el apartado b)?

e) ¿Es la variable X significativa?, ¿cómo se explica este resultado teniendo en cuenta lo encontrado en el apartado a)?

PROBLEMA PV-E.45 (Sep-1997)

Supón que las variables X e Y se relacionan mediante el modelo:

$$Y_t = (X_t)^\beta \cdot u_t \qquad \text{con } \ t : 1, \ldots, T. \tag{1}$$

siendo X una variable no estocástica y u_t una perturbación aleatoria.

a) ¿Cómo linealizarías la ecuación (1) para que se obtenga una ecuación del tipo:

$$Y_t^* = \beta^* X_t^* + u_t^* \qquad \text{con } \ t : 1, \ldots, T. \tag{2}$$

En particular, ¿qué relación hay entre las variables y entre los parámetros de (1) y (2)?

b) Supón que $E(u_t^*) = 0$, $E(u_t^* u_s^*) = 0 \quad \forall t \neq s$ y $Var(u_t^*) = k(X_t^*)^2$ con k desconocido. ¿Cómo habría que transformar el modelo (2) para obtener unos estimadores con la mínima varianza mediante la aplicación de MCO?

PROBLEMA PV-E.46 (Sep-1997)

Sea el modelo lineal simple:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad \text{con } \; u_t \sim (0, \sigma_u^2) \tag{3}$$

a) Supón que X_t es una variable aleatoria. Demuestra que, bajo el supuesto de incorrelación contemporánea entre X y u, los estimadores MCO son consistentes pero sesgados. Indica claramente los supuestos que necesitas sobre la variable X.

b) Supón que X_t es fija y que, para una muestra de 150 observaciones, se estima el modelo por MCO obteniéndose los siguientes resultados:

$$Y_t = \underset{(0,2236)}{1,39} + \underset{(0,0173)}{0,2} X_t + \widehat{u}_t \qquad \text{y} \quad \widehat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2} = 0,3 \tag{4}$$

donde la desviación típica de los coeficientes estimados aparece entre paréntesis.

Contrasta la existencia de autocorrelación de tipo AR(1) en la perturbación.

c) En base a los resultados obtenidos en b), ¿cuál crees que es el mejor método de estimación para la ecuación (4)?

d) Supón que X_t es fija y que Y_t está medida con error, de forma que no se observan los datos de Y_t sino los de $Y_t^* = Y_t + \varepsilon_t$, siendo $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$, $\varepsilon_t \sim (0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $Cov(u_t, \varepsilon_t) = 0$.

Escribe la ecuación del modelo estimable y las propiedades de la perturbación de dicho modelo. ¿Qué método de estimación propondrías? Razónalo.

PROBLEMA PV-E.47 (Feb-1998)

Un investigador propone el siguiente modelo para explicar las ventas de coches en función del precio y la renta disponible per cápita para dos provincias (Provincia 1 y 2).

$$V_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 P_{1t} + \gamma_1 R_{1t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \sim \text{iid } (0, \sigma_1^2) \tag{1}$$
$$V_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 P_{2t} + \gamma_2 R_{2t} + u_{2t} \qquad u_{2t} \sim \text{iid } (0, \sigma_2^2) \tag{2}$$

donde:

- σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas.
- $E(u_{1t}\, u_{2s}) = 0 \qquad \forall t \neq s.$
- P_{it} es el precio en la Provincia i en el periodo t.
- V_{it} son las ventas en la Provincia i en el periodo t.
- R_{it} es la renta per cápita en la Provincia i en el periodo t.

INTERPRETA los siguientes supuestos e indica detalladamente cómo estimarías el modelo formado por las ecuaciones (1) y (2) en los siguientes casos (escribe el modelo y la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones):

a) $E(u_{1t}\, u_{2t}) = 0 \qquad \forall t$

b) $E(u_{1t}\, u_{2t}) = \sigma_{12}$ desconocida $\qquad \forall t$

c) $E(u_{1t}\, u_{2t}) = 0 \quad \forall t$
$\beta_1 = \beta_2$

d) $E(u_{1t}\, u_{2t}) = 5 \quad \forall t$ y donde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 25$
$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \gamma_1 = \gamma_2$

PROBLEMA PV-E.48 (Feb-1998)

Un investigador propone el siguiente modelo:

$$C_t = \beta C_{t-1} + u_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad u \sim N(0, \sigma_u^2 I)$$

siendo C_t el consumo del periodo t.

a) ¿Es el estimador $\hat{\beta}_{MCO}$, en este caso, insesgado? y ¿consistente?

Un segundo investigador propone otro modelo:

$$C_t = \beta_1 X_t + \beta_2 C_{t-1} + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

siendo X la renta nacional. Esta variable, X, es no observable pero se emplea como aproximación a la renta disponible, X^*. Esto es, $X_t^* = X_t + \epsilon_t$, siendo $\epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2 I)$ e independiente de u.

b) ¿Los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ serían en este caso consistentes? Demuéstralo.

c) ¿Qué método consideras adecuado para estimar los parámetros de este modelo? ¿por qué?

<u>PROBLEMA PV-E.50</u> (Jun-1998)

Un investigador propone el siguiente modelo para explicar el número de accidentes (Y_t) en función del número de turismos matriculados (M_t) y del número de permisos de conducir (P_t), para las provincias de Vizcaya (V) y Álava (A):

$$\begin{array}{rcll} Y_t^V & = & \beta_1 M_t^V + \beta_2 P_t^V + u_t^V & \qquad t = 1, \ldots, T. \\ Y_t^A & = & \alpha_1 M_t^A + \alpha_2 P_t^A + u_t^A & \qquad t = 1, \ldots, T. \end{array}$$

Contesta a los dos siguientes apartados de forma independiente:

a) Suponiendo que var(u_t^V)=$t^2 M_t^V$, var(u_t^A)=$t^2 M_t^A$ y cov(u_t^V, u_s^A)=0 para todo t y s,

  I) Indica la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones del modelo conjunto.

  II) Propón un método eficiente de estimación de los parámetros del modelo.

  III) ¿Cambian tus conclusiones si $\alpha_2 = \beta_2$? Razónalo.

b) Supón que $u_t^V \sim iid(0, \sigma^2)$, $u_t^A \sim iid(0, \sigma^2)$, cov($u_t^V, u_t^A$)=$\sigma_{12}$ y cov(u_t^V, u_s^A)=0 si $t \neq s$. ¿Es MCO un método eficiente de estimación? Considera que σ^2 y σ_{12} son conocidas.

<u>PROBLEMA PV-E.51</u> (Sep-1998)

Un estudio sobre el tabaco en un país ficticio presenta el siguiente modelo:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 A_t + u_t \tag{1}$$

donde

- V_t son las ventas de las principales empresas de tabaco (en miles de unidades).
- P_t es el precio (en unidades monetarias de 1960).
- A_t son los gastos en publicidad en TV, radio y prensa (en unidades monetarias de 1960).

Los resultados de la estimación por MCO con datos anuales del período comprendido entre 1960 y 1979 son:

$$\widehat{\beta} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192,89 \\ -2,45 \\ 6,52 \end{bmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} T & \sum P_t & \sum A_t \\ & \sum P_t^2 & \sum P_t A_t \\ & & \sum A_t^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 38,228 & -0,508 & -0,692 \\ & 0,012 & 0,005 \\ & & 0,016 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{u}'\widehat{u} = 829,575$$

a) Interpreta β_1, β_2 y β_3. ¿Tienen las estimaciones $\widehat{\beta}$ los signos esperados?

b) Contrasta si $\beta_2 = 0$. Interpreta el contraste y el resultado del mismo.

c) La figura 1 presenta los residuos correspondientes a la estimación anterior. Dada esta figura, ¿sospecharías la existencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones del modelo (1)? Sabiendo que $\sum_{t=2}^{20}(\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2 = 1689,8$ realiza el contraste correspondiente para confirmar tu conjetura sobre la autocorrelación.

Figura 1: Residuos. Muestra 1960-1979.

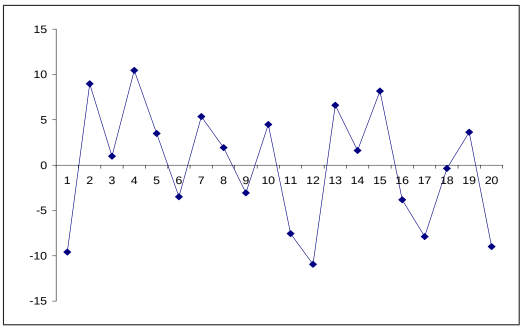
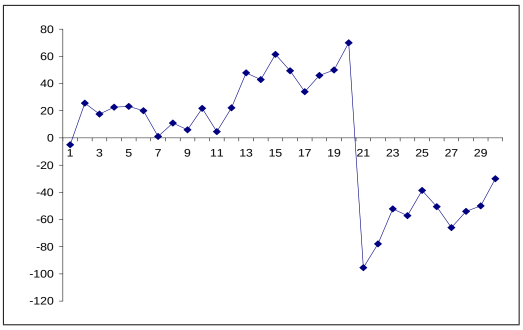


Figura 2: Residuos. Muestra 1960-1989.



d) A partir del año 1980 se reducen las ventas de cigarrillos debido a las campañas anti-tabaco y por la prohibición de la publicidad en TV. Añadiendo las observaciones de 1980-1989 a la muestra anterior se ha reestimado el modelo (1) por MCO obteniendo:

$$\widehat{\beta}^* = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1^* \\ \widehat{\beta}_2^* \\ \widehat{\beta}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -221,45 \\ 5,76 \\ 10,96 \end{bmatrix}$$

y los residuos que presenta la figura 2. Teniendo en cuenta estos nuevos resultados ¿qué propiedades presentan estos últimos estimadores?, ¿qué cambios propondrías en el modelo (1)?

<u>PROBLEMA PV-E.52</u> (Sep-1998)

Se quiere determinar la relación entre el beneficio de una empresa (B_t) y las ventas (V_t) que ésta realiza. Se dispone de una muestra para el periodo 1948-1997, a partir de la cual se obtienen las dos siguientes regresiones:

1948-1964 $\quad \hat{B}_t = \hat{\alpha_1} + \hat{\alpha_2} V_t \qquad SCR_1 = 931,28$

1981-1997 $\quad \hat{B}_t = \hat{\gamma_1} + \hat{\gamma_2} V_t \qquad SCR_2 = 3936,6$

a) Contrasta la hipótesis de que la varianza de las perturbaciones es una función creciente del tiempo.

b) Se incluye una nueva variable en el modelo, un índice de precios (P_t), siendo el modelo resultante:

$$B_t = \beta_1 + \beta_2 V_t + \beta_3 P_t + u_t$$

Se vuelven a estimar dos regresiones: una con las primeras 17 observaciones y la otra con las 17 últimas, obteniendo

$\sum_{1948}^{1964} \widehat{u}_t^2 = 932,2 \qquad \sum_{1981}^{1997} \widehat{u}_t^2 = 1950$

Vuelve a realizar el contraste del apartado anterior.

c) Teniendo en cuenta los resultados de ambos apartados, ¿cuál crees que es el problema que presenta el primer modelo?, ¿resulta adecuado estimarlo por mínimos cuadrados generalizados?

EXAMENES DE ECONOMETRIA
Plan nuevo, LE-LADE

PROBLEMA LE-1997.1 (Jun-1997)

Se han obtenido los siguientes residuos de la estimación MCO del modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

	1	2	3	4	5	6
$\hat{u}_t$	-0.16	-1.02	1.12	3.26	2.4	4.54

a) Encuentra el valor del estadístico de Durbin-Watson.

b) Supón que el valor encontrado del estadístico DW es el obtenido con 60 observaciones en lugar de 6. Si el modelo está correctamente especificado, ¿qué propiedades tienen los estimadores MCO de los parámetros?

c) ¿Conoces algún método de estimación alternativo al de MCO que mejore estas propiedades?

d) ¿Cómo estimarías el modelo por el método iterativo de Cochrane y Orcutt?.

PROBLEMA LE-1997.2 (Jun-1997)

Don Jacinto Gómez es el gerente de SACAIN S.A. en España, una empresa dedicada a la venta de objetos exclusivos. Cuenta con dos muestras **independientes** para estimar el siguiente modelo sobre las ventas de su empresa:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + \gamma_1 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_{1t} + \gamma_2 X_{2t} + u_{2t}$$

$$u_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2) \qquad u_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2)$$

a) Explica a este gerente cuál sería el método de estimación más eficiente del conjunto de parámetros y por qué.

b) Explica razonadamente cómo contrastarías la hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y la distribución del mismo. Sé **especialmente** claro en explicar como estimarías las varianzas σ_1^2 y σ_2^2.

c) Supón que la hipótesis nula anterior no ha sido rechazada. ¿Cuál sería ahora el método de estimación más adecuado del conjunto de parámetros? ¿Por qué?

[0] CVS Id: $Id: 97e2g.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

<u>PROBLEMA LE-1997.3</u> (Jun-1997)

Sea el modelo :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t es no estocástica. Por razones de ocultación de datos, el económetra no observa la variable X_t, pero dispone de observaciones de otra variable, X_t^* que puede aproximar a X_t, esto es:

$$X_t^* = X_t + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim iid(o, \sigma_\epsilon^2)$$

ϵ_t independiente de u_t.

a) Demuestra que, si se utiliza X_t^* en lugar de X_t, el estimador del parámetro β no será consistente. Calcula su límite en probabilidad.

b) ¿Es el estimador del parámetro α consistente? Calcula su límite en probabilidad.

<u>PROBLEMA LE-1997.4</u> (Sep-1997)

Dado el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta X_i + u_i \qquad u_i \sim N(0, \sigma^2 X_i^2) \qquad i = 1, 2....N$$

denominemos por $\hat{\beta}$ a la estimación MCO de β y por $\tilde{\beta}$ a la estimación MCG del mismo parámetro. Encuentra las varianzas de estos dos estimadores.

<u>PROBLEMA LE-1997.5</u> (Sep-1997)

Dado el modelo

$$Y_t = \beta X_t + u_t \qquad\qquad u_t = 0,5\ u_{t-2} + \epsilon_t$$

con $\epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$

a) Encuentra la media y la varianza de u_t. **(Nota**: Puedes utilizar las propiedades de un proceso estacionario en covarianza)

b) Explica cómo estimarías eficientemente el parámetro β.

c) En caso de no conocer el parámetro ρ_2 que acompaña a u_{t-2}, ¿cómo estimarías el mismo?, ¿cómo estimarías entonces al parámetro β?

PROBLEMA LE-1997.6 (Sep-1997)

Un investigador propone el siguiente modelo para explicar el comportamiento de la variable Y en función de las variables X_1 y X_2, para dos países distintos:

$$\begin{aligned} Y_t^a &= \beta_0 + \beta_1 X_{1t}^a + \beta_2 X_{2t}^a + u_t^a \\ Y_t^b &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t}^b + \alpha_2 X_{2t}^b + u_t^b \end{aligned}$$

Contesta a cada uno de los apartados siguientes de forma independiente:

a) Supón que tanto u_t^a como u_t^b son $N(0,\sigma^2)$ e independientes. ¿Cómo contrastarías que $\beta_2 = \alpha_2$? Ten en cuenta que σ^2 es desconocido.

b) Supón que tanto u_t^a como u_t^b son $N(0,\sigma^2)$ y que $cov(u_t^a, u_s^b) = \begin{cases} \sigma_{12} & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$. ¿Cómo contrastarías que $\beta_2 = \alpha_2$? Supón que σ^2 y σ_{12} son parámetros conocidos.

c) Indica la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones si $var(u_t^a) = t^2 X_{1t}^a$ mientras que $u_t^b = 0{,}5 u_{t-1}^b + \epsilon_t$, siendo $\epsilon_t \sim N(0,\sigma_\epsilon^2)$.

PROBLEMA LADE-1997.1 (Jun-1997)

Considera el siguiente modelo de regresión general:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \ldots, 100$$

donde X_2 y X_3 son fijas y $u_t \sim NID(0, \sigma_t^2 = a + bt^2)$.

a) Supón que se sabe que $a = 2b$, siendo b un parámetro desconocido.

   I) Obtener la matriz de varianzas y covarianzas de Y.

   II) Indicar el método adecuado de estimación del modelo, razonando la respuesta.

b) Supón ahora que $a = 0$ y b es un parámetro desconocido. Se ha estimado el modelo por mínimos cuadrados generalizados, obteniéndose las siguientes estimaciones:

$$\hat{\beta}_{MCG} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \widehat{V}(\hat{\beta}_{MCG}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Realiza los contrastes de las siguientes hipótesis:

   I) $\beta_3 = 0$

   II) $\beta_3 = 0$ y $\beta_1 + 2\beta_2 = 5$

[0] CVS Id: \$Id: 97e2e.tex,v 1.3 2004/01/30 09:13:41 etpdihei Exp

PROBLEMA LADE-1997.2 (Jun-1997)

Una conocida empresa automovilística está interesada en el lanzamiento de un nuevo modelo en el mercado español y encarga a uno de sus empleados que realice un estudio sobre este mercado. Le proporcionan la siguiente información sobre 20 modelos de similares características ya comercializados:

- Y_i = Ventas del modelo i realizadas en el último año en el estado español, $i = 1, \ldots, 20$ (millones de pesetas).
- P_i = Precio del modelo i (miles de pesetas).
- PC_i = Precio medio del resto de modelos de similares características fabricados por otras empresas (miles de pesetas).

Además, el departamento de publicidad ha realizado un informe sobre diferentes mercados, en el que se concluye que en dos países, Italia y España, hay una gran proporción de compradores jóvenes (JASP), mientras que en el resto de países la mayor mayor parte de la demanda son conductores de más edad. El encargado del estudio decide pedir a sus superiores los datos del mercado italiano, **con objeto de tener en cuenta las posibles relaciones existentes entre los dos mercados**. Estos le proporcionan la misma información sobre ventas y precios de los 20 modelos en el mercado italiano.

a) Argumenta la(s) vía(s) mediante las cuales las ventas de los coches en España y en Italia podrían estar relacionadas. (Nota: recuerda que esto es un examen de econometría).

b) Especifica un modelo, acorde con tus comentarios en el apartado anterior, que permita que la influencia de los precios sobre las ventas en los dos países considerados sea distinta. Incluye los supuestos que haces.

c) Explica el método más adecuado para estimar los parámetros del modelo.

d) Plantea el contraste de que los precios (P y PC) afectan del mismo modo a las ventas de coches en los dos países.

PROBLEMA LADE-1997.3 (Sep-1997)

Un investigador quiere analizar el comportamiento del consumo medio familiar, C_t, en función de la renta media familiar, Y_t y del índice de precios de consumo, P_t para lo cual decide estimar el modelo:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 P_t + u_t \qquad t = 1, .., 50 \tag{1}$$

Tras aplicar MCO, se obtienen los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{var})}{\widehat{C}_t} = \underset{(12,3)}{51,14} + \underset{(0,00487)}{0,72}\, Y_t - \underset{(0,03)}{0,31}\, P_t \qquad t = 1, ..., 50 \qquad R^2 = 0,98 \qquad DW = 1,72 \tag{2}$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{1566} = 7139,61 + 0,10 Y_t^2 + 1,57 P_t^2 + \hat{e}_t \qquad SCR = 32563,86 \qquad SCT = 50288,26$$

a) Contrasta la hipótesis $H_0 : \beta_3 = 0$ en el modelo (1) suponiendo que $u_t \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2)$. Interpreta el resultado.

b) Se sospecha que las perturbaciones pueden estar autocorrelacionadas y que, en particular, pueden seguir un proceso autorregresivo de orden 1. Contrasta esta sospecha. Escribe la hipótesis nula, la hipótesis alternativa y el estadístico de contraste.

c) Asimismo se sospecha que pueden existir problemas de heterocedasticidad en el término de error u_t. Contrasta esta hipótesis con los datos proporcionados. Plantea la hipótesis nula, la hipótesis alternativa, el estadístico, su distribución y la regla de decisión.

Posteriormente, el investigador estima por MCO otros dos modelos, con los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{var})}{(\widehat{C/Y})_t} = \underset{(15,36)}{71,76}(1/Y_t) + \underset{(0,00328)}{0,78} - \underset{(0,004)}{0,60}(P/Y)_t \tag{3}$$

$$\underset{(\widehat{var})}{(\widehat{CY})_t} = \underset{(35,36)}{40,76}Y_t + \underset{(0,0328)}{1,08}\ Y_t^2 - \underset{(0,024)}{0,40}(PY)_t \tag{4}$$

d) Si la varianza de u_t está relacionada con la variable Y_t de forma que $var(u_t) = \sigma^2 {Y_t}^2$, elige la transformación adecuada sobre las variables del modelo original para que en el modelo transformado desaparezca el problema de heterocedasticidad. Demuestra que en el modelo que has elegido la perturbación cumple las hipótesis clásicas.

e) En el modelo transformado elegido, efectúa el mismo contraste del primer apartado. Compara y comenta los resultados de ambos contrastes. En base a ellos, ¿consideras significativa la variable P_t?

PROBLEMA LADE-1997.4 (Sep-1997)

Sea el modelo $\quad P_t = \alpha + \beta_1 L_t + \beta_2 K_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad$ donde:

- P_t es el logaritmo neperiano de la producción.
- L_t es el logaritmo neperiano de la cantidad de trabajo empleada.
- K_t es el logaritmo neperiano de la cantidad de capital empleado.

a) Interpreta los coeficientes β_1 y β_2.

b) Obtén la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación si $u_t = 0,3\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t,\ \varepsilon \sim (0, 4 \cdot I)$.

c) Si $u_t = 0,7u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon \sim (0, \sigma_\varepsilon^2 \cdot I)$

   I) Explica cómo estimarías los coeficientes del modelo. Cita las propiedades del estimador propuesto.

   II) ¿Cómo contrastarías la hipótesis de rendimientos constantes a escala, $\beta_1 + \beta_2 = 1$?

PROBLEMA LADE-1997.5 (Sep-1997)

La agencia de viajes CURRO considera que sus beneficios anuales (Y) dependen de sus gastos en publicidad (X) y de sus beneficios del año anterior. Para saber cuál ha sido la relación entre estas variables durante los últimos 5 años, decide estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, 5 \tag{5}$$

con los siguientes datos:

t	1	2	3	4	5
Y_t	-5	8	1	2	-2
X_t	2	8	3	3	0

a) Realiza la estimación de los parámetros de (5) por el método de variables instrumentales, utilizando X_{t-1} como instrumento para Y_{t-1}. Escribe cuáles son las matrices hasta llegar al resultado final.

b) ¿Te parece X_{t-1} un instrumento adecuado para Y_{t-1}? ¿Por qué?

c) Teniendo en cuenta que no se ha especificado la distribución de la perturbación, ¿es posible que exista algún método de estimación con mejores propiedades asintóticas? Explica el método adecuado para dos diferentes hipótesis sobre la distribución de la perturbación.

PROBLEMA LE-1998.1 (Jun-1998)

Se quiere buscar la relación entre la bolsa de Madrid y otras bolsas europeas mediante la siguiente relación

$$MAD_t = \beta_0 + \beta_1 LON_t + \beta_2 FRA_t + u_t \tag{1}$$

donde MAD_t, LON_t y FRA_t son las primeras diferencias de logaritmos de los índices de la bolsa de Madrid, Londres y Francfort respectivamente.

Empleando un muestra de 60 observaciones se han obtenido por MCO los siguientes resultados:

$$\underset{(\text{Estadístico } t)}{\widehat{MAD}_t} = \underset{(1,12)}{0,01} + \underset{(2,75)}{0,44} LON_t + \underset{(2,35)}{0,27} FRA_t \qquad R^2 = 0,45 \tag{2}$$

a) Dada la siguiente ecuación auxiliar, contrasta la posible existencia de una estructura AR(1): $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$ en las perturbaciones:

$$\underset{(\text{Estadístico } t)}{\hat{u}_t} = \underset{(5,19)}{0,15}\,\hat{u}_{t-1} - \underset{(0,88)}{0,23} LON_t + \underset{(0,58)}{0,01} FRA_t + \hat{w}_t \qquad R^2 = 0,09 \tag{3}$$

[0]CVS Id: $Id: 98e2g.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

b) ¿Conoces algún otro procedimiento para contrastar la misma hipótesis que en el apartado anterior? Define H_0, H_a, el estadístico y la regla de decisión.

c) Si realmente existe un proceso AR(1) en u_t, ¿qué propiedades tiene los estimadores MCO y qué validez tienen los estadísticos t presentados en la ecuación (2)?

d) Si realmente existe un proceso AR(1) en u_t y suponiendo que esta autocorrelación se debe a la propia naturaleza de los datos y no a la mala especificación del modelo, ¿cómo estimarías la ecuación (1)? ¿Cómo contrastarías la significatividad conjunta de las variables LON_t y FRA_t?

PROBLEMA LE-1998.2 (Jun-1998)

Supón que se quiere estimar el siguiente modelo de regresión lineal con datos trimestrales

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-4} + u_t, \tag{4}$$

donde la variable X_t se supone no estocástica.

a) ¿Cuál sería el método adecuado de estimación de la ecuación (4) si $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$?

b) ¿Es el estimador MCO de β_0, β_1 y β_2 insesgado y consistente si la perturbación u_t sigue un proceso $AR(1)$: $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$?

c) ¿Es el estimador MCO de β_0, β_1 y β_2 insesgado y consistente si la perturbación u_t sigue un proceso $MA(1)$: $u_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}, \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$?

PROBLEMA LE-1998.3 (Jun-1998)

En el modelo

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t, \quad t = 1, 2, ..., T \tag{5}$$

donde las variables X_{1t} y X_{2t} son no estocásticas se cumple:

- $E(u_t) = 0 \quad t = 1, 2, ..., T$
- $E(u_t u_s) = 0 \quad t \neq s,\ t, s = 1, 2, ..., T$
- $E(u_t^2) = t/X_{1t} \quad t = 1, 2, ..., T.$

a) ¿Cómo transformarías el modelo para que las perturbaciones cumplan las hipótesis básicas? Obtén la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones transformadas.

b) ¿Qué propiedades tienen el estimador MCO de β_0, β_1 y β_2 en la ecuación (5)? Si u_t sigue una distribución normal independiente, ¿cuál es la distribución de este estimador?

c) Si quieres predecir por intervalo la variable Y_t, ¿utilizarías la fórmula habitual: $(X_p'\hat{\beta} \pm t_{T-K}^{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{1 + X_p'(X'X)^{-1}X_p})$?

PROBLEMA LE-1998.4 (Jun-1998)

Se quiere estimar mediante una muestra de datos trimestrales la siguiente ecuación para el número de coches vendidos de una marca determinada (V^A) en la provincia A:

$$V_t^A = \beta_0^A + \beta_1^A P_t^A + \beta_2^A A_t^A + \beta_3^A A_{t-1}^A + u_t^A, \quad u_t^A \sim N(0, \sigma_A^2) \tag{6}$$

donde P_t^A es el precio del coche y A_t^A la cantidad gastada en publicidad para promocionar la marca en el trimestre t. Se sospecha correlación contemporánea ($E(u_t^A u_t^B) = \sigma_{AB}^2$, $\forall t$) entre las perturbaciones u_t^A con las perturbaciones u_t^B de la ecuación de la provincia B:

$$V_t^B = \beta_0^B + \beta_1^B P_t^B + \beta_2^B A_t^B + \beta_3^B A_{t-1}^B + u_t^B \quad u_t^B \sim N(0, \sigma_B^2) \tag{7}$$

¿Cómo estimarías las ecuaciones (6) y (7) suponiendo que los precios influyen en las ventas de igual manera? (σ_A^2, σ_B^2 y σ_{AB}^2 son desconocidas.)

PROBLEMA LE-1998.5 (Sep-1998)

En una empresa del sector alimenticio se quiere estimar la siguiente ecuación de salarios (W_i):

$$W_i = \beta_1 + \beta_2 H_i + \beta_3 A_i + u_i$$

donde H_i son las horas trabajadas y A_i es la antiguedad del empleado. Utilizando una muestra de 25 empleados se obtiene mediante MCO la siguiente estimación

$$\underset{(\text{Estadístico } t)}{\widehat{W}_i} = \underset{(2,24)}{49{,}906} + \underset{(4,48)}{982,14}\, H_i + \underset{(2,4)}{4{,}571,60}\, A_i \qquad DW = 1,87 \tag{1}$$

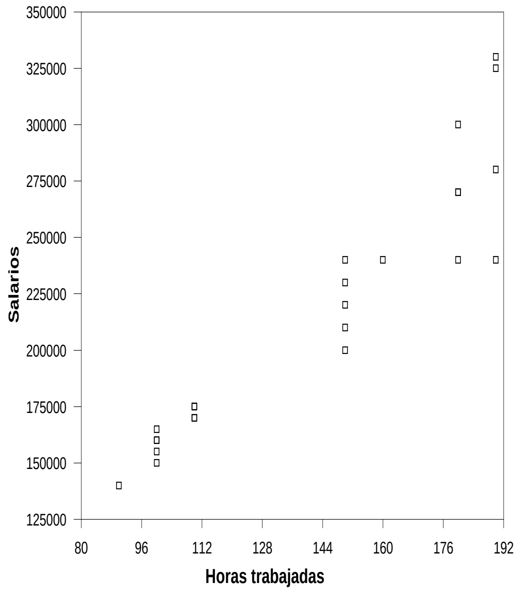
a) Se sospecha el incumplimiento de alguna de las hipótesis básicas sobre las perturbaciones u_i. Contrasta la posible existencia de autocorrelación del tipo $AR(1)$ en las perturbaciones. Sabiendo que empleamos datos de sección cruzada, ¿te parece razonable el resultado de tu contraste?

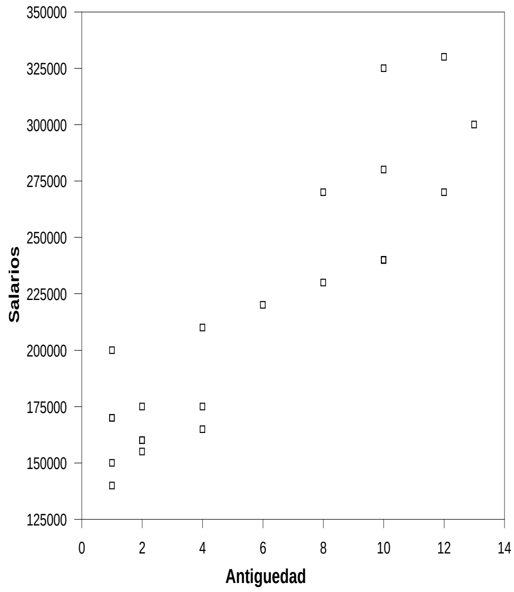
b) Dada la estimación de la siguiente regresión auxiliar, contrasta la posible existencia de heterocedasticidad en u_i

$$\frac{\widehat{u}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = \underset{(2{,}08)}{-3,75} + \underset{(0,17)}{0,3}\, H_i - \underset{(0,01)}{0,02}\, A_i + \widehat{v}_i \qquad R^2 = 0,47 \qquad \sum_{i=1}^{25} \widehat{v}_i^2 = 61,18 \tag{2}$$

donde $\hat{u}_i$ son los residuos MCO de la regresión (1) y $\hat{\sigma}^2$ es el estimador Máximo Verosímil de la varianza de las perturbaciones u_i. Sabiendo que empleamos datos de sección cruzada, ¿te parece razonable el resultado de tu contraste?

c) Teniendo en cuenta los resultados de los contrastes anteriores y las gráficas que se proporcionan a continuación, ¿cómo mejorarías las estimaciones presentadas en la ecuación (1)? Describe detalladamente el procedimiento de estimación que llevarías a cabo.





<u>PROBLEMA LE-1998.6</u> (Sep-1998)

Un investigador quiere analizar el comportamiento del mercado de perfumes en un pais, en función de los precios, (P), y de los gastos realizados en publicidad, (A).

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 A_t^* + u_t \quad u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad t = 1, \ldots, 100 \tag{3}$$

donde V_t es la cantidad vendida de perfume en el trimestre t.

a) Como consecuencia de la ocultación de datos por parte de las empresas, se observa que la variable "gastos en publicidad" utilizada en (4), es solamente una aproximación de los verdaderos gastos de publicidad, A^* esto es, $A_t = A_t^* + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$, ϵ_t y u_t independientes. Por esta razón, la estimación Mínimo Cuadrática del modelo viene dado por:

$$\widehat{V}_t = \underset{(9871)}{25727} - \underset{(0,33)}{0,96}\, P_t + \underset{(0,4)}{1,36}\, A_t \tag{4}$$

¿qué podemos decir sobre los resultados presentados en (4)?

b) Supongamos que lo anterior es cierto. Sin embargo, se tiene la **certeza** de que los gastos de publicidad reales no observables, A_t^*, son una función creciente en el tiempo del tipo:

$$A_t^* = 0,05\ t + \eta_t \quad \eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2)$$

donde η_t y u_t son independientes. Si se tiene en cuenta esta información, ¿cuál sería tu modelo a estimar?, ¿qué propiedades tiene el estimador MCO en este nuevo modelo?

PROBLEMA LE-1998.7 (Sep-1998)

Supón que el grupo Eroski te concede una beca para realizar un estudio sobre la demanda de los cereales "Eroski" y los cereales "Kellog's". El primer día de trabajo, la comisión de estudios te presenta el siguiente modelo

$$CE_t = \alpha_e + \beta_e PE_t + \gamma_e PK_t + u_t \quad t = 1, \ldots, 100 \quad u \sim (0, \sigma_u^2 I) \quad (5)$$

$$CK_t = \alpha_k + \beta_k PK_t + v_t \quad t = 1, \ldots, 100 \quad v \sim (0, \sigma_v^2 I) \quad (6)$$

donde CE y CK son las cantidades vendidas de cereales "Eroski" y "Kellog's" respectivamente. Las variables PE y PK son los precios de ambas marcas de cereales.

a) Si las muestras fueran independientes, ¿cómo estimarías las ecuaciones (5) y (6)?

b) Se sospecha de una posible correlación contemporánea entre ambas ecuaciones a través de las perturbaciones, $E[u_t v_t] = \sigma_{uv} \quad \forall t$, ¿cómo estimarías las ecuaciones en este caso?

c) Teniendo en cuenta la correlación anterior, $E[u_t v_t] = \sigma_{uv} \quad \forall t$, se quiere contrastar que la influencia del precio sobre su propia demanda es idéntica en ambas ecuaciones, $\beta_e = \beta_k$. ¿Cómo llevarías a cabo este contraste? Define la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico y la regla de decisión.

PROBLEMA LADE-1998.1 (Jun-1998)

Se dispone de datos de 50 regiones, para el año 1995, sobre consumo de tabaco, Y_i, gasto en publicidad, X_{2i}, y precio del tabaco, X_{3i}. Con ellos se quiere hacer un análisis econométrico de la relación:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{3i}^2 + u_i \qquad i = 1, \ldots, 50. \quad (1)$$

donde $E(u_i) = 0 \quad \forall i$
$E(u_i^2) = \sigma_i^2$
$E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

[0] CVS Id: $Id: 98e2e.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

Se han obtenido las siguientes estimaciones con la muestra disponible:

$$\widehat{\beta}_{MCO} = \begin{bmatrix} 2991 \\ 0,18 \\ -552,62 \\ 24,57 \end{bmatrix} \qquad \widehat{V}_a(\widehat{\beta}_{MCO}) = \begin{bmatrix} 1802316 & & & \\ 4,62 & 0,0001 & & \\ -349062 & -1,01 & 67952,9 & \\ 16214,6 & 0,05 & -3167,14 & 147,97 \end{bmatrix}$$

donde $\widehat{V}_a(\widehat{\beta}_{MCO})$ es la estimación de la varianza asintótica de $\widehat{\beta}_{MCO}$ según la expresión de White.

a) Contrasta la hipótesis de que el gasto en publicidad no influye en el consumo de tabaco.

b) ¿En qué situación o situaciones resulta ventajosa la utilización del estimador de White?

PROBLEMA LADE-1998.2 (Jun-1998)

Queremos analizar la evolución del precio de la vivienda en Bilbao, (P_{Bt}), en los últimos 48 años. Para ello disponemos de datos sobre dos variables, los tipos de interés, (r_t), y la renta disponible, (Y_{Bt}). Se especifica el siguiente modelo:

$$P_{Bt} = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_{Bt} + u_{1t} \qquad t = 1950, ..., 1997 \tag{2}$$

donde $u_{1t} \sim N(0, \sigma^2_{u_1})$

Estimado el modelo por MCO, obtenemos los siguientes resultados:

$$\underset{(d\hat{e}s(\hat{\beta}_i))}{\widehat{P}_{Bt}} = \underset{(0,0014)}{0,0844} - \underset{(0,1200)}{0,0123}\, r_t + \underset{(0,1500)}{0,2556}\, Y_{Bt} \tag{3}$$

$$DW = 0,9 \qquad R^2 = 0,86$$

a) Contrasta la existencia de autocorrelación de primer orden en las perturbaciones.

Otro analista opina que una variable relevante a la hora de explicar los precios de las viviendas son los precios de las mismas el año anterior. Decide incluirla en el modelo y para ello especifica la siguiente relación:

$$P_{Bt} = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_{Bt} + \beta_4 P_{B(t-1)} + u_{1t} \qquad t = 1951, ..., 1997 \tag{4}$$

Estimado este modelo por MCO con los mismos datos que el anterior se obtienen los siguientes resultados:

$$\underset{(d\hat{e}s(\hat{\beta}_i))}{\widehat{P}_{Bt}} = \underset{(0,0099)}{0,0744} - \underset{(0,1000)}{0,0113}\, r_t + \underset{(0,1800)}{0,3556}\, Y_{Bt} + \underset{(0,008)}{0,1134}\, P_{Bt-1} \tag{5}$$

$$BG = 0,94 \qquad R^2 = 0,96$$

b) Contrasta la existencia de autocorrelación de primer orden en las perturbaciones.

c) Si estuvieras interesado en comprarte un piso el año que viene, ¿cuál de los dos modelos anteriores utilizarías para predecir el precio del mismo? Razónalo detalladamente.

Supongamos, a continuación, que también disponemos de datos para analizar los precios de las viviendas en Donostia. Se especifica el siguiente modelo:

$$P_{Dt} = \alpha_1 + \alpha_2 r_t + \alpha_3 Y_{Dt} + \alpha_4 P_{D(t-1)} + u_{2t} \qquad t = 1951, ..., 1997 \tag{6}$$

donde $u_{2t} \sim NID\,(0, \sigma^2_{u_2})$
$Cov(u_{1t}u_{2t}) = 0 \quad \forall t, s$

d) Se desea contrastar la hipótesis nula de que el parámetro que acompaña a la variable r_t es igual en ambas ecuaciones. Plantea la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y la regla de decisión.

e) Si se acepta la hipótesis nula de que ambos parámetros son iguales, ¿cómo estimarías los parámetros de ambos modelos? ¿Qué propiedades tendría dicho estimador?

PROBLEMA LADE-1998.3 (Jun-1998)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{7}$$

donde $u_t \sim iid(0, \sigma^2_u)$
X_{2t} y Z_t son variables fijas.
$X_{1t} = \gamma Z_t + \eta_t \qquad \eta_t \sim iid(0, \sigma^2_\eta)$

a) ¿Cuándo estimarías el modelo por el método de variables instrumentales utilizando la variable Z_t como instrumento para la variable X_{1t}? ¿Por qué? ¿Crea problemas la variable X_{2t}? ¿Por qué?

A partir de una muestra de 52 observaciones se han obtenido los siguientes productos cruzados:

	Y_t	X_{1t}	X_{2t}	Z_t
Y_t	100	80	-60	60
X_{1t}		100	-40	-10
X_{2t}			80	50
Z_t				40

por ejemplo $\sum X_{1t}X_{2t} = -40$

b) Siendo Z_t el instrumento para X_{1t}, estima los parámetros β_1 y β_2 del modelo utilizando el método de variables instrumentales.

Los resultados de estimar por MCO el modelo han sido:

$$\underset{(\hat{des}(\hat{\beta}_i))}{\widehat{Y}_t} = \underset{(0,077)}{0,625}\, X_{1t} - \underset{(0,086)}{0,4375}\, X_{2t} \tag{8}$$

c) Contrasta la $H_0 : E(X_{1t}u_t) = 0$ sabiendo que:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{VI}) = \begin{pmatrix} 2,1166 & 1,0583 \\ 1,0583 & 1,2254 \end{pmatrix}$$

Como conclusión del resultado del contraste ¿cuál es el método adecuado para estimar el modelo (7)? ¿Qué propiedades tienen dichos estimadores?

PROBLEMA LADE-1998.4 (Sep-1998)

En un estudio sobre la relación entre el consumo, (Y) y la renta disponible de las familias, (X) se han obtenido los siguientes resultados estimando por Mínimos Cuadrados Ordinarios:

$$\underset{(\hat{desv}(\hat{\beta}_i))}{Y_i} = \underset{(7,17)}{2,30} + \underset{(0,05)}{0,86}\, X_i + \hat{u}_i \tag{1}$$

$$R^2 = 0,9687 \qquad N = 115$$

Si sabemos que X_i es una variable no estocástica y:

$$u_i \sim NID(0,\ \ 1 + 2X_i)$$

a) ¿Qué propiedades tienen los estimadores MCO de los parámetros del modelo (1) en muestras finitas? Demuéstralas.

b) Elige la transformación adecuada sobre las variables del modelo original para que en el modelo transformado desaparezca el problema de heterocedasticidad. Demuestra que en el modelo que has elegido la perturbación cumple las hipótesis clásicas.

PROBLEMA LADE-1998.5 (Sep-1998)

Se analiza la relación entre las ventas de un producto, (Y) y su precio, (X) para lo cual se ha especificado el siguiente modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta\, X_t + u_t \tag{2}$$

Disponemos de los siguientes datos:

t	1	2	3	4	5	6
Y	27	32	25	31	30	32
X	9	12	8	10	12	11
$\hat{u}$	-0,5	0	-1	2	-2	1,5

$\hat{u} = Y - X\hat{\beta}_{MCO} \qquad \hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$

a) ¿Hay evidencia de autocorrelación de primer orden en el modelo (2)? Básate en algún estadístico de contraste.

Se ha estimado el siguiente modelo:

$$Y_t - \rho^* Y_{t-1} = \alpha(1-\rho^*) + \beta(X_t - \rho^* X_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon) \tag{3}$$

para distintos valores de ρ^* obteniendo las siguientes Sumas de Cuadrados Residuales (SCR):

ρ^*	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
SCR	34,2	30,9	27,8	24,9	22,2	19,6	17,2	15,1	13,0	11,1

ρ^*	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-0,99
SCR	9,4	7,8	6,5	5,3	4,2	3,3	2,6	2,1	1,7	2,1

b) Dada la información anterior, calcula las estimaciones de ρ, α y β por el método de Hildreth-Lu.

c) ¿Cúales son las propiedades de los estimadores del apartado anterior?

PROBLEMA LADE-1998.6 (Sep-1998)

Tres investigadores deben estimar el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1\, Y_{t-1} + \beta_2\, X_t + u_t \tag{4}$$

donde: Y_t es el precio de venta de un piso de nueva construcción en t.
X_t es el tipo de interés en t.

Sobre el modelo se tiene la siguiente información:

- El modelo está correctamente especificado.
- La perturbación u_t sigue una distribución normal con $E(u_t) = 0 \quad \forall t$

Los tres investigadores no se ponen de acuerdo sobre el método de estimación adecuado, por lo que deciden presentar tres estimaciones alternativas:

Investigador 1: Presenta los siguientes resultados obtenidos con $t = 2, \ldots, 101$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}^2 & \sum Y_{t-1}X_t \\ \sum Y_{t-1}X_t & \sum X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 0,831371 \\ 0,882068 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00046 & -0,00134 \\ -0,00134 & 0,0076 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4442,139 \\ 903,487 \end{pmatrix} \tag{6}$$

donde además $\quad BG = 23,24 \qquad SCR = 157,43$

a) ¿Qué método de estimación está utilizando? Razónalo.

b) ¿Qué propiedades tienen sus estimadores? Realiza algún contraste si lo crees necesario.

Investigador 2: Presenta los siguientes resultados obtenidos con $t = 2, \ldots, 101$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X_{t-1}Y_{t-1} & \sum X_{t-1}X_t \\ \sum X_t Y_{t-1} & \sum X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum X_{t-1}Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} 0,770343 \\ 1,060368 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,003809 & -0,00291 \\ -0,01112 & 0,012178 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,770343 \\ 903,0487 \end{pmatrix} \tag{8}$$

donde además $\quad BG = 27,66 \qquad SCR = 165,5112$

c) ¿Qué método de estimación está utilizando? Razónalo.

d) ¿Qué propiedades tienen sus estimadores? Realiza algún contraste si lo crees necesario.

Investigador 3: Presenta los siguientes resultados con $t = 3, \ldots, 101$

Sean $Y_t^* = (Y_t - \rho^* Y_{t-1})$, $X_t^* = (X_t - \rho^* X_{t-1})$,

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}^{*2} & \sum Y_{t-1}^* X_t^* \\ \sum Y_{t-1}^* X_t^* & \sum X_t^{*2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_{t-1}^* Y_t^* \\ \sum X_t^* Y_t^* \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} 0,775642 \\ 1,090742 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,001035 & -0,00117 \\ -0,00117 & 0,00938 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1014,806 \\ 245,7676 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\rho^* = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_{t-1}^2} = 0,5387823 \tag{11}$$

donde además $\quad \hat{u}_t = Y - X\hat{\beta}_{VI} \qquad BG = 0,27 \qquad SCR = 118,0408$

e) ¿Qué método de estimación está utilizando? Razónalo.

f) A la vista de lo comentado en los apartados anteriores, ¿qué investigador ha utilizado el mejor estimador? Razona tu respuesta.

<u>PROBLEMA LE-1999.1</u> (Jun-1999)

Un investigador, interesado en analizar las importaciones nacionales (Y) correspondientes al período 1964-1985, propone el siguiente modelo de regresión:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad\qquad u_t \sim NID(0, \sigma^2) \tag{1}$$

donde X_2 es la renta nacional y X_3 son los precios relativos de las importaciones. Los resultados de la estimación del modelo por MCO son los siguientes:

$$\underset{\text{(estadístico t)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(2,80)}{273,81} + \underset{(19,03)}{0,2458}\ X_{2t} + \underset{(2,80)}{0,2467}\ X_{3t} \tag{2}$$

$$R^2 = 0,9846 \qquad\qquad \hat{u}'\hat{u} = 10709,1$$

a) ¿Tienen los coeficientes los signos esperados?

b) El investigador no se siente tranquilo sin verificar la inexistencia de un proceso autorregresivo en las perturbaciones. Sabiendo que $\sum_{t=1965}^{1985}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 18487,85$, realiza el contraste de Durbin-Watson e interpreta el resultado.

c) En los países occidentales los años 1964-1973 se correspondieron con un período de auge y los años 1974-1985 con uno de recesión. Por esta razón el investigador decide generalizar el modelo permitiendo la variación de los coeficientes:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2\ X_{2t} + \beta_3\ X_{3t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \sim NID(0, \sigma^2) \qquad t = 1964, \ldots, 1973 \tag{3}$$
$$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2\ X_{2t} + \alpha_3\ X_{3t} + u_{2t} \qquad u_{2t} \sim NID(0, \sigma^2) \qquad t = 1974, \ldots, 1985 \tag{4}$$

Los resultados obtenidos son:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -270 \\ 0,3 \\ 0,34 \end{bmatrix} \qquad \hat{u}_1'\hat{u}_1 = 3821,8 \qquad \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} -282,08 \\ 0,564 \\ 0,47 \end{bmatrix} \qquad \hat{u}_2'\hat{u}_2 = 6276,56 \tag{5}$$

Contrasta la constancia de los coeficientes. Interpreta el resultado del contraste e indica cuál de los dos modelos parece confirmado por los datos.

[0] CVS Id: $Id: 99e2g.tex,v 1.3 2004/02/06 10:33:04 etpdihei Exp

d) Dado que la muestra corresponde a un período temporal el investigador se pregunta si la varianza no será una función creciente del tiempo. Explica el procedimiento que seguirías para contrastar esta hipótesis.

e) Con ánimo de llevar a cabo un contraste de heterocedasticidad, el investigador realiza las siguientes regresiones auxiliares:

$$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \hat{\beta}_3 X_{3t} \quad \hat{u}_1'\hat{u}_1 = 1920,46 \quad t = 1964, \ldots, 1972 \tag{6}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_{2t} + \hat{\alpha}_3 X_{3t} \quad \hat{u}_2'\hat{u}_2 = 5135,33 \quad t = 1977, \ldots, 1985 \tag{7}$$

Contrasta la existencia de heterocedasticidad, basándote en la información proporcionada.

f) Dados los resultados de los apartados anteriores, ¿qué procedimiento elegirías para estimar el modelo? ¿Por qué? Detalla el procedimiento así como las razones que te llevan a adoptarlo.

PROBLEMA LE-1999.2 (Jun-1999)

Los resultados de la estimación por MCO del modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$ con $t = 2, \ldots, 33$ son:

$$\underset{\text{(estadístico t)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(1,25)}{0,5} + \underset{(2,01)}{3}\, X_{2t} - \underset{(-8,61)}{0,59}\, Y_{t-1}, \quad R^2 = 0,57 \quad DW = 3,24$$

a) ¿Por qué crees que es conveniente en este modelo contrastar la existencia de autocorrelación en las perturbaciones?

b) ¿Cómo contrastarías la hipótesis anterior? Explica detalladamente el procedimiento del contraste que propones. Explica cuáles son las modificaciones que llevarías a cabo en la estimación del modelo en función del resultado obtenido en el contraste de autocorrelación. Si tienes datos, lleva a cabo el contraste.

PROBLEMA LE-1999.3 (Jun-1999)

Un agrónomo desea estimar la relación entre el rendimiento de trigo (Y) y la cantidad utilizada de abono (X^*). Para ello dispone de datos sobre el rendimiento y la cantidad de abono (X) declarada por el productor que puede no coincidir con la cantidad utilizada (X^*). Al mismo tiempo, conoce la variable de gasto efectivo en la compra de abono (Z_i), que cree es exógena, independiente del error de medida en la cantidad de abono declarada y está, al tiempo, correlacionada con la cantidad de abono que se utiliza. Se dispone de 20 observaciones, de las que se obtienen los siguientes valores:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 492,78 \qquad \sum_{i=1}^{20} Z_i = 284,4 \qquad \sum_{i=1}^{20} Z_i X_i = 7369,5$$
$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 434,94 \qquad \sum_{i=1}^{20} Z_i Y_i = 6472,8$$

a) Escribe el modelo adecuado y explica con claridad el método de estimación a utilizar y las razones que te llevan a elegirlo.

b) Estima por un procedimiento consistente la relación entre Y y X^*.

PROBLEMA LADE-1999.1 (Jun-1999)

El dueño de una pequeña empresa os ha contratado en prácticas a tí y a otra persona para que analicéis por separado la productividad (Y_i) de sus 20 empleados en función de la nota de un test (X_i) que les ha hecho (X_i es siempre positivo). El que le presente al jefe los mejores resultados se queda con el trabajo.

Tu competidor ha sido más rápido que tú. Ha estimado un modelo de regresión simple por MCO, despreocupándose de si se cumplen las hipótesis básicas o no. Tú has sido más lento porque te preocupaba que hubiera heterocedasticidad. Has calculado el estadístico de Goldfeld y Quandt, agrupando a los 20 empleados en dos grupos disjuntos de 10 en función de la nota que han obtenido en el test. Este estadístico te sale 6,62.

a) Explica los pasos hasta obtener el valor del estadístico y di cuál sería la conclusión del contraste. Propón una forma funcional razonable para Var(u_i) **justificando** tu elección.

b) Digamos que has elegido Var$(u_i) = \sigma^2 X_i^2$. Suponiendo que $E(u_i) = 0 \quad \forall i$, $E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$, escribe el modelo que estimarías por MCO tras conseguir que sus perturbaciones sean homocedásticas. Demuestra que lo son.

Los resultados de tu competidor que ha estimado por MCO son:

$$\hat{Y}_i = \underset{(3.91)}{6{,}57} + \underset{(0.067)}{0{,}89}\ X_i \qquad R^2 = 0,91$$

Los números entre paréntesis son desviaciones típicas estimadas utilizando el estimador $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$. Tú en cambio has estimado el modelo por MCG y los resultados que le presentas al jefe son:

$$\tilde{Y}_i = \underset{(2.62)}{6{,}12} + \underset{(0.59)}{0{,}9}\ X_i$$

c) ¿Cómo argumentarías ante tu jefe (quien recuerda unas nociones básicas de estadística) que la conclusión de tu competidor sobre la influencia de X_i en la productividad media de un trabajador es errónea? Realiza los contrastes oportunos.

PROBLEMA LADE-1999.2 (Jun-1999)

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ con $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2_\varepsilon)$ Con los siguientes datos:

[0] CVS Id: $Id: 99e2e.tex,v 1.3 2004/01/30 09:15:03 etpdihei Exp

Y_t	3	3	4	3	2	2
X_t	1	2	3	4	5	6

a) Sabiendo que el valor poblacional de ρ es 0,7, estima los parámetros α y β por el método de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG). Muestra explícitamente los cálculos.

b) Contrasta al nivel de significación del $5\,\%$ la $H_0 : \beta = 1$.

c) Suponiendo que tu tamaño muestral es suficientemente grande, ¿cómo estimarías si el valor poblacional de ρ fuera desconocido? Explica detalladamente todo el proceso.

PROBLEMA LADE-1999.3 (Jun-1999)

Se quiere estimar el modelo

$$Y_t = \beta X_{1t} + u_t \qquad u_t \sim iid(0, \sigma^2) \tag{1}$$

y se sabe que X_{1t} se determina con Y_t ya que $X_{1t} = Y_t + X_{2t}$ donde $E(X_{2t}u_t) = 0\ \forall t$.

a) Demuestra que $E(X_{1t}u_t) = (1-\beta)^{-1}\sigma^2$. Se supone que $\beta \neq 1$.

b) ¿Qué implicaciones tiene este hecho en el estimador de β aplicando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) a (1)? Razona la respuesta.

c) Escribe explícitamente la fórmula de un estimador de β alternativo para este modelo concreto **razonando** por qué lo escogerías.

Si se dispone de una muestra de 60 observaciones donde se han obtenido los siguientes productos cruzados:

	Y_t	X_{1t}	X_{2t}
Y_t	100	40	-60
X_{1t}		80	40
X_{2t}			100

por ejemplo $\sum Y_t X_{2t} = -60$.

d) Obtén la estimación de β por el método propuesto en c) y por el método de MCO.

e) Contrasta al nivel de significación del $5\,\%$ la $H_0 : \beta = 0$. Suponer que $\sigma^2 = 1$.

f) Si el investigador ignorara que $X_{1t} = Y_t + X_{2t}$, ¿Cómo podría darse cuenta de que $E(X_{1t}u_t) \neq 0$? **Explica** y realiza el contraste. Suponer que $\sigma^2 = 1$.

[0] CVS Id: $Id: 990e2.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

PROBLEMA LE/LADE-1999.1 (Sep-1999)

Se tiene el siguiente modelo para el gasto familiar en alimentación:

$$Y_i \;=\; \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 Z_i + u_i, \qquad i \,=\, 1, \ldots, 38 \tag{1}$$

donde

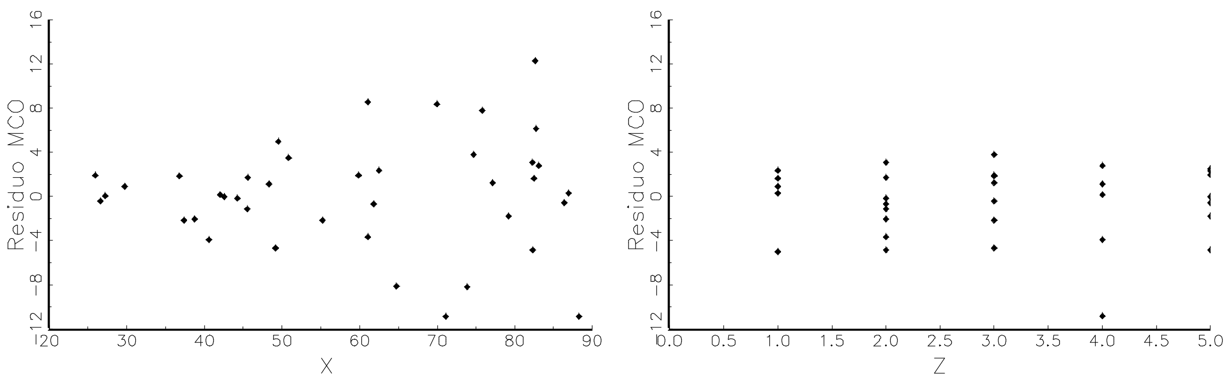
- Y_i es el gasto familiar en alimentación.
- X_i es la renta familiar total.
- Z_i es el número de miembros de la familia.

Los resultados de la estimación por MCO son

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{Y}_i} \;=\; \underset{(2{,}66)}{2,24} \,+\, \underset{(0{,}03)}{0,16}\,X_i \,+\, \underset{(0{,}41)}{1,14}\,Z_i \qquad \widehat{u}'\widehat{u} \,=\, 644,354 \qquad R^2 \,=\, 0,449 \tag{2}$$

a) ¿Es el tamaño de la familia una variable relevante del gasto en alimentación?

La representación gráfica de los residuos MCO en función de X_i y Z_i es la siguiente



A continuación, se calcula $\widehat{\sigma}^2 \,=\, \dfrac{\widehat{u}'\widehat{u}}{38}$ y se realizan las siguientes regresiones por MCO:

$$\frac{\widehat{u}_i^2}{\widehat{\sigma}^2} \;=\; -0,249 + 0,349 X_i \qquad SCE \,=\, 13,07 \tag{3}$$

$$\frac{\widehat{u}_i^2}{\widehat{\sigma}^2} \;=\; -0,398 + 0,024 Z_i \qquad SCE \,=\, 2,416 \tag{4}$$

donde SCE es la suma de cuadrados explicada de las correspondientes regresiones.

b) Utilizando los gráficos y las regresiones (3) y (4), contrasta la posible existencia de heterocedasticidad y propón una forma funcional razonable para $Var(u_i)$. **Justifica** tu elección.

c) Dado el resultado del apartado b), ¿qué consecuencias tiene sobre el contraste realizado en a)?

d) Supón que $Var(u_i) = \sigma^2 X_i^2, \; Cov(u_i, u_j) = 0, \; \forall i \neq j$. Calcula el vector $\mathbf{Y}^*$ y la matriz $\mathbf{X}^*$ del modelo transformado

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^* \beta + \mathbf{u}^*, \qquad \mathbf{u}^* \sim (0, \sigma^2 \mathbf{I}) \tag{5}$$

a partir de las siguientes observaciones

Y_i	16	17	22	7	10	23
X_i	62	82	75	71	65	83
Z_i	1	5	3	4	5	3

PROBLEMA LE/LADE-1999.2 (Sep-1999)

Sea el modelo formado por las dos ecuaciones:

$$Y_{1t} = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + u_t \qquad u_t \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2) \tag{6}$$

$$Y_{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{2t} + v_t \qquad v_t \sim \text{NID}(0, \sigma_v^2) \tag{7}$$

$$cov(u_t, v_s) = \begin{cases} \sigma_{uv} & \text{para} \quad t = s \\ 0 & \text{para} \quad t \neq s \end{cases} \qquad t, \, s = 1, \ldots, T \tag{8}$$

con $\sigma_u^2, \; \sigma_v^2$ y σ_{uv} desconocidas y distintas entre sí. Explica el procedimiento de contraste de la hipótesis $H_0 : \beta_1 = \alpha_1$, detallando todos los elementos. Razona la respuesta.

PROBLEMA LE/LADE-1999.3 (Sep-1999)

Considera el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t, \qquad t = 1966, \ldots, 1995 \qquad \text{con} \tag{9}$$

Y_t = Inversión en el año t.

X_{1t} = Producto interior bruto en el año t.

X_{2t} = Tipo de interés en el año t.

Los resultados de la estimación por MCO son:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{Y}_t} = \underset{(2{,}51)}{6,225} + \underset{(0{,}072)}{0,77}\, X_{1t} - \underset{(0{,}216)}{0,18}\, X_{2t} \qquad \widehat{u}'\widehat{u} = 299,3 \tag{10}$$

$$DW = 0,85 \qquad R^2 = 0,81$$

Los resultados de la estimación por el método iterativo de Cochrane-Orcutt son:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{Y}_t} = \underset{(3,73)}{7,33} + \underset{(0,157)}{0,78}\, X_{1t} - \underset{(0,08)}{0,29}\, X_{2t} \qquad \hat{\rho} = 0,61 \tag{11}$$

a) ¿En qué situación utilizarías el método de estimación de Cochrane-Orcutt? ¿Por qué?

b) ¿Crees que en el modelo (9) se cumplen las condiciones mencionadas en a)? Guíate por algún contraste.

c) Contrasta la hipótesis de que el tipo de interés no afecta a la inversión.

PROBLEMA LE/LADE-1999.4 (Sep-1999)

Sea el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma X_{t-1} + \lambda Y_{t-1} + u_t \tag{12}$$

con X fija y $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\varepsilon)$.

a) ¿Es el estimador MCO consistente? Explica razonadamente por qué.

b) ¿Cambiaría tu respuesta en a) si en lugar de Y_{t-1} tuviésemos Y_{t-2} como variable explicativa en el modelo? ¿Por qué?

c) En el modelo (12), propón un estimador del vector de parámetros $(\alpha\ \beta\ \gamma\ \lambda)'$ que por lo menos sea **consistente**. Razona la respuesta.

PROBLEMA LE-2000.1 (Jun-2000)

En un trabajo se proponen dos posibles modelos para explicar la evolución de la demanda de gasolina. Se dispone de datos **trimestrales** desde 1959 a 1990 (ambos años incluidos) de las siguientes variables:

- $Y =$ Gasto real per cápita en gasolina (en logaritmos).
- $X_2 =$ Precio real de la gasolina (en logaritmos). Variable no estocástica.
- $X_3 =$ Renta real disponible per cápita (en logaritmos). Variable no estocástica.
- $X_4 =$ Millas por galón de gasolina (en logaritmos). Variable no estocástica.

[0] CVS Id: $Id: 00e2g.tex,v 1.3 2004/02/06 10:33:04 etpdihei Exp

El **primer modelo** es:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \qquad (1)$$

Los resultados de la estimación MCO son:

$$\begin{aligned}
\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} &= \underset{(0,12)}{-1,51} - \underset{(0,01)}{0,14}X_{2t} + \underset{(0,015)}{0,998}X_{3t} - \underset{(0,02)}{0,52}X_{4t} \\
R^2 &= 0,97 \qquad\qquad DW = 0,74 \\
\underset{(\widehat{desv})}{\hat{u}_t} &= \underset{(0,09)}{-0,01} - \underset{(0,008)}{0,003}X_{2t} - \underset{(0,012)}{0,004}X_{3t} + \underset{(0,004)}{0,004}X_{4t} + \underset{(0,09)}{0,62}\hat{u}_{t-1} - \underset{(0,107)}{0,007}\hat{u}_{t-2} \\
&\quad + \underset{(0,107)}{0,005}\hat{u}_{t-3} + \underset{(0,09)}{0,087}\hat{u}_{t-4} + \hat{e}_{1t} \\
R^2 &= 0,42 \qquad\qquad DW = 2,03
\end{aligned}$$

El **segundo modelo** es:

$$Y_t = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \gamma_4 X_{4t} + +\gamma_5 Y_{t-1} + v_t \qquad (2)$$

Los resultados de la estimación MCO son:

$$\begin{aligned}
\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} &= \underset{(0,13)}{-0,65} - \underset{(0,01)}{0,06}X_{2t} + \underset{(0,06)}{0,47}X_{3t} - \underset{(0,03)}{0,24}X_{4t} + \underset{(0,09)}{0,54}Y_{t-1} \\
R^2 &= 0,98 \qquad\qquad DW = 1,76 \\
\underset{(\widehat{desv})}{\hat{v}_t} &= \underset{(0,17)}{-0,24} - \underset{(0,02)}{0,02}X_{2t} + \underset{(0,09)}{0,13}X_{3t} - \underset{(0,047)}{0,072}X_{4t} - \underset{(0,09)}{0,14}Y_{t-1} + \underset{(0,12)}{0,22}\hat{v}_{t-1} + \underset{(0,101)}{0,128}\hat{v}_{t-2} \\
&\quad + \underset{(0,091)}{0,105}\hat{v}_{t-3} + \underset{(0,09)}{0,118}\hat{v}_{t-4} + \hat{e}_{2t} \\
R^2 &= 0,067 \qquad\qquad DW = 2,01
\end{aligned}$$

a) En base a los resultados del modelo (1), ¿crees que en dicho modelo se verifican las hipótesis básicas? Realiza los contrastes que creas necesarios para justificar tu respuesta.

b) **Razona** cuáles son las propiedades del estimador MCO en el modelo (1).

c) En base a los resultados del modelo (2), ¿crees que en dicho modelo se verifican las hipótesis básicas? Realiza los contrastes que creas necesarios para justificar tu respuesta. **Razona** tú respuesta.

d) **Razona** cuáles son las propiedades del estimador MCO en el modelo (2).

e) ¿Cómo contrastarías la hipótesis de que la elasticidad renta es 1? Explica claramente todos los elementos que intervienen: el modelo que utilizas, las hipótesis nula y alternativa, el estimador que utilizas, el estadístico, su distribución y la regla de decisión. Si dispones de datos, realiza el contraste.

PROBLEMA LE-2000.2 (Jun-2000)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, N \tag{3}$$

donde X_i es no estocástica, $E(u_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma^2[1 + 0,5X_i]^2 \quad \forall i \quad$ y $\quad E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

a) Escribe la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones.

b) Escribe el modelo transformado correspondiente al estimador MCG y demuestra las propiedades de la perturbación del modelo que propongas.

c) Explica cómo estimarías los parámetros del modelo transformado. ¿Qué propiedades tienen tus estimadores?

d) Utilizando el estimador MCG y suponiendo normalidad de u_i, explica cómo realizarías el contraste $H_o : \beta_2 = 1$. (No olvides explicar claramente qué son cada uno de los elementos del estadístico de contraste.)

e) El estimador MCO de los parámetros de la ecuación (3) es ineficiente. Muestra cómo utilizarías este estimador para contrastar la $H_o : \beta_2 = 1$ de forma tal que tu contraste sea válido. (No olvides explicar claramente qué son cada uno de los elementos del estadístico de contraste.)

f) ¿Son ambos contrastes equivalentes o preferirías alguno de los dos? Razona tú respuesta.

PROBLEMA LE-2000.3 (Jun-2000)

Se quiere estimar el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$ y se sospecha que puede haber factores no observables recogidos en u_t que estén correlacionados con X_t.

a) Si esta sospecha fuese cierta, ¿qué implicaciones tendría en las propiedades del estimador de β por MCO? Razona **formalmente** la respuesta.

b) ¿Bajo qué condiciones X_{t-1} sería un buen instrumento para X_t a la hora de obtener un estimador de β por variables instrumentales? Razona **formalmente** la respuesta.

Se dispone de una muestra de 60 observaciones donde se han obtenido los siguientes productos cruzados:

	Y_t	X_t	X_{t-1}
Y_t	50	20	-30
X_t		40	20
X_{t-1}			50

por ejemplo $\sum Y_t X_{t-1} = -30$.

c) Usando la variable X_{t-1} como instrumento de X_t, obtén la estimación de β por el método de variables instrumentales.

d) ¿Qué hubiera ocurrido si $\sum X_t X_{t-1} = 0$?

e) Suponiendo que $u_t \sim iid(0,1)$, contrasta la $H_o : E(X_t u_t) = 0$ explicando **detalladamente** el procedimiento de contraste utilizado.

PROBLEMA LE-2000.4 (Sep-2000)

Considera el modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad \text{con} \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \tag{1}$$

donde X_t se considera no estocástica.

a) Obtén **razonadamente** la transformación apropiada Y_t^*, X_{1t}^*, X_{2t}^*, u_t^* para $t = 1, \ldots, T$ tal que $Y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + u_t^*$ donde se satisface que $u_t^* \sim iid(0, \sigma^2)$.

b) Escribe la función objetivo que considera el criterio de estimación de β_1 y β_2 por Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG). ¿Depende del valor de ρ?

c) Obtén en términos matriciales la matriz de varianzas y covarianzas poblacional del estimador de β_1 y β_2 por MCG y la del estimador de β_1 y β_2 por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). **Razona** cuál tiene que ser menor y qué implicaciones tiene esto sobre la elección entre estos dos estimadores.

d) ¿Cómo obtendrías un estimador consistente de ρ si este parámetro fuera desconocido? Razona tu respuesta.

e) Explica cómo contrastarías $H_0 : \beta_2 = 1$ si no conoces el valor de ρ. Escribe cómo se obtendrían **todos** los elementos del contraste, razonando si es o no apropiado para una muestra de 5 observaciones.

PROBLEMA LE-2000.5 (Sep-2000)

Una empresa tiene dos plantas, una en Barcelona y otra en Madrid. Las funciones de costes en cada planta son:

$$C_{1t} = \alpha_1 + \beta W_{1t} + \gamma_1 Y_{1t} + u_{1t} \qquad t = 1, \ldots, 50 \tag{2}$$
$$C_{2t} = \alpha_2 + \beta W_{2t} + \gamma_2 Y_{2t} + u_{2t} \qquad t = 1, \ldots, 50 \tag{3}$$

Siendo C: Costes, W: Salario, Y: Producción.

Se supone que ambas ecuaciones cumplen las hipótesis básicas, entre ellas $\sigma_{u1}^2 = \sigma_{u2}^2$ y además $Cov(u_{1t}, u_{2s}) = 0$ para todo t y s. Comenta la siguiente afirmación: *La estimación del modelo conjunto por MCO es equivalente a la estimación de cada ecuación* **separadamente** *por MCO*.

PROBLEMA LE-2000.6 (Sep-2000)

En el contexto del Modelo de Regresión Lineal General y cumpliéndose todas las hipótesis básicas, enuncia el Teorema de Mann y Wald indicando la utilidad de dicho teorema y los resultados que proporciona.

PROBLEMA LE-2000.7 (Sep-2000)

Una entidad comercial en proceso de expansión desea realizar un estudio sobre la relación entre el sector industrial y el número de oficinas por provincia. Para ello dispone de una muestra de 50 observaciones de las variables S (número de sucursales por provincia) y L (número de licencias comerciales, indicador de la importancia del sector comercial). Su gabinete de estudios estima por MCO la siguiente ecuación:

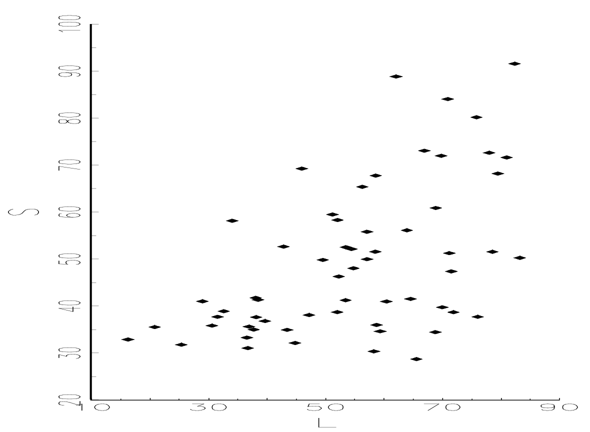
$$S_i \quad = \quad \beta_1 + \beta_2 L_i + u_i \tag{4}$$

Los resultados de dicha estimación con las 50 observaciones son:

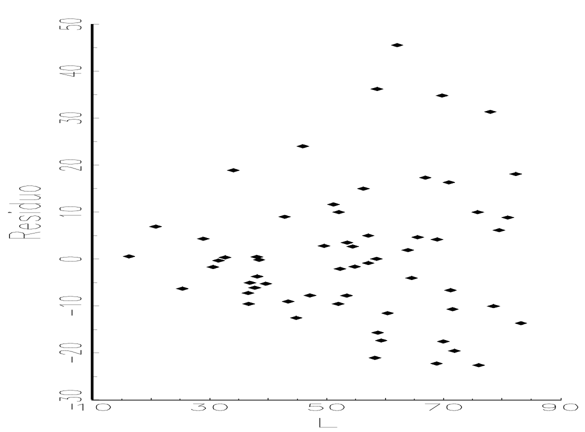
$$\underset{(t-ratio)}{\hat{S}_i} \quad = \quad \underset{(3,9)}{22,2} + \underset{(5,05)}{0,5}\ L_i, \qquad\qquad R^2 = 0,3 \tag{5}$$

La representación gráfica de la variable endógena S_i y de los residuos MCO del ajuste (5) sobre la variable explicativa L_i es la siguiente:

Variables del modelo



Residuos MCO



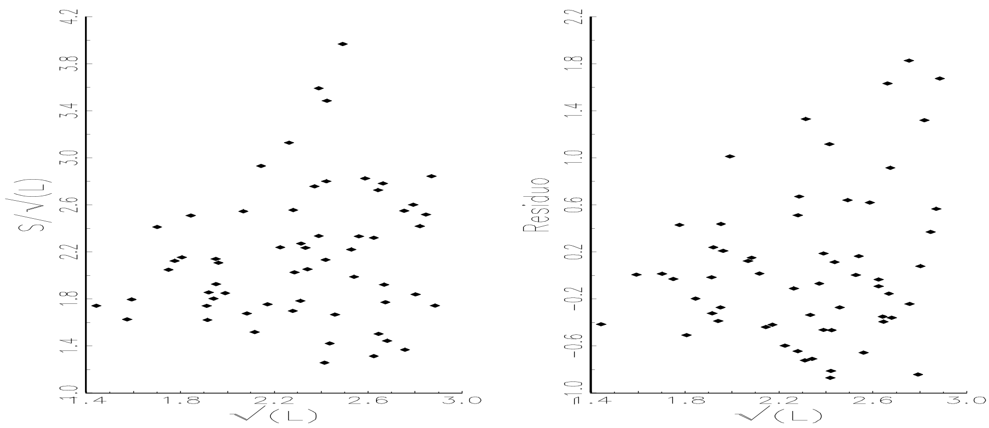
a) El responsable del gabinete de estudios se muestra insatisfecho con estos resultados. ¿Qué problemas crees que reflejan los gráficos anteriores?

El mismo responsable propone dos posibles vías para mejorar la estimación. **La primera** consiste en estimar por MCO la siguiente ecuación:

$$\frac{S_i}{\sqrt{L_i}} \quad = \quad \beta_1 \frac{1}{\sqrt{L_i}} + \beta_2 \sqrt{L_i} + \frac{u_i}{\sqrt{L_i}} \tag{6}$$

b) ¿Cuál es la hipótesis básica que se debe incumplir en el modelo (4) para utilizar el modelo (6)? ¿Cuál es la solución que está proponiendo? ¿En qué espera mejorar respecto a la estimación MCO primera (5)?

c) A la vista de la representación gráfica de la variable $\frac{S_i}{\sqrt{L_i}}$ y de los residuos del ajuste MCO del modelo (6) sobre $\sqrt{L_i}$, ¿crees que está resolviendo correctamente el problema?



La segunda posibilidad es que la relación entre S_i y L_i no sea lineal, sino exponencial $S_i = \exp\{\gamma_1 + \gamma_2 L_i + v_i\}$, por lo que se estima por MCO el siguiente modelo:

$$\ln S_i \quad = \quad \gamma_1 + \gamma_2 L_i + v_i \tag{7}$$

dando lugar a los siguientes resultados para toda la muestra de 50 observaciones:

$$\underset{(t-ratio)}{\widehat{\ln S_i}} \; = \; \underset{(31,0)}{3,31} + \underset{(5,3)}{0,02}\, L_i, \qquad R^2 = 0,33 \qquad SCR = 10,54 \tag{8}$$

$$\frac{\hat{v}_i^2}{0,21} \; = \; \underset{(0,09)}{0,053} + \underset{(1,6)}{0,017}\, L_i + \hat{e}_i, \qquad R^2 = 0,014 \qquad SCR = 89,72 \tag{9}$$

Además, tras ordenar la muestra en función de los valores de la variable L, se han estimado dos regresiones (7) con las primeras y últimas 12 observaciones. Las sumas de cuadrados de residuos obtenidas son $SCR_1 = 0,77$ y SCR_2 = 0,992 respectivamente.

d) ¿Crees que el modelo (7) presenta el mismo problema de incumplimiento de hipótesis que el modelo (4)? Justifica tu respuesta mediante un contraste. Explica detalladamente lo que haces y por qué lo haces.

e) ¿Alguna de las dos soluciones propuestas te parece mejor que la otra? Razona tu respuesta.

PROBLEMA LE-2000.8 (Sep-2000)

Se ha estimado por MCO el siguiente modelo con 140 observaciones:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} &= \underset{(6,74)}{25,3} - \underset{(0,63)}{2,20}X_t + \underset{(0,05)}{6,4}\,Y_{t-1} \\
R^2 &= 0,47 \qquad\qquad DW = 2,2 \\
\underset{(\widehat{desv})}{\hat{u}_t} &= \underset{(5,34)}{1,19} - \underset{(0,51)}{0,27}X_t - \underset{(0,84)}{0,02}Y_{t-1} - \underset{(0,08)}{0,10}\hat{u}_{t-1} - \underset{(0,07)}{0,14}\hat{u}_{t-2} + \underset{(0,07)}{0,58}\hat{u}_{t-3} \\
R^2 &= 0,42 \qquad\qquad DW = 2,03
\end{aligned}$$

El estimador MCO de β_1, β_2 y β_3 en este modelo,

a) ¿Por qué no es lineal en u?

b) ¿Por qué no es insesgado?

c) ¿Por qué no es consistente? Realiza los contrastes que consideres oportunos.

PROBLEMA LADE-2000.1 (Jun-2000)

Un investigador quiere analizar la influencia del grado de apertura de la economía nacional en el desempleo Y_t. Como variable indicativa del grado de apertura utiliza un indicador de las oscilaciones del tipo de cambio Peseta/DolarUSA, X_t, que se considera no estocástico. Los datos, tanto de X como de Y, son mensuales.

Los resultados de la regresión por MCO son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0{,}002)}{0{,}0004} + \underset{(0{,}066)}{0{,}064}X_t \tag{1}$$

$$R^2 = 0{,}002 \qquad T = 435 \qquad SCR = 0{,}820 \qquad DW = 1{,}425$$

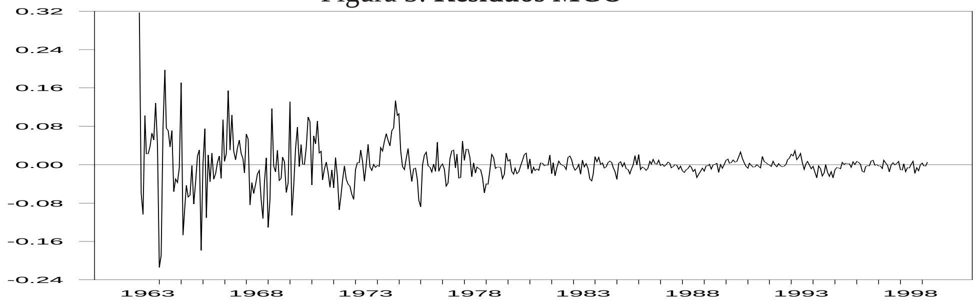
a) Comenta el gráfico de los residuos. (Figura 3)

b) Realiza los contrastes de significación individual de los parámetros.

c) Contrasta la existencia de autocorrelación en el modelo (1).

[0] CVS Id: $Id: 00e2e.tex,v 1.2 2003/01/31 14:23:27 etpdihei Exp

Figura 3: **Residuos MCO**



d) Posteriormente, el investigador realiza las siguientes regresiones:

De 1962 a 1975

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0{,}006)}{0{,}005} - \underset{(0{,}362)}{0{,}102}\, X_t \tag{2}$$

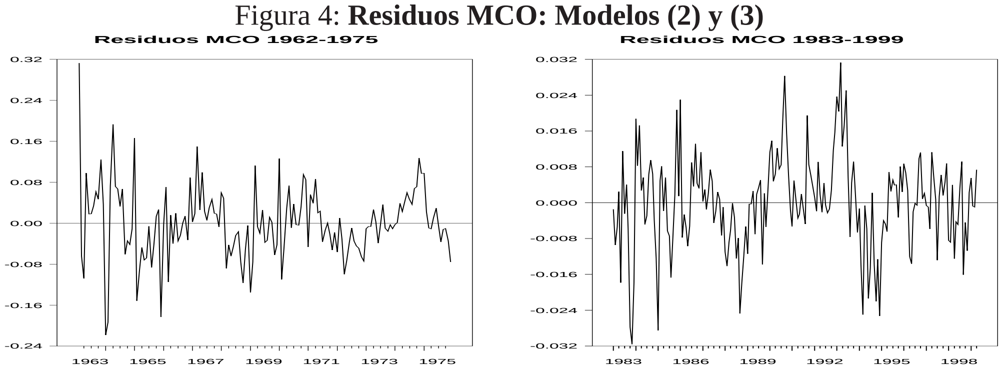
$$R^2 = 0{,}0005 \qquad T_1 = 155 \qquad SCR = 0{,}753 \qquad DW = 1{,}441$$

De 1983 a 1999

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0{,}0007)}{-0{,}002} + \underset{(0{,}020)}{0{,}067}\, X_t \tag{3}$$

$$R^2 = 0{,}055 \qquad T_2 = 196 \qquad SCR = 0{,}021 \qquad DW = 0{,}997$$

Figura 4: **Residuos MCO: Modelos (2) y (3)**



¿Qué sugiere la gráfica de los residuos de la estimación por MCO de los modelos (2) y (3) en comparación con los residuos de la muestra completa en la Figura 1? Contrasta la existencia de heterocedasticidad en el total de la muestra especificando claramente las hipótesis nula y alternativa.

e) ¿Consideras adecuada la estimación por MCO en (1)? ¿Y los contrastes del apartado b)?

f) A continuación se estima por MCO el modelo incluyendo Y_{t-1} como regresor, **para el periodo 1983-1999** (196 observaciones). Con los residuos $\hat{u}_t$ se obtiene la regresión auxiliar (5).

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0{,}0007)}{-0{,}0009} + \underset{(0{,}018)}{0{,}047}\, X_t + \underset{(0{,}061)}{0{,}480}\, Y_{t-1} \qquad R^2 = 0{,}281 \tag{4}$$

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{u}_t} = \underset{(0{,}0007)}{0{,}0002} - \underset{(0{,}136)}{0{,}152}\, \hat{u}_{t-1} - \underset{(0{,}018)}{0{,}002}\, X_t + \underset{(0{,}117)}{0{,}116}\, Y_{t-1} \qquad R^2 = 0{,}006 \tag{5}$$

Compara los resultados de los modelos en (3) y (4) y comenta las propiedades de los estimadores en ambos modelos. Realiza los contrastes que consideres oportunos.

PROBLEMA LADE-2000.2 (Jun-2000)

Para analizar la relación entre el consumo de vino de Rioja y la renta per cápita, un investigador propone estudiar la evolución de ambas variables en dos provincias distintas. Para ello plantea el modelo:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + u_{1t} \quad t = 1, ..., T, \\ Y_{2t} &= \alpha_2 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t} \quad t = 1, ..., T, \end{aligned}$$

donde Y_{it}, X_{it} son el consumo de vino y la renta per cápita en la provincia i ($i = 1, 2$) en el periodo t. Sabiendo que $\mathrm{E}(u_{1t}u_{2s}) = 0 \ \forall t, s$, escribe matricialmente el modelo conjunto y explica detalladamente cómo estimarías el modelo en los siguientes casos, citando las propiedades de los estimadores:

a) $u_{1t} \sim iid(0, \sigma_1^2)$, $u_{2t} \sim iid(0, \sigma_2^2)$ con $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ desconocidas y $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

b) $u_{1t} = 0{,}1 u_{1t-1} + \varepsilon_t$ y $u_{2t} \sim iid(0, \sigma_2^2)$ donde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$, y σ_ε^2 y σ_2^2 son desconocidas.

PROBLEMA LADE-2000.3 (Jun-2000)

Un investigador desea analizar la relación entre los beneficios y los impuestos que pagan 475 empresas de Bilbao. Para ello propone el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta \, X_i + u_i \quad u_i \sim NID(0, \sigma^2) \tag{6}$$

donde Y_i son los impuestos que paga la empresa i-ésima, y X_i son sus beneficios.

Solicita información sobre estos datos a la Hacienda Foral, pero por razones de confidencialidad no puede conseguir los datos de cada una de las 475 empresas, sino los datos medios para las empresas agregadas en seis grupos:

Grupo	1	2	3	4	5	6
$\bar{Y}_j$	25	21.33	22	22	22.8	24
$\bar{X}_j$	106	92	91	97	99.4	100
n_j	100	225	100	9	25	16

donde n_j es el número de empresas que forman el grupo j-ésimo, $\bar{Y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in G_j} Y_i$ es la media de sus impuestos (en millones de pesetas) y $\bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in G_j} X_i$ la media de sus beneficios (en millones de pesetas).

Con estos datos se propone estimar el siguiente modelo

$$\bar{Y}_j = \beta^* \bar{X}_j + v_j \ , \quad j = 1, 2, ..., 6. \tag{7}$$

a) ¿Qué relación hay entre β y β^*? ¿Y entre las varianzas de las perturbaciones u_i y v_j?

b) Estima β de la mejor forma posible y comenta las propiedades del método de estimación empleado.

c) Contrasta la hipótesis de que los beneficios no afectan al pago de impuestos en estas empresas.

PROBLEMA LADE-2000.4 (Jun-2000)

Considera el siguiente modelo

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha Y_{t-1} + \beta X_t + u_t \qquad t = 2, 3, ..., T, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1 \text{ desconocido, } \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\varepsilon) \end{aligned}$$

donde X_t es una variable no estocástica. De entre todos los métodos de estimación que conoces, explica detalladamente el que ofrezca mejores propiedades para este modelo, señalando cuáles son dichas propiedades.

PROBLEMA LADE-2000.5 (Sep-2000)

Sea el siguiente modelo uniecuacional:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + u_t \quad t = 1, \ldots, 100 \tag{1}$$

donde se sospecha que $Var(u_t) = \sigma^2 \frac{1}{Z_t^2}$. Se sabe que X_t y Z_t no son estocásticas, no existe autocorrelación en las perturbaciones y $Z_t > 0 \quad \forall t$.

a) ¿Cómo contrastarías **en este modelo** la existencia de este tipo de heterocedasticidad? Explícalo con todo detalle.

Suponiendo que se acepta que Var$(u_t) = \sigma^2 \frac{1}{Z_t^2}$,

b) Transforma el modelo de forma que las perturbaciones sean esféricas y demuestra que lo son. Escribe la matriz de datos correspondiente al modelo transformado.

c) Explica cómo estimarías de la mejor manera posible (1) e indica sus propiedades. Explica con detalle cómo estimarías σ^2 e indica sus propiedades.

PROBLEMA LADE-2000.6 (Sep-2000)

Se dispone de los siguientes datos sobre los trabajadores de una pequeña empresa

Hombres		Mujeres	
Salario (W_i)	Nº Hijos (N_i)	Salario (W_i)	Nº Hijos (N_i)
5	1	1	2
2.5	0	2	0
3	3	8	2

a) Propón un modelo econométrico en el que el salario dependa del sexo y del número de hijos, imponiendo las siguientes condiciones:

- debe de haber una ecuación para hombres y otra para mujeres (no olvides incluir término independiente en cada una de ellas).
- el efecto del número de hijos sobre el salario debe de ser común para hombres y para mujeres.
- no hay (a priori) ninguna otra relación entre las dos ecuaciones.

b) Suponiendo que las varianzas de las perturbaciones son iguales, estima los coeficientes del modelo de forma eficiente (no hay autocorrelación).

c) Estima eficientemente el modelo si las varianzas de las perturbaciones son, respectivamente, 9 (Hombres) y 4 (Mujeres). No hay autocorrelación.

PROBLEMA LADE-2000.7 (Sep-2000)

Sea $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ donde X es una variable fija y donde $u \sim (0, 3I)$. Sin embargo, los datos de la variable endógena se observan con error y solamente se disponen de datos de $Y_t^* = Y_t + \epsilon_t$, donde $\epsilon \sim (0, 5I)$ es independiente de la perturbación u. Por lo tanto, se estima el modelo $Y_t^* = \alpha + \beta X_t + v_t$.

a) Halla las propiedades de la perturbación v y explica qué método de estimación utilizarías y qué propiedades tiene.

b) ¿Qué ocurriría si $\epsilon_t = 0{,}5\epsilon_{t-1} + \omega_t$ (donde ω es una v.a. independiente de u tal que $\omega \sim (0, 0{,}75I)$)? ¿Cambian las propiedades de v? Escribe su matriz de varianzas y covarianzas. ¿Qué implicaciones tiene para la estimación del modelo?

PROBLEMA LADE-2000.8 (Sep-2000)

Sea el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma X_t + u_t \tag{2}$$

donde se sospecha que

$$u_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \qquad |\theta| < 1 \qquad \epsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\epsilon)$$

Los resultados de la estimación MCO han sido:

$$\begin{aligned} Y_t &= 3{,}0214 + 0{,}5941Y_{t-1} + 1{,}0161X_t + \hat{u}_t \\ & \quad t = 2, \ldots, 100 \quad R^2 = 0{,}9984 \quad DW = 1{,}1799 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= 0{,}0405 + 0{,}4189\hat{u}_{t-1} - 0{,}0078Y_{t-1} + 0{,}0206X_t + \hat{v}_t \\ & \quad t = 2, \ldots, 100 \quad R^2 = 0{,}1707 \quad DW = 1{,}841 \quad v_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_v) \end{aligned}$$

a) Contrasta la existencia de autocorrelación en el modelo (2), especificando todos los elementos del contraste.

Si se acepta que $u_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \qquad |\theta| < 1 \qquad \epsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\epsilon)$,

b) Demuestra las propiedades del estimador MCO empleado.

c) Explica con detalle cómo pueden estimarse **consistentemente** (no es necesaria la eficiencia) los coeficientes del modelo (2).

PROBLEMA LE-2001.1 (Jun-2001)

Una empresa ha encargado a dos técnicos, (técnico A y técnico B), el análisis de la relación entre los ingresos de la empresa, Y (medidos en miles de millones de pesetas), el precio de la gasolina, X (en pesetas/litro), y el precio del transporte público, Z (en pesetas). Para ello disponen de 90 observaciones. El técnico A estima por MCO y obtiene los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} = 12 + \underset{(0,4)}{1,5}\, X_t + \underset{(0,5)}{0,8}\, Z_t \qquad DW = 1,64 \tag{1}$$

Dados sus resultados, el técnico A concluye que no hay autocorrelación y **afirma:**

(A1) Un aumento del precio de la gasolina de una peseta hace aumentar los ingresos de la empresa en 1500 millones de pesetas.

(A2) Los cambios en el precio del transporte público no afectan a los ingresos de la empresa.

a) Dado el valor del DW ¿es prudente la conclusión de A de que no existe autocorrelación? Explícate, relaciona tu respuesta con sus afirmaciones (A1) y (A2).

   El técnico B sospecha que existe un proceso AR(2) en las perturbaciones y estima por Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles obteniendo los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} = 12,8 + \underset{(0,5)}{1,2}\, X_t + \underset{(0,52)}{1,0}\, Z_t \tag{2}$$

[0] CVS Id: $Id: 01e2g.tex,v 1.2 2003/01/31 16:32:04 etpdihei Exp

b) **Describe detalladamente** un procedimiento por el cual el técnico B podría haber llegado a la conclusión de que existe un proceso AR(2) en las perturbaciones.

c) Supongamos que efectivamente hay un AR(2). A la vista de la ecuación (2), **modifica las afirmaciones (A1) y (A2)** como creas necesario. Realiza los contrastes que necesites para llevar a cabo las modificaciones. **Cita** las propiedades de los estimadores utilizadas para realizar **tus** afirmaciones.

PROBLEMA LE-2001.2 (Jun-2001)

Sea el modelo: $$Y_i = \beta X_i + u_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

donde: X_i es una variable fija
$E(u_i) = 0 \quad \forall i$
$E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
$E(u_i^2) = \sigma_i^2 = \gamma W_i$ donde W_i es una variable fija conocida $i = 1, 2, 3, 4$
$u_i \sim N(0, \sigma_i^2)$

a) Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación bajo los supuestos anteriores.

b) Dadas las propiedades de la perturbación ¿Cómo deberíamos estimar el modelo? ¿Qué propiedades tendrían tus estimadores?

c) Disponemos de la siguiente información muestral:

	W_i	Y_i	X_i
	1	3	5
	2	4	8
	3	5	9
	1	6	10
$\sum_{i=1}^{4}$	7	18	32

Estima eficientemente el parámetro β. Estima σ_u^2.

d) Contrasta la hipótesis nula $H_o : \beta = 0$.

PROBLEMA LE-2001.3 (Jun-2001)

Dado el siguiente modelo:
$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \tag{3}$$
donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t fija pero **no observable.**

Se dispone de observaciones sobre Z_{1t} tal que:
$$Z_{1t} = X_t + \varepsilon_{1t} \qquad \varepsilon_{1t} \sim iid(0, \sigma_1^2)$$

donde $E(\varepsilon_{1t}u_t) = 0 \quad \forall t$.

a) Partiendo de la ecuación (3) escribe un modelo estimable en función de Y_t y Z_{1t}.

b) Demuestra que el estimador MCO de β en el modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta Z_{1t} + v_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{4}$$

no es consistente.

c) Supongamos ahora que disponemos de dos variables exógenas, Z_{2t} y Z_{3t}, relacionadas con Z_{1t}. Teniendo en cuenta esta información, ¿cómo estimarías el parámetro β para obtener un estimador consistente con la menor varianza asintótica posible? ¿Cómo estimarías σ_v^2?

PROBLEMA LE-2001.4 (Sep-2001)

Supón que en el modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_{3i} X_{3i} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots, 200 \tag{1}$$

X_{2i} y X_{3i} son variables fijas,
ε_i es un ruido blanco tal que $\varepsilon_i \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$
β_{3i} es tal que:

$$\beta_{3i} = \alpha_3 + a_i \quad \text{donde } \alpha_3 \quad \text{es fijo y } a_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_a^2) \quad \text{es inobservable y} \quad E(a_i \varepsilon_i) = 0 \quad \forall i$$

Si en vez de la ecuación (1) se estima:

$$Y_i = \delta_1 + \delta_2 X_{2i} + \delta_3 X_{3i} + u_i \quad i = 1, 2, \ldots, 200 \tag{2}$$

a) ¿Cuáles son las propiedades de la perturbación u_i?

b) Describe el proceso para obtener el estimador del vector δ con mejores propiedades asintóticas; cítalas.

PROBLEMA LE-2001.5 (Sep-2001)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{3}$$

donde $\quad u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$
$\qquad X_t = \gamma Z_t + \eta_t \qquad \eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2)$

a) ¿Cuándo estimarías el modelo por el método de variables instrumentales utilizando la variable Z_t como instrumento para la variable X_t? ¿Por qué?

A partir de una muestra de 52 observaciones se han obtenido los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} \sum X_t = 20 & \sum X_t Y_t = 70 & \sum X_t^2 = 1300 \\ \sum Y_t = 50 & \sum Z_t Y_t = 90 & \sum Z_t^2 = 1000 \\ \sum Z_t = 30 & \sum X_t Z_t = 40 & \end{array}$$

b) Siendo Z_t el instrumento para X_t, estima los parámetros β_1 y β_2 del modelo utilizando el método de variables instrumentales.

Los resultados de estimar por MCO el modelo han sido:

$$\underset{(\hat{des}(\hat{\beta}_i))}{\widehat{Y}_t} = \underset{(0,43)}{0,946} + \underset{(0,027)}{0,039}\, X_t \tag{4}$$

c) Contrasta la $H_0 : E(X_t u_t) = 0$ sabiendo que:

$$V\hat{a}r(\hat{\beta}_{VI}) = \begin{pmatrix} 0,018 & -0,44 \\ -0,44 & 1,20 \end{pmatrix}$$

Como conclusión del resultado del contraste ¿cuál es el método adecuado para estimar el modelo (3)? ¿Qué propiedades tienen dichos estimadores?

<u>PROBLEMA LE-2001.6</u> (Sep-2001)

En el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{5}$$

donde:
- X_{2t} es una variable no estocástica
- X_{3t} es una variable estocástica independiente de u_t
- $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$

a) Enuncia el teorema de Mann y Wald aplicándolo a la ecuación (5). Recuerda que tienes que incluir las condiciones para que sea aplicable e indica **claramente** qué resultados produce. **Demuestra** las implicaciones que tiene este teorema para el estimador de MCO de los parámetros del modelo.

b) En la ecuación (5) indica cómo contrastarías la hipótesis de significatividad conjunta de los regresores. Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución, así como la regla de decisión. Indica claramente cómo se obtienen **cada uno** de los elementos del estadístico de contraste.

PROBLEMA LE-2001.7 (Sep-2001)

Disponemos de 56 observaciones para las variables Y y X con las que se estima un modelo de regresión por MCO con los siguientes resultados:

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(0{,}640)}{1,920} + \underset{(0{,}098)}{0,478}Y_{t-1} - \underset{(0{,}874)}{3,766}X_t \qquad DW = 1,7 \tag{6}$$

siendo X una variable no estocástica. Se dispone además del coeficiente de bondad del ajuste para la estimación por MCO de la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{u}_{t,MCO} = \delta_0 + \delta_1 \hat{u}_{t-1,MCO} + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 X_t + \eta_t \qquad R^2 = 0,42 \tag{7}$$

a) A la vista de los resultados, ¿qué propiedades tienen los estimadores propuestos? **Justifica** razonadamente cada una de ellas.

b) Propón los **mejores** estimadores posibles dadas las características del modelo. Explica claramente el proceso para conseguirlos.

c) Con los estimadores propuestos en el apartado anterior ¿cómo contrastarías la significatividad de la variable endógena retardada? Escribe el estadístico y su distribución indicando claramente cuáles son cada uno de sus elementos y cómo conseguirlos.

PROBLEMA LADE-2001.1 (Jun-2001)

Para modelizar la relación entre consumo familiar (Y) y renta del cabeza de familia (X) se propone la siguiente ecuación:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \tag{1}$$

donde se supone que u_i tiene distribución normal y se conocen los datos de 10 familias:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
Y	8	91	191	22	55	32	81	176	138	31	825
X	4	49	100	9	25	16	36	81	64	16	400

Se ha estimado por MCO obteniendo:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 400 \\ 400 & 25588 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 825 \\ 52176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[0] CVS Id: $Id: 01e2e.tex,v 1.3 2004/01/30 09:10:49 etpdihei Exp

Además, se ha realizado la regresión auxiliar:

$$\frac{\hat{u}_i^2}{48,65} = -0,245 + 0,0311X_i + \hat{w}_i \qquad \sum \hat{w}_i^2 = 1,1473 \quad R^2 = 0,89 \tag{2}$$

donde $\hat{u}_i$ son los residuos MCO del modelo (1).

a) Usa algún método gráfico para ver si existen indicios de heterocedasticidad. Comenta los resultados.

b) Contrasta la existencia de heterocedasticidad causada por la variable X_i mediante el estadístico de Breusch-Pagan. Plantea claramente la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución. **Comenta la fiabilidad** del contraste anterior para este caso concreto.

c) Estima el modelo (1) por MCG suponiendo que $Var(u_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$

d) ¿Es la variable renta del cabeza de familia, X, relevante para explicar el consumo familiar, Y?

PROBLEMA LADE-2001.2 (Jun-2001)

Para analizar la estructura de ventas de un determinado automóvil se especifica el siguiente modelo,

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Q_t + \beta_4 X_t + u_t \tag{3}$$

donde Y_t=ingresos por ventas del automóvil en cuestión, P_t=precio del automóvil, Q_t=precio medio del resto de automóviles con similares características, X_t= renta per cápita. Con una muestra de 100 observaciones se ha estimado el modelo por MCO obteniéndose los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} &= \underset{(0,2)}{1,5} + \underset{(0,3)}{0,1}\,P_t - \underset{(0,15)}{0,5}\,Q_t + \underset{(0,05)}{0,7}\,X_t \\ R^2 &= 0,87 \qquad\qquad SCR = 215 \end{aligned} \tag{4}$$

a) Contrasta la significatividad de P_t, asumiendo que $u_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_u^2)$. Comenta el resultado obtenido.

b) Utilizando uno de los siguientes resultados contrasta la existencia de autocorrelación de primer orden en las perturbaciones:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= 0,2 + 0,3\hat{u}_{t-1} + 0,15P_t + 0,12Q_t + 0,01X_t + \hat{v}_{1t} \quad R^2 = 0,15 \;\; SCE = 75 \\ \hat{u}_t &= 0,35\hat{u}_{t-1} + 0,22\hat{u}_{t-2} + 0,1P_t + 0,16Q_t + 0,04X_t + \hat{v}_{2t} \quad R^2 = 0,18 \;\; SCE = 74 \\ \hat{u}_t &= 0,3 + 0,24\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_{3t} \quad R^2 = 0,05 \;\; SCE = 56 \\ \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}^2} &= 0,13 + 0,2\frac{\hat{u}_{t-1}}{\hat{\sigma}^2} + 0,19P_t + 0,02Q_t + 0,09X_t + \hat{v}_{4t} \quad R^2 = 0,35 \;\; SCE = 98 \end{aligned}$$

¿**Afecta** el resultado del contraste de alguna forma al contraste realizado en a)?

c) Si $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ donde $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $|\rho| < 1$ es desconocido, explica detalladamente como estimarías de la mejor forma posible los parámetros del modelo (4).

d) En el marco descrito en c), ¿cómo realizarías el contraste de significatividad de P_t? Explícalo.

PROBLEMA LADE-2001.3 (Jun-2001)

En $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + u_t \;\; t = 1, 2, \ldots, T$, donde $u_t \overset{iid}{\sim} (0, \frac{1}{20})$ y tenemos los datos siguientes:

t	1	2	3	4	5	6	Suma
Y_t	5,0	4,0	3,5	4,0	4,5	5,0	26,0
X_t^*	6,0	7,0	6,0	7,0	8,0	8,0	42,0

a) ¿Qué ocurre si la variable X_t^* es una variable medida con error, donde $X_t^* = X_t + \varepsilon_t$? (Ayuda: partiendo del modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + w_t$, X_t sería una variable no observable y w_t y ε_t son perturbaciones independientes).

b) Si sólo se sospecha que X_t^* está medida con error, ¿cómo contrastarías si el estimador MCO es consistente? Realiza el contraste sabiendo que la correlación entre X_t^* y X_{t-1}^* es 0,429 y que X_{t-1}^* no está correlacionada con u_t.

c) Suponiendo que de b) deduces que el estimador MCO es inconsistente, contrasta (no tengas en cuenta que T es pequeño) si la variable X_t^* es significativa.

PROBLEMA LADE-2001.4 (Sep-2001)

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta \; X_t + u_t$ del que se conocen los siguientes datos:

t	Y	X
1	2	-3
2	10,2	5
3	17,9	13
4	2,3	-3
5	10	5
6	18,2	13
7	-5,7	-11
8	-14,1	-19
Sumas	40,8	0

Se ha estimado por MCO obteniendo:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum X_t \\ - & \sum X_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 888 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 40,8 \\ 888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Usa algún método gráfico para ver si existen indicios de autocorrelación. Comenta los resultados.

b) Contrasta si la perturbación u_t sigue un proceso autorregresivo de primer orden. Plantea claramente la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y la regla de decisión.

c) Estima el parámetro ρ si suponemos que la perturbación sigue un proceso autorregresivo de orden 1, $u_t = \rho\, u_{t-1} + \varepsilon_t$ donde $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\varepsilon)$ y $|\rho| < 1$.

d) Utilizando el resultado anterior estima los parámetros del modelo, α y β, por MCGF.

e) ¿Es la variable X relevante para explicar Y? Contrástalo, especificando claramente la hipótesis nula, la alternativa y la distribución del estadístico de contraste.

<u>PROBLEMA LADE-2001.5</u> (Sep-2001)

Se quiere estudiar la relación entre las importaciones (Y_t) y la renta (X_t) de un país. El modelo propuesto es el siguiente:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-1} + u_t \tag{1}$$

La estimación MCO con datos **trimestrales** de los años 1971 a 1996 es:

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{Y}_t} = \underset{(1,01)}{-12} + \underset{(0,3)}{0,89}\, X_t - \underset{(0,3)}{0,16}\, X_{t-1} \qquad R^2 = 0,94 \qquad SCR = 17,7 \tag{2}$$

Además, con los residuos MCO de (2) se han realizado las siguientes estimaciones MCO:

$$\frac{\hat{u}_t^2}{0,172} = \underset{(3,18)}{1,51} + \underset{(0,004)}{0,003}\, X_t^2 + e_t \qquad R^2 = 0,003\ SCR = 655,9 \tag{3}$$

$$\hat{u}_t = \underset{(0,74)}{-0,35} - \underset{(0,22)}{0,18}\, X_t + \underset{(0,22)}{0,20}\, X_{t-1} + \underset{(0,17)}{0,8}\, \hat{u}_{t-1} + e_t \qquad R^2 = 0,50\ \ SCR = 8,51 \tag{4}$$

a) Contrasta la existencia de heterocedasticidad. Escribe las hipótesis nula y alternativa, el estadístico de contraste y el criterio de decisión.

b) Contrasta la existencia de autocorrelación. Escribe las hipótesis nula y alternativa, el estadístico de contraste y el criterio de decisión.

Posteriormente se han realizado dos nuevas estimaciones de los parámetros del modelo (1). En la primera se han estimado los parámetros por MCG suponiendo que la varianza de la perturbación es de la forma $Var(u_t) = \sigma^2 X_t^2$, obteniendo los siguientes resultados:

$$\underset{(\widetilde{desv.})}{\widetilde{Y}_t} = -\underset{(1,01)}{11} + \underset{(0,3)}{0,99}\, X_t - \underset{(0,3)}{0,32}\, X_{t-1} \tag{5}$$

$$\widetilde{\sigma}^2 = 1,654 \qquad R^2 = 0,93 \qquad SCR = 18,8 \qquad DW = 0,36$$

En la segunda se han estimado los parámetros por el método iterativo de Cochrane-Orcutt:

$$\underset{(desv.)}{\widetilde{Y_t}} = \underset{(2,54)}{-16} + \underset{(0,2)}{0,72}X_t + \underset{(0,2)}{0,16}X_{t-1} \tag{6}$$

$$\hat{\rho} = 0,7 \qquad R^2 = 0,98 \qquad SCR = 4,27 \qquad DW = 1,8$$

c) Contrasta la $H_0 : \beta_2 = 0$. Explica claramente el estimador que utilizas y por qué.

PROBLEMA LADE-2001.6 (Sep-2001)

Se quiere analizar la relación entre los dividendos ofrecidos por las empresas de una determinada industria, Y_i, y sus beneficios, X_i, mediante la relación

$$Y_i = \beta X_i + v_i$$

donde v_i sigue una distribución normal.

a) Se sospecha que la dispersión de los dividendos ofrecidos es mayor entre las empresas con mayores beneficios. Para contrastar tal hipótesis se estima por MCO el modelo para las 61 empresas con mayores beneficios y para las 61 con menores beneficios obteniendose los siguientes resultados:
Mayores beneficios:

$$Y_i = 0,3X_i + \hat{v}_i, \quad \sum Y_i^2 = 47, \quad \sum X_i^2 = 325, \quad \sum X_iY_i = 97,5$$

Menores beneficios:

$$Y_i = 0,22X_i + \hat{v}_i, \quad \sum \hat{v}_i^2 = 15,3$$

Contrasta dicha hipótesis.

b) La variable X_i se determina por las cantidades que las empresas declaran, que se sospecha que difiere de los verdaderos beneficios obtenidos. ¿Cómo afecta este hecho al estimador de MCO de β? Arguméntalo de una forma detallada estableciendo los supuestos que consideres necesarios.

c) Se disponen también de los siguientes datos de los ingresos por ventas de las empresas (I_i), que se sabe que son exactos y, se considera que I_i no es estocástica:

$$\sum I_i^2 = 525, \quad \sum X_iI_i = 415, \quad \sum I_iY_i = 115$$

Suponiendo que $\boldsymbol{v_i \sim iid(0, \sigma_v^2 = \frac{1}{2})}$ y teniendo en cuenta lo comentado en b) estima β de la mejor forma posible y comenta la propiedades del estimador utilizado. Teniendo en cuenta que el tamaño muestral es 150 contrasta la significatividad de los beneficios en la determinación de los dividendos.

PROBLEMA LADE-2001.7 (Sep-2001)

Un economista de la Cámara de Comercio analiza las ventas de dos empresas locales del sector de electrodomésticos de línea blanca mediante el siguiente modelo:

$$\begin{cases} V_{1t} &= \alpha_1 + \beta_1 P_{1t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_1^2) \quad t = 1, \ldots, T \\ V_{2t} &= \alpha_2 + \beta_2 P_{2t} + u_{2t} \qquad u_{2t} \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_2^2) \quad t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

donde

P_{it} = gasto en el trimestre t en publicidad de la empresa i-ésima.
V_{it} = ventas en el trimestre t de la empresa i-ésima.

Argumenta en qué situación, siendo todos los parámetros de las 2 ecuaciones distintos, existe un estimador preferible al de MCO ecuación por ecuación para este modelo. Especifica cualquier supuesto que tengas que hacer y describe detalladamente dicho estimador y sus propiedades.

PROBLEMA LE-2002.1 (Jun-2002)

Con una muestra de 15 países se desea estimar el efecto que un aumento en las cotizaciones de la Seguridad Social tendría sobre la parte de las cotizaciones a cargo de los trabajadores. La información, correspondiente al año 1982, de las cotizaciones a la Seguridad Social (CSS) y la parte correspondiente a los trabajadores (CSST), en ambos casos como porcentaje del total de ingresos fiscales se presenta en las dos primeras columnas de la siguiente tabla:

	CSS	CSST	$\hat{u}$
Austria	31,9	13,5	
Bélgica	29,8	10,1	-0,08327
Dinamarca	2,8	1,5	-2,97434
Francia	43,2	11,5	
Alemania	36,2	16,1	
Irlanda	15,0	5,4	-1,65393
Italia	47,2	7,1	
Japón	30,4	10,7	0,38986
Luxemburgo	28,0	11,2	1,39732
Países Bajos	41,6	18,0	
Portugal	28,5	10,8	0,89160
España	46,5	10,3	
Suiza	31,0	10,2	-0,23700
Reino Unido	16,9	7,6	0,14433
EE.UU.	27,7	10,8	1,06076

[0] Control de versiones: $Id: 02e2le.tex,v 1.3 2003/02/04 17:17:07 etpdihei Exp

Consideramos el siguiente modelo:

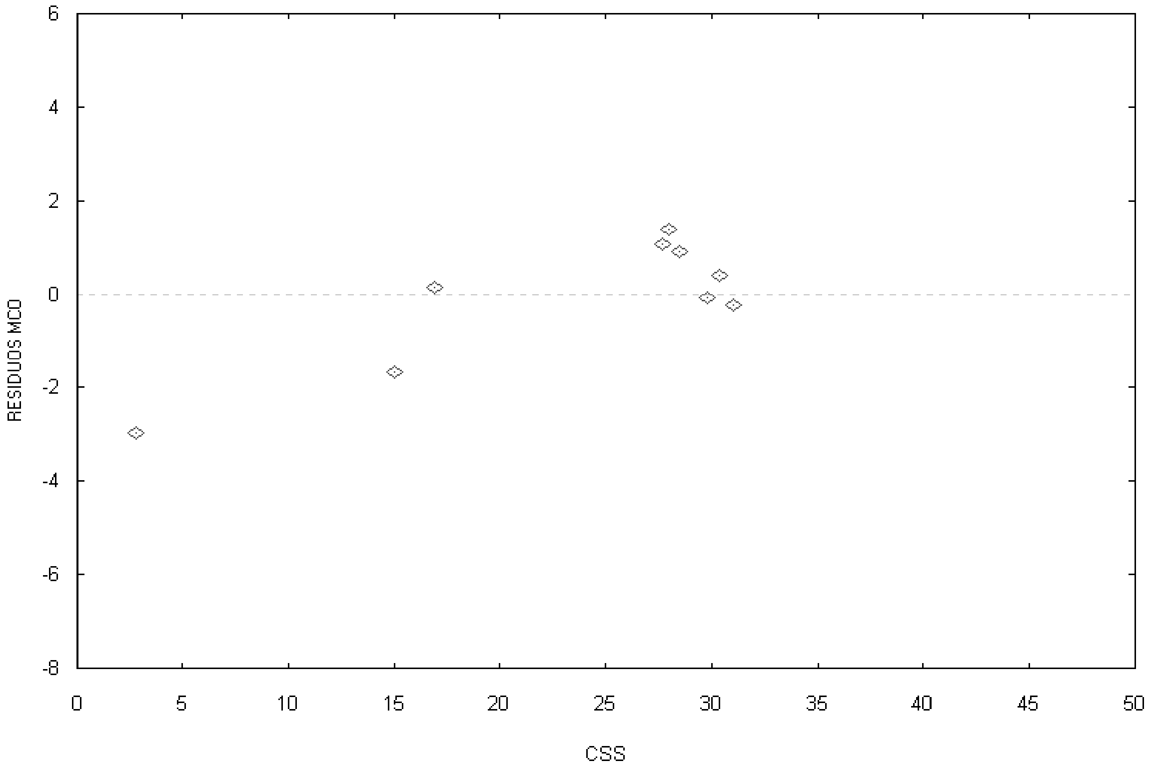
$$CSST_i = \beta_1 + \beta_2 CSS_i + u_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, 15$$

Los resultados de la estimación del modelo anterior por MCO con la muestra de los 15 países son los siguientes:

$$\underset{(t-estad.)}{\widehat{CSST}_i} = \underset{(1,69)}{3,8823} + \underset{(3,01)}{0,211442} CSS_i \tag{1}$$

$$\bar{R}^2 = 0,365 \qquad SCR = 132,7767$$

a) **Fijate en la tabla**, en la tercera columna se muestran los residuos MCO, $\hat{u}_i$. Indica la forma general de obtener $\hat{u}_i$. A continuación completa los que faltan en la misma tabla y en el siguiente gráfico:



b) Una vez completado el gráfico comenta si crees que puede existir algún problema razonando tu respuesta.

c) Con la siguiente información lleva a cabo el contraste de Goldfeld y Quandt. Debes de completar la información que falta y señalar claramente todos los elementos del contraste incluidas la hipótesis nula y la alternativa.

- Primera submuestra

$$\widehat{CSST}_i \quad = \quad 0,463351 + 0,374431 CSS_i \tag{2}$$

$CSST_i$	1,5					
CSS_i	2,8					
$\hat{u}_1$	-0,011759		0,808758		0,25257	

- Segunda submuestra

$$\widehat{CSST}_i \quad = \quad 28,9928 - 0,395203 CSS_i \tag{3}$$

$CSST_i$	13,5					
CSS_i	31,9					
$\hat{u}_2$		1,413507		-0,420075		-3,239264

d) Dada la evidencia obtenida en los apartados anteriores y **con la siguiente información**, estima **eficientemente** los coeficientes del modelo. Explica cómo se obtiene este estimador y qué supuestos se están haciendo para que este estimador sea eficiente.

	$CSST_i/CSS_i$	$1/CSS_i$	$Constante_i = 1$
$CSST_i/CSS_i$	2,12814	0,3672255	5,47296
$1/CSS_i$		0,1463262	0,8374455
$Constante_i = 1$			15

donde por ejemplo $\sum CSST_i/CSS_i = 5,47296$.

e) Con el estimador que has propuesto en el apartado anterior **contrasta** la hipótesis nula de que un aumento en las cotizaciones de la Seguridad Social recaería totalmente sobre los trabajadores, esto es $H_o : \beta_2 = 1$. Indica todos los supuestos necesarios para que sea válido el contraste.

<u>PROBLEMA LE-2002.2</u> (Jun-2002)

En el modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad u_t \sim iid(0, \sigma^2)$$

donde X_{2t} es una variable fija y X_{3t} es una variable estocástica .
Denotamos por β al vector de parámetros desconocidos.

a) ¿Por qué el estimador de β MCO no es lineal?

b) ¿Qué supuesto te garantiza que el estimador de β por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) sea insesgado? Demuestralo.

c) Si X_{3t} es estocástica y no independiente de u_t pero $E(X_{3t}u_t) = 0, \forall t$, ¿es el estimador de β por MCO consistente? Demuestralo e indica los supuestos adicionales que te sean necesarios.

d) Si X_{3t} es estocástica pero se satisface el Teorema de Mann y Wald ¿podemos hacer inferencia sobre β a pesar de no conocer la distribución de u_t? Razona tu respuesta.

PROBLEMA LE-2002.3 (Jun-2002)

La compañía de teléfonos Euskaltel considera que sus ventas mensuales (Y) dependen de sus gastos en publicidad (X) y de sus ventas en el mes anterior. Para saber cuál ha sido la relación entre éstas variables durante los últimos 5 meses decide estimar el siguiente modelo suponiendo que X_t es una variable fija:

$$Y_t = \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 5 \tag{4}$$

con los siguientes datos:

t	Y_t	X_t
1	-10	4
2	16	16
3	2	6
4	4	6
5	-4	0

a) Estima los parámetros de la ecuación (4) por el método de variables instrumentales utilizando X_{t-1} como instrumento para Y_{t-1}. Muestra cuáles son las matrices que intervienen en el estimador hasta llegar al resultado final.

b) Teniendo en cuenta que no se ha especificado la distribución de la perturbación, ¿es posible que exista algún método de estimación con mejores propiedades asintóticas? Explica el método de estimación adecuado para dos diferentes hipótesis sobre la distribución de la perturbación.

PROBLEMA LE-2002.4 (Jun-2002)

Queremos estudiar las ventas de automóviles del modelo Seat León en dos comunidades distintas, País Vasco y Navarra. Para ello disponemos de los siguientes modelos:

$$Y_t^V = \alpha_1 + \beta_1 X_t^V + \gamma_1 Z_t^V + u_t^V \qquad u_t^V \sim NID(0, \sigma^2) \qquad t = 1, \ldots, T \tag{5}$$

$$Y_t^N = \alpha_2 + \beta_2 X_t^N + \gamma_2 Z_t^N + u_t^N \qquad u_t^N \sim NID(0, \sigma^2) \qquad t = 1, \ldots, T \tag{6}$$

donde u_t^V Y u_t^N son independientes, Y_t^s son las ventas del Seat León en t, X_t^s es el precio del modelo en t, Z_t^s es la renta disponible en t.($s = V$ para el País Vasco y $s = N$ para Navarra). ¿Cómo contrastarías que los coeficientes de ambas ecuaciones son iguales? Especifica la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste explicando cómo obtener cada uno de sus elementos y la regla de decisión. En caso de aceptar la hipótesis nula, ¿qué modelo deberíamos estimar? Escríbelo.

PROBLEMA LE-2002.5 (Sep-2002)

Se dispone de observaciones anuales de las variables Consumo (C_t) y Renta (R_t) para un país. Los datos se muestran en las primeras columnas de la siguiente tabla:

Obs.	C	R	$\widehat{C}$	$\hat{u}$
1	8,547	11,0	8,0483680	0,498632
2	8,942	13,5	9,7986580	-0,856658
3	10,497	14,0	10,148716	0,348284
4	10,173	14,9	10,778820	-0,605820
5	11,997	15,1	10,918843	1,078157
6	10,729	18,0	12,949180	-2,220180
7	12,750	18,8	13,509273	-0,759273
8	15,611	19,1	13,719307	1,891693
9	13,545	21,0	15,049528	-1,504528
10	17,843	21,2	15,189551	
11	21,610	34,0	24,151036	
12	25,473	34,3	24,361070	
13	24,434	35,0	24,851152	
14	28,274	38,0	26,951500	

Los resultados de la estimación por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) de la función de consumo

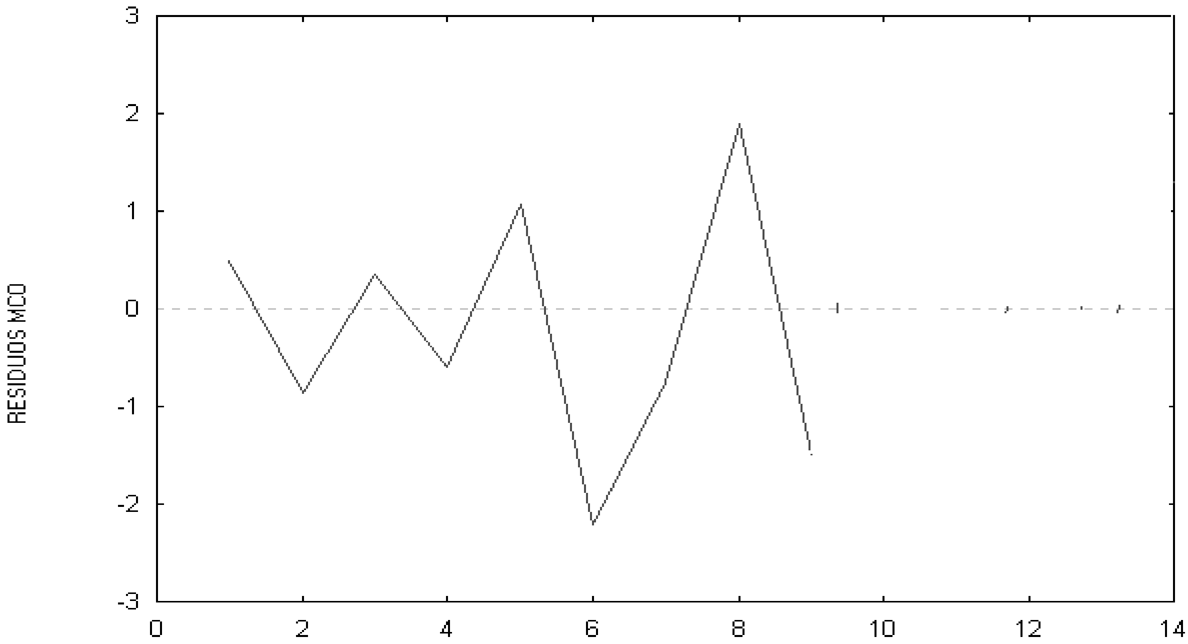
$$C_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + u_t$$

se muestran a continuación:

$$\underset{(t-estad.)}{\hat{C}_t} = \underset{(0,31)}{0,347092} + \underset{(14,61)}{0,700116}\, R_t \tag{1}$$

$$\bar{R}^2 = 0,942 \qquad SCR = 30,6381$$

a) La última columna de la tabla anterior muestra los residuos de la estimación anterior, **complétala** y haz lo mismo con la serie temporal del gráfico de residuos que se muestra a continuación. A la vista del gráfico **comenta razonadamente** si existe algún problema.



b) Obtén el valor del estadístico de **Durbin y Watson** y realiza el contraste para el cuál está diseñado. Indica todos los elementos del contraste incluyendo la hipótesis nula y la alternativa.

c) Utilizando la siguiente información realiza el contraste de **Breusch y Godfrey**. Indica todos los elementos del contraste incluyendo la hipótesis nula y la alternativa.

$$\underset{(t-estad.)}{\hat{u}_t} = \underset{(-0,603)}{-0,5679} + \underset{(0,0385)}{0,0198}\,R_t + \underset{(-3,338)}{-0,75}\,\hat{u}_{t-1} + \hat{\omega}_t \quad R^2 = 0,433 \tag{2}$$

d) Dada la evidencia obtenida en los apartados anteriores, qué consecuencias tiene en:

   I) Las propiedades para muestras finitas del estimador de los coeficientes del modelo. Razona y demuestra tu respuesta.

   II) La inferencia utilizando los estadísticos t mostrados en la ecuación (1). Razona tu respuesta.

e) ¿Cambiaría tu respuesta al apartado anterior si el problema detectado fuera consecuencia de omitir alguna variable relevante? Razona tu respuesta.

f) Considera la siguiente información y **completa lo que falta**, (está indicado con puntos).

$\hat{\rho}$	-0,99	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1
SCR^*	15,9	14,8	14,2	14,1	14,7	15,8	17,5	19,9	22,8	26,2	30,3	34,9

siendo

$$SCR^* = \sum_{t=....}^{t=....} \{(Y_t^* - \hat{\beta}_1 X_{1t}^* - \hat{\beta}_2 X_{2t}^*\}^2 \tag{3}$$

$$Y_t^* = C_t - \hat{\rho} C_{t-1}; \qquad X_{1t}^* = ...; \qquad X_{2t}^* = ...$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} .... \\ .... \end{bmatrix}$$

I) ¿qué método de estimación se está utilizando?

II) ¿Cómo obtendrías las estimaciones finales de β_1 y β_2 por este método? Indica el valor elegido de $\hat{\rho}$ razonando tu elección y la fórmula para obtener el estimador de β_1 y β_2 ¿Qué propiedades tienen los estimadores obtenidos de estos parámetros?

III) ¿Cómo contrastarías $H_0 : \beta_2 = 1$? Indica todos los elementos del estadístico de contraste, así como la regla de decisión.

PROBLEMA LE-2002.6 (Sep-2002)

En el modelo

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \dots, T$$

donde
X_{2t} y X_{3t} son variables fijas
$E(u_t) = 0 \quad \forall t$
$E(u_t^2) = \sigma_t^2 \quad t = 1, \dots, T$
$E(u_t u_s) = 0 \quad \forall t, s \quad t \neq s$

a) Si σ_t^2 no es conocida: Escribe el estadístico y todos sus elementos así como la regla de decisión para realizar el contraste $H_0 : \beta_2 = 0$ basándote en el estimador MCO de β_2.

b) Si $\sigma_t^2 = \sigma^2 \frac{1}{X_{3t}^2}$ Explica cómo obtendrías el estimador de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ lineal, insesgado y eficiente. Razona tu respuesta.

PROBLEMA LE-2002.7 (Sep-2002)

Considera la siguiente relación

$$Y_{1t} = \beta_1 Y_{2t} + \beta_2 X_{1t} + u_t \tag{4}$$

donde X_{1t} es una variable fija y se cree que la variable Y_{2t} puede estar correlacionada con el término de perturbación u_t que se supone ruido blanco, es decir, $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$. Por otro lado se sabe que

$$Y_{2t} = \gamma X_{2t} + \varepsilon_t \tag{5}$$

donde X_{2t} es un regresor fijo y $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Una muestra de 25 observaciones da lugar a **las siguientes sumas de cuadrados y de productos cruzados**:

	Y_{1t}	Y_{2t}	X_{1t}	X_{2t}
Y_{1t}	100	80	-60	60
Y_{2t}	80	100	-40	-10
X_{1t}	-60	-40	80	50
X_{2t}	60	-10	50	40

donde por ejemplo $\sum Y_{1t}X_{1t} = -60$ y $\sum Y_{1t}^2 = 100$

a) Obtén la estimación de β_1 y β_2 en la ecuación (4) por Mínimos Cuadrados Ordinarios.

b) Bajo el supuesto de que $E(Y_{2t}u_t) \neq 0$, define un estimador consistente de β_1 y β_2. Escribe formalmente las condiciones que te aseguran esta propiedad y razona si se darían en este caso.

c) Obtén la estimación de β_1 y β_2 con el estimador propuesto en el apartado anterior.

d) Bajo el supuesto de $\sigma_u^2 = 1$, utiliza el contraste de Hausman para comprobar si hay evidencia de que Y_{2t} y u_t están correlacionadas. Explica el procedimiento de contraste, incluyendo la hipótesis nula y alternativa.

e) Dado el resultado del contraste del apartado anterior, ¿qué estimador es preferible en este caso? ¿ Por qué?

PROBLEMA LADE-2002.1 (Jun-2002)

Se quiere analizar la relación entre inflación (Y_t) y tipos de interés (X_t) para lo que se dispone de 100 observaciones mensuales. Para ello se especifica el siguiente modelo

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

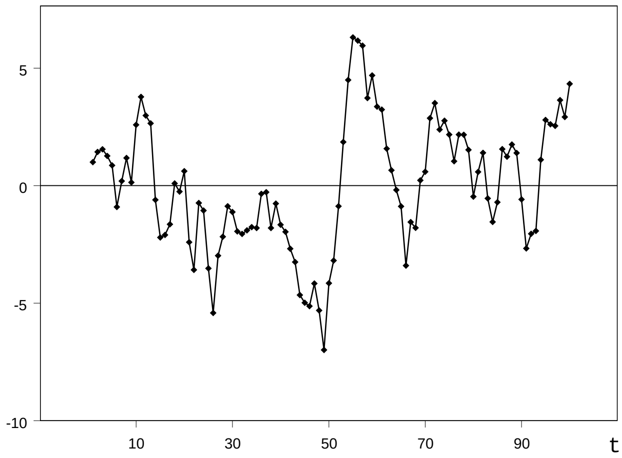
donde se considera que X_t es una variable no estocástica. Se estima por MCO y se obtiene

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,86)}{11,59} - \underset{(0,14)}{0,58}X_t \qquad t = 1, 2, ..., 100. \tag{1}$$

con los residuos representados en la figura 1.

[0] Control de versiones: $Id: 02e2lade.tex,v 1.4 2003/02/04 17:29:23 etpdihei Exp

Figura 5: Residuos MCO



a) Comenta el gráfico de los residuos, señalando si encuentras alguna evidencia contra el cumplimiento de alguna hipótesis básica.

b) Con los siguientes resultados sobre los residuos contrasta la existencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones.

$$\sum_{t=1}^{100} \hat{u}_t^2 = 739,3073 \quad , \quad \sum_{t=2}^{100} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 194,3556 \quad , \quad \sum_{t=2}^{100} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 632,2639$$

c) Se piensa que la dispersión en la inflación es menor en los últimos años. Contrasta dicha hipótesis utilizando las dos regresiones siguientes que se han realizado separadamente con los 32 primeros y con los 32 últimos datos:

$$\begin{array}{lcllll} \underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} & = & \underset{(1,05)}{12,83} - \underset{(0,17)}{0,58} X_t & SCR = 126,62, & t = 1,2,...,32, \\ \underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} & = & \underset{(1,20)}{9,85} - \underset{(0,19)}{0,35} X_t & SCR = 96,22, & t = 69,70,...,100, \end{array}$$

d) De acuerdo con tus resultados en b) y c) comenta las propiedades del estimador MCO de los coeficientes en (1).

e) Otro investigador opina que un modelo adecuado para explicar la relación entre tipos de interés e inflación debería tener en cuenta el dinamismo existente en esta última, por lo que decide incluir la inflación en el mes anterior como regresor, obteniendo por MCO el siguiente modelo estimado,

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,36)}{4,84} - \underset{(0,04)}{0,66}X_t + \underset{(0,03)}{0,88}Y_{t-1} \qquad t = 2,3,...,100, \qquad (2)$$

$$R^2 = 0,91 \quad , \quad DW = 1,70$$

y las siguientes regresiones auxiliares:

$$\begin{array}{llll}
i) & \hat{u}_t = 0,09 + 0,16\hat{u}_{t-1} + 0,004X_t - 0,01Y_{t-1} + \hat{v}_{1t} & R^2 = 0,024, & SCT = 738,3 \\
ii) & \hat{u}_t = 0,35\hat{u}_{t-1} + 0,1X_t + 0,06Y_{t-1} + \hat{v}_{2t} & R^2 = 0,018, & SCT = 738,3 \\
iii) & \hat{u}_t = 0,3 + 0,24\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_{3t} & R^2 = 0,005, & SCT = 738,3 \\
iv) & \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}^2} = 0,13 + 0,2\frac{\hat{u}_{t-1}}{\hat{\sigma}^2} + 0,19X_t + 0,02Y_{t-1} + \hat{v}_{4t} & R^2 = 0,354, & SCT = 98,7
\end{array}$$

Contrasta de manera adecuada la existencia de autocorrelación de primer orden en las perturbaciones.

f) De acuerdo con lo obtenido en el apartado e), comenta las propiedades de los estimadores por MCO en la ecuación (2). ¿Cambian en algo tus conclusiones del apartado d)?

PROBLEMA LADE-2002.2 (Jun-2002)

Se propone el modelo $Y_t = \beta_1 X_t + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$, para analizar la relación entre dos variables, X e Y, donde X_t se considera no estocástica. Se disponen de los siguientes datos

t	1	2	3	4	5	6	7	8
X_t	10,3	11,7	6,3	-1,0	4,7	-1,6	6,2	3,1
Y_t	14,6	17,5	12,9	3,9	5,5	0,6	4,5	2,5

Se estima por MCO obteniéndose los siguientes resultados

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,11)}{0,88}X_t + \underset{(0,06)}{0,41}Y_{t-1} \qquad t = 2,3,...,8. \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 250,28 & 295,37 \\ 295,37 & 751,89 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 342,66 \\ 570,26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,88 \\ 0,41 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es la variable X_t relevante en la explicación de Y_t?

b) Si las perturbaciones presentan autocorrelación de primer orden, demuestra detalladamente las propiedades asintóticas del estimador MCO anterior. ¿Qué validez tiene en este caso el contraste realizado en a)?

c) En el caso de perturbaciones autocorrelacionadas propón, si existe, un estimador del modelo anterior que mejore las propiedades del obtenido por MCO. Razona detalladamente la mejora que obtienes. Calcula las estimaciones propuestas.

d) Si las perturbaciones siguiesen un $AR(1)$ describe detalladamente un estimador asintóticamente eficiente.

PROBLEMA LADE-2002.3 (Jun-2002)

Considera, para un país determinado, el modelo macroeconómico formado por las ecuaciones

$$\begin{array}{lll} C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_t & \text{con} & u_t \sim NID(0, \sigma_u^2) \\ Q_t = \beta_0 + \beta_1 K_t + \beta_2 L_t + v_t & \text{con} & v_t \sim NID(0, \sigma_v^2) \end{array}$$

donde las variables (medidas en logaritmos) son C: consumo agregado, K: stock de capital, Y: renta disponible, L: trabajo y Q: oferta agregada. Suponiendo que los regresores, Y, K y L, son no estocásticos y que $\sigma_u^2 \neq \sigma_v^2$, ambas desconocidas, responde a las siguientes preguntas:

a) Si u y v son independientes, describe detalladamente cómo estimarías de la mejor forma posible el modelo.

b) También bajo la hipótesis de independencia entre u y v, ¿cómo contrastarías la hipótesis de rendimientos constantes a escala, es decir, que $\beta_1 + \beta_2 = 1$?

PROBLEMA LADE-2002.4 (Sep-2002)

a) ¿Cuáles son las propiedades asintóticas deseables en un estimador? Defínelas.

b) En el modelo $Y = X\beta + u$ donde X es una matriz $T \times K$ de variables aleatorias independientes de $u \sim (0, \sigma_u^2 I)$, demuestra que la distribución asintótica del estimador MCO es $\sqrt{T}(\hat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_u^2 Q^{-1}\right)$ siendo $Q = plim\left(\frac{X'X}{T}\right)$.

c) En el modelo anterior, ¿cómo contrastarías la hipótesis de que el vector $(K \times 1)$ β es igual a cero?

<u>PROBLEMA LADE-2002.5</u> (Sep-2002)

La expresión teórica habitual que relaciona consumo (C_i) y renta (Y_i) de la familia "i" es la siguiente: $C_i = \beta\, Y_i$. Milton Friedman presentó una crítica a esta teoría del consumo, argumentando que el consumo no está relacionado con la renta obtenida cada año (Y_i), sino con una medida de la renta a más largo plazo, a la que denominó *renta permanente* (Y_i^P). Así, la versión más sencilla de esta teoría sostiene que el consumo es proporcional a la renta permanente más un componente aleatorio:

$$\begin{aligned} C_i &= \beta\, Y_i^P + u_i \quad i = 1, \ldots, N; \quad u_i \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_u^2) \\ Y_i &= Y_i^P + \epsilon_i \qquad \epsilon_i \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_\epsilon^2) \end{aligned} \tag{1}$$

donde ϵ_i sería el componente transitorio de la renta de la familia "i". Además, Y_i^p, u_i y ϵ_i son variables aleatorias independiente entre sí.

a) El problema surge a la hora de estimar la relación anterior (1), dado que la renta permanente no es observable. Propón un modelo donde puedas estimar el parámetro β de la ecuación (1) utilizando la variable Y_i.

b) ¿Qué propiedades tiene el estimador MCO del β del apartado anterior? Razónalo detalladamente.

c) Se dispone de datos de la renta de hace 5 años (Y_i^5) para los mismos individuos del modelo. Siguiendo las ideas de Liviatan, esta variable estará relacionada con Y_i^P, ya que individuos que fueran ricos hace 5 años probablemente también lo serán en el momento actual (de igual manera los pobres), pero estará incorrelacionada con el componente transitorio de la renta actual (ϵ_i) y con u_i. Utilizando esta variable propón un estimador del parámetro β del modelo (1) que tenga mejores propiedades que el del apartado anterior. Descríbelo detalladamente y razona sus propiedades.

<u>PROBLEMA LADE-2002.6</u> (Sep-2002)

De la macroeconomía básica se sabe que los cambios en la oferta monetaria inducen cambios en los tipos de interés. Sin embargo, uno esperaría que los cambios se produjeran a lo largo de varios periodos de tiempo. Supongamos que otras variables, como el gasto público, no afectan significativamente a los tipos de interés. En el siguiente modelo, para datos trimestrales, se supone un efecto distribuido a lo largo de cinco periodos:

$$R_t = \alpha + \beta_0 M_t + \beta_1 M_{t-1} + \beta_2 M_{t-2} + \beta_3 M_{t-3} + \beta_4 M_{t-4} + u_t$$

donde R_t es el tipo de interés y M_t es la oferta monetaria (que se supone no estocástica).

a) Se ha estimado el modelo mediante MCO con 100 datos, obteniendo unos residuos cuyo coeficiente de autocorrelación muestral de primer orden ha tomado el valor $\hat{\rho} = 0,75$. Teniendo en cuenta este valor, contrasta la existencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones del modelo.

b) ¿Qué propiedades tiene el estimador de MCO en este modelo?

c) Si te piden que contrastes la hipótesis de que los cambios en la oferta monetaria no afectan al tipo de interés, ¿cómo lo harías?

PROBLEMA LADE-2002.7 (Sep-2002)

Se propone el siguiente modelo para explicar el comportamiento de una variable en dos países, A y B :

$$Y_{At} = \alpha_A X_{1At} + \beta_A X_{2At} + u_{At}, \qquad u_{At} \sim NID(0, \sigma_A^2) \tag{2}$$
$$Y_{Bt} = \alpha_B X_{1Bt} + \beta_B X_{2Bt} + u_{Bt}, \qquad u_{Bt} \sim NID(0, \sigma_B^2) \tag{3}$$

X_1 y X_2 son dos variales no estocásticas. Se dispone de dos muestras independientes de 102 observaciones cada una. Los resultados de la estimación MCO de cada ecuación son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_{At}} = \underset{(0,059)}{0,145}\, X_{1At} + \underset{(0,034)}{0,51}\, X_{2At}, \qquad SCR_A = 1,636$$
$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_{Bt}} = \underset{(0,053)}{0,161}\, X_{1Bt} + \underset{(0,021)}{0,445}\, X_{2Bt}, \qquad SCR_B = 1,547$$

a) Se sospecha que $Var(Y_A) > Var(Y_B)$. Comprueba esta hipótesis mediante el contraste de Goldfeld y Quandt. Plantea las hipótesis nula y alternativa, el estadístico de contraste y su distribución bajo H_0.

b) Un modelo alternativo es $Y_t = \alpha X_{1t} + \beta X_{2t} + u_t$ con $t = 1, \ldots, 204$, que se estimaría considerando conjuntamente los datos de los dos países. La estimación de este modelo mediante MCO proporciona los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,040)}{0,160}\, X_{1t} + \underset{(0,018)}{0,464}\, X_{2t}, \qquad SCR = 3,224 \tag{4}$$

Suponiendo $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, contrasta la igualdad de todos los parámetros entre las ecuaciones (2) y (3) .

c) Dado el resultado del apartado anterior, ¿qué modelo elegirías, (2-3) ó (4)?, ¿por qué?

d) En el modelo que finalmente has propuesto, contrasta si la variable X_2 es significativa.

PROBLEMA LADE-2002.8 (Dic-2002)

Explica la diferencia entre las propiedades de *insesgadez* y de *consistencia* de un estimador.

PROBLEMA LADE-2002.9 (Dic-2002)

i) En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$, con $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ y $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\varepsilon)$, ¿es Y_{t-2} un buen instrumento de Y_{t-1} para el estimador de *variables instrumentales*?

ii) En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 X_{t-4} + u_t$ con X fija, ¿qué contraste (o contrastes) conoces para analizar la presencia de autocorrelación $AR(4)$ en las perturbaciones? Escribe las hipótesis nula y alternativa así como el estadístico de contraste. Explica cómo se obtienen los elementos que intervienen en el estadístico.

PROBLEMA LADE-2002.10 (Dic-2002)

i) Demuestra las propiedades del estimador MCO en el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$ donde X es una variable fija y $u_t \sim N(0, \sigma^2_t)$ e independiente.

ii) En el mismo modelo del apartado i), contrasta la significatividad de la variable X con los siguientes datos de la estimación MCO:

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\hat{\beta} & = & 3 & R^2 & = & 0,768 & SCR & = & 988,241 \\
\sum_{t=1}^{200} Y_t & = & 3106,54 & \sum_{t=1}^{200} X_t & = & 1033,7 & \sum_{t=1}^{200} X_t^2 & = & 5722,017 \\
\sum_{t=1}^{200} X_t \hat{u}_t^2 & = & 6193,82 & \sum_{t=1}^{200} X_t^2 \hat{u}_t^2 & = & 41526,84 & \sum_{t=1}^{200} X_t^2 \hat{u}_t & = & -260,342
\end{array}$$

iii) Propón un contraste válido en muestras finitas de $H_0: \ \sigma_t^2 = \sigma^2 \ \ \forall t$ frente a $H_a: \ \sigma_t^2 = \sigma^2 \cdot t$

iv) Si se rechaza H_0 en el contraste anterior, ¿qué transformación deberías hacer sobre el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$ para que el estimador MCO del modelo transformado sea eficiente? Escribe la expresión de este $\tilde{\beta}^*_{MCO}$ sin utilizar notación matricial.

PROBLEMA LADE-2002.11 (Dic-2002)

En una revista leemos los siguientes resultados de una regresión MCO con datos trimestrales de las variables Y = ventas, X_2=gastos en publicidad y X_3= gastos en investigación y desarrollo: (entre paréntesis, las desviaciones típicas)

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= \underset{(0{,}21)}{1,21} + \underset{(0{,}15)}{0,63}\, X_{2t} + \underset{(0{,}20)}{0,74}\, X_{3t} \\ R^2 &= 0,94 \qquad T = 100 \qquad DW = 0,83 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, el autor calcula el estadístico $t = \dfrac{0,63}{0,15}$ y concluye que los gastos en publicidad tienen un efecto significativo sobre las ventas al nivel de significación del 5 %. ¿Estás de acuerdo con esta conclusión? Si tu respuesta es negativa, explica cómo contrastarías la significatividad del gasto en publicidad sobre las ventas.

PROBLEMA LADE-2002.12 (Dic-2002)

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ donde X es una variable fija y $u_t \sim i.i.d.(0,2)$. Sin embargo, los datos de la variable endógena se observan con error y sólamente se dispone de datos de $Y_t^* = Y_t + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0,3)$ es independiente de la perturbación u_t.

i) Escribe el modelo estimable.

ii) Halla las propiedades de la perturbación del modelo estimable y explica el método de estimación adecuado para obtener las mejores propiedades posibles. Indícalas.

PROBLEMA LADE-2002.13 (Dic-2002)

Enumera tres de los diferentes casos que puedes encontrar al plantear un sistema formado por dos ecuaciones y explica cómo estimarías el modelo en cada uno de ellos.

PROBLEMA LE-2003.1 (Ene-2003)

i) Comenta esta afirmación: *Aunque se satisfagan las condiciones del teorema de Mann y Wald en el Modelo de Regresión Lineal General no podemos contrastar hipótesis sobre β si no conocemos la distribución del término de perturbación aleatoria.*

ii) Demuestra las propiedades en muestras pequeñas del estimador MCO en el modelo con heterocedasticidad $Y_i = \beta X_i + u_i$ con $u_i \sim NID(0, \sigma_i^2)$ y X fija.

iii) Obtén la media, varianza y covarianzas de la variable aleatoria u_t si ésta sigue un proceso de medias móviles de orden uno, MA(1).

iv) En el modelo $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 y_{t-1} + u_t,\ u_t \sim AR(1)$, ¿es y_{t-3} un buen instrumento de y_{t-1}? Razona brevemente tus afirmaciones.

v) ¿Qué es un sistema de ecuaciones aparentemente no relacionadas?

PROBLEMA LE-2003.2 (Ene-2003)

Un investigador, interesado en analizar las importaciones nacionales (Y) correspondientes al periodo 1964-1985 propone el siguiente modelo de regresión:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad\qquad u_t \sim NID(0, \sigma^2) \tag{1}$$

donde X_2 es la renta nacional y X_3 son los precios relativos de las importaciones. Los resultados de la estimación por MCO utilizando datos anuales son los siguientes:

$$\underset{\text{(estadístico t)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(2{,}80)}{273,81} + \underset{(19{,}03)}{0,2458}\ X_{2t} + \underset{(2{,}80)}{0,2467}\ X_{3t} \tag{2}$$

$$R^2 = 0,9846 \qquad\qquad \hat{u}'\hat{u} = 10709,1$$

i) El investigador no se siente tranquilo sin verificar si existe o no autocorrelación en las perturbaciones. Sabiendo que $\sum_{t=1965}^{1985}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 5354,55$, realiza el contraste de Durbin-Watson e interpreta el resultado. Especifica los elementos del contraste.

ii) Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado anterior, ¿tiene validez contrastar la significatividad individual de los coeficientes del modelo utilizando los valores de los estadísticos t mostrados anteriormente? Razona tu respuesta.

iii) Explica el procedimiento de Cochrane-Orcutt en dos etapas para estimar los paráme- tros de este modelo.

PROBLEMA LE-2003.3 (Ene-2003)

Supón que el ahorro de una persona depende de su *renta permanente* mediante la relación:

$$Y_i = \alpha + \beta R_i + v_i \tag{3}$$

donde Y_i es el ahorro anual y R_i es la renta permanente anual de un trabajador. No es posible observar la renta permanente R, por lo que el modelo de regresión a estimar es:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \tag{4}$$

siendo X_i la renta anual de un trabajador, que se utiliza como aproximación a R. Los resultados de la estimación MCO con datos de 50 individuos en el año 1999 son:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}_{MCO} = \begin{pmatrix} 4,34 \\ -0,856 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}^2_{MCO}(X'X)^{-1} = 1,023 \times \begin{pmatrix} 0,7165 & -0,009 \\ & 0,0001 \end{pmatrix}$$

i) La teoría económica mantiene que la relación renta permanente-ahorro es positiva. Sin embargo, la estimación MCO de la pendiente β es negativa. ¿Crees que pueda existir algún problema que dé lugar a esta aparente contradicción? Razona tu respuesta.

Posteriormente se re-estima el modelo (4) mediante variables instrumentales. La variable instrumental utilizada es el promedio de la ingresos obtenidos en los 10 años previos (1989-98) que obviamente, está muy relacionada con la renta permanente y también con la renta anual actual. Los resultados son:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix}_{VI} = \begin{pmatrix} 0,988 \\ 0,039 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\sigma}^2_{VI}(Z'X)^{-1}Z'Z(X'Z)^{-1} = 1,3595 \times \begin{pmatrix} 1,7088 & -0,0223 \\ & 0,0003 \end{pmatrix}$$

ii) ¿Cuál es la fórmula de $\tilde{\beta}_{VI}$? ¿Y de $\tilde{\sigma}^2_{VI}$?

iii) Realiza el contraste de Hausman. Relaciona estos nuevos resultados con tu respuesta del apartado i).

PROBLEMA LE-2003.4 (Jun-2003)

Se quiere evaluar el rendimiento de la educación en términos del siguiente modelo

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 EDU_i + w_i \qquad i = 1, ..., N$$

donde Y_i y EDU_i son las ganancias salariales anuales (en decenas de miles de euros) y el nivel de educación de un individuo respectivamente. Además $E(EDU_i w_i) = 0$ para todo i y w_i es un ruido blanco.

Se dispone de una muestra de 1000 individuos. Sin embargo, se mide el nivel de educación a través de la variable observada, años de estudio, S_i, que está medida con error, tal que $S_i = EDU_i + \varepsilon_i$ donde ε_i es un ruido blanco independiente de EDU_i y de w_i.

Utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) en base a la información muestral disponible, se han obtenido los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\hat{Y}_i} = \underset{(0{,}078)}{2,431} + \underset{(0{,}0046)}{0,03332}\, S_i$$

a) Interpreta qué indica la estimación obtenida para el parámetro β_2.

b) Explica en detalle qué propiedades tendrá el estimador MCO de β_1 y β_2 si se ha utilizado la medida de educación disponible S_i en lugar de EDU_i en el modelo. Razona tu respuesta.

Disponemos de una variable adicional P_i, que mide los años de educación del padre de ese individuo i. Para la muestra de 1000 individuos se tiene la siguiente información:

$\sum_i Y_i = 2988,232$	$\sum_i S_i = 16707$	$\sum_i Y_i S_i = 50071,6$	$\sum_i S_i^2 = 283539$
$\sum_i P_i = 14343$	$\sum_i Y_i P_i = 42914,7$	$\sum_i P_i S_i = 240466$	$\sum_i P_i^2 = 206469$
$\sum_i Y_i^2 = 9028,9$			

c) Propón un estimador consistente alternativo al de MCO razonando bajo qué condiciones sería consistente y cuál será su distribución asintótica. Razona tu respuesta.

d) Calcula la estimación de β_1 y β_2 en base al estimador propuesto en el apartado anterior.

e) Si se ha utilizado un estimador consistente, ¿cómo se ha obtenido la siguiente estimación de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica del estimador propuesto en c)? Indica todos los pasos que se han realizado hasta llegar a este resultado.

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \frac{98,88}{998} \begin{bmatrix} 0,2984084 & -0,0178 \\ -0,0178 & 0,001065 \end{bmatrix}$$

f) Utilizando el estimador propuesto en el apartado c), contrasta la hipótesis de que un año adicional de educación supone un incremento medio en las ganancias salariales anuales de 720 euros. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y todos los elementos del contraste.

g) Lleva a cabo el contraste de Hausman para analizar si es o no importante el problema de error de medida. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y todos los elementos del contraste.

h) Indica de manera razonada cuál de los dos estimadores elegirías teniendo en cuenta el resultado del contraste de Hausman.

PROBLEMA LE-2003.5 (Jun-2003)

Se propone el siguiente modelo para la oferta de caña de azúcar en Bangladesh:

$$\ln(A_t) = \alpha + \beta \ln(P_t) + u_t \tag{1}$$

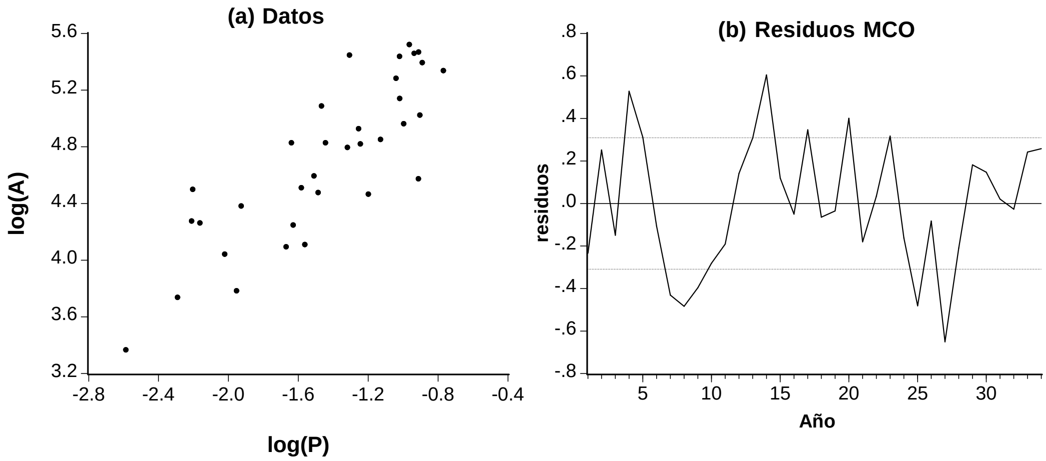
donde A es el área dedicada a la plantación de caña y P es el precio del producto en el mercado. Se dispone de 34 observaciones anuales de A y P. La estimación MCO es:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{\ln(A_t)}} = \underset{(0,17)}{6,11} + \underset{(0,11)}{0,97} \ln(P_t) \qquad R^2 = 0,706 \qquad (2)$$

Además, se han realizado los siguientes gráficos:

y las siguientes regresiones basadas en los residuos MCO, $\hat{u}$:

$$\begin{array}{rcllll}
\hat{u}_t & = & -0,02 + 0,012\ln(P_t) + 0,34\hat{u}_{t-1} & R^2 = 0,116 & SCR = 2,7 \\
\hat{u}_t & = & -0,38 + 0,01t - 0,18\ln(P_t) + 0,32\hat{u}_{t-1} & R^2 = 0,13 & SCR = 2,61 \\
\hat{e}_t^2 & = & 1,32 - 0,02t & R^2 = 0,023 & SCR = 46,48 \\
\hat{e}_t^2 & = & 5,20 - 0,1t + 1,74\ln(P_t) & R^2 = 0,10 & SCR = 42,76 \\
\hat{e}_t^2 & = & 5,74 - 0,11t + 1,87\ln(P_t) - 0,18v_{t-1} & R^2 = 0,13 & SCR = 41,21 \\
\hat{e}_t & = & -0,22 + 0,01t & R^2 = 0,001 & SCR = 378,62 \\
\hat{e}_t & = & -3,59 + 0,08t - 1,51\ln(P_t) & R^2 = 0,009 & SCR = 375,82 \\
\hat{e}_t & = & 0,51 - 0,009t + 0,17\ln(P_t) - 0,18e_{t-1} & R^2 = 0,13 & SCR = 0,33
\end{array}$$



con $\hat{e}_t = \hat{u}_t/\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}^2 = \sum_t \hat{u}_t^2/34$.

a) ¿Qué información proporciona el gráfico a) de los datos?

b) ¿Qué información proporciona el gráfico b) de los residuos?

c) Se quiere analizar si la varianza ha cambiado a lo largo del tiempo. Realiza el contraste, detallando todos los elementos, a partir de la información dada en el enunciado.

d) Contrasta si existe autocorrelación en el modelo.

Posteriormente se han obtenido las siguientes estimaciones por MCGF:

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\widehat{\ln(A_t)}} = \underset{(0,18)}{6,12} + \underset{(0,14)}{0,97} \ln(P_t) \qquad SCR = 3,052 \qquad \hat{\sigma}_t = 0,30/\sqrt{t} \qquad (3)$$

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\widehat{\ln(A_t)}} = \underset{(0,29)}{6,82} + \underset{(0,12)}{1,31} \ln(P_t) \qquad SCR = 5,620 \qquad \hat{\sigma}_t = 5,066 \times t \qquad (4)$$

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\widehat{\ln(A_t)}} = \underset{(0,24)}{6,09} + \underset{(0,16)}{0,94} \ln(P_t) \qquad SCR = 2,642 \qquad \hat{u}_t = 0,34\hat{u}_{t-1} + e_t \qquad (5)$$

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\widehat{\ln(A_t)}} = \underset{(0,25)}{6,13} + \underset{(0,17)}{0,98} \ln(P_t) \qquad SCR = 2,532 \quad \hat{u}_t = 0,36\hat{u}_{t-1} + 0,002\hat{u}_{t-2} + e_t \quad (6)$$

e) Interesa saber si la elasticidad-precio es cero. Explica cómo lo contrastarías indicando claramente el estimador que utilizas y cómo se ha obtenido. Utiliza la información anterior para realizar el contraste.

<u>PROBLEMA LE-2003.6</u> (Jun-2003)

Explica, detalladamente, en qué consiste el contraste de cambio estructural de Chow, basándote en algún ejemplo.

<u>PROBLEMA LE-2003.7</u> (Sep-2003)

Considera el siguiente modelo de regresión:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, \dots, N$$

donde X_i es no estocástica, $u_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, $E(u_i u_j) = 0$ para $i \neq j$ y σ_i^2 es una función creciente con X_i.

a) ¿Qué problema existe en el modelo anterior? ¿Cómo podría detectarse? Explica en detalle el contraste que propones.

b) ¿Qué consecuencias tiene en los contrastes de hipótesis sobre β_1 y β_2 utilizar en los estadísticos t o F el estimador $\frac{\sum_i \hat{u}_i^2}{N-2}(X'X)^{-1}$? Razona tu respuesta.

Se dispone de una muestra de 800 observaciones con la siguiente información:

$$\begin{array}{llll}
\sum_i X_i = 330 & \sum_i X_i^2 = 144 & \sum_i \frac{1}{X_i} = 2058 & \sum_i \frac{1}{X_i^2} = 5683 \\
\sum_i \frac{1}{\sqrt{X_i}} = 1273 & \sum_i Y_i = 2672 & \sum_i Y_i^2 = 9576 & \\
\sum_i X_i Y_i = 1108 & \sum_i \frac{Y_i}{X_i} = 6835 & \sum_i \frac{Y_i}{X_i^2} = 18755 & \sum_i \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = 4239 \\
\sum_i \hat{u}_i^2 = 660 & \sum_i \hat{u}_i^2 X_i^2 = 160 & \sum_i \hat{u}_i^2 X_i = 309 &
\end{array}$$

donde $\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$ son los residuos resultantes de estimar los parámetros β_1 y β_2 por mínimos cuadrados ordinarios.

c) Obtener las estimaciones de β_1 y β_2 por MCO.

d) Si se ha utilizado el estimador de White, ¿cómo se ha obtenido la siguiente estimación de la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MCO de β_1 y β_2? Indica explícitamente todos los pasos que se han realizado hasta llegar a este resultado.

$$\widehat{Var}_{WHITE}(\hat{\beta}_{MCO}) = \begin{bmatrix} 0,04 & -0,11 \\ -0,11 & 0,28 \end{bmatrix}$$

e) Utilizando las estimaciones obtenidas en el apartado c) y d), contrasta $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $H_a : \beta_2 \neq 0$.

f) Suponiendo que $\sigma_i^2 = 4X_i^2$, ¿cómo obtendrías un estimador eficiente de β_1 y β_2? Explica en detalle el procedimiento de estimación.

g) Calcula las estimaciones de β_1 y β_2 con el estimador eficiente y su matriz de varianzas y covarianzas.

h) Contrasta $H_0 : \beta_2 = 0$ frente a $H_a : \beta_2 \neq 0$ utilizando el estimador eficiente de β_2.

i) ¿Podrían dar conclusiones distintas los contrastes realizados en d) y g)? ¿Por qué?

PROBLEMA LE-2003.8 (Sep-2003)

Tenemos el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

donde se sospecha que hay autocorrelación de primer orden del tipo AR(1). Se estima el modelo por MCO y se calcula la serie de residuos, obteniéndose la siguiente información:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{u}_t$	1.5	-0.5	2.5	-3.5	1	1.5	-2.5	1	-1.5	0.5

$\sum_t \hat{u}_{t-1} = -0,5$ $\quad \sum_t \hat{u}_t\hat{u}_{t-1} = -21,25$ $\quad \sum_t \hat{u}_t^2 = 34$ $\quad \sum_t \hat{u}_t\hat{u}_{t-2} = 6$

$\sum_t \hat{u}_{t-1}\hat{u}_{t-2} = -20,5$ $\quad \sum_t \hat{u}_{t-1}^2 = 33,75$ $\quad \sum_t \hat{u}_{t-2}^2 = 31,5$

a) Analiza la posible existencia de autocorrelación en las perturbaciones utilizando un método gráfico y un contraste. Explica claramente todos los elementos del contraste.

b) Obtén una estimación del parámetro ρ del proceso AR(1), explicando en detalle cómo se obtiene.

c) Explica detalladamente cómo estimarías los parámetros del modelo utilizando la estimación obtenida del parámetro ρ. Explica razonadamente todas las propiedades del estimador propuesto.

d) Si en el modelo se hubieran incluido como regresores retardos de la variable endógena:

d.1) ¿Sería válido el contraste utilizado en el apartado a)? ¿Por qué? ¿Qué contraste sería válido?

d.2) ¿Sería fiable la estimación de ρ obtenida en el apartado b)? ¿Por qué?

d.3) ¿Cambiarías el procedimiento de estimación propuesto en el apartado c)? ¿Por qué? ¿Cómo? Explica detalladamente.

Duración: 3 horas

INSTRUCCIONES

1. El examen consta sólamente de cuestiones, que se responden sobre la hoja de codificación proporcionada.
2. Para escoger una respuesta, basta efectuar una marca **rellenando debidamente el rectángulo sobre el que está la letra escogida** en la hoja de codificación. Piénsalo antes; aunque puedes borrar si escribes con lápiz (número 2 o HB), marcas que no estén perfectamente borradas pueden ser leídas. Te aconsejamos que señales sobre el formulario de examen las respuestas que te parezcan adecuadas, y emplees los últimos diez minutos del tiempo asignado en transcribirlas a la hoja de codificación.
3. Hay siempre, en las preguntas de elección múltiple, una única respuesta correcta. Todas las cuestiones resueltas correctamente valen 1 punto mientras que las fallidas suponen una penalización de 0.25 puntos. Las preguntas no contestadas no suponen penalización.
4. Son precisos 25 puntos para superar el examen.
5. Rellena debidamente TODOS tus datos en la hoja de control, el presente cuestionario y en la hoja de codificación. En dicha hoja, en el primer bloque de la izquierda, bajo el título D.N.I/N.A.N. debes escribir tu número de DNI en las celdas vacías y marcar el dígito correspondiente en la columna de números que hay bajo cada celda.
6. El formulario de examen tiene 13 páginas numeradas correlativamente al pie (del 1.1 al 1.13) mas una página con las tablas estadísticas. Cerciórate de recibirlas todas, y reclama si tu formulario fuera incompleto.
7. Hay distintos tipos de examen. Éste es del tipo 1; marca un 1 en la columna I de tu hoja de codificación: PRESTA ESPECIAL ATENCIÓN EN RELLENAR ADECUADAMENTE EL TIPO DE EXAMEN EN LA CABECERA DE LA HOJA DE CODIFICACIÓN, BLOQUE TERCERO (ENCABEZAMIENTO CON NÚMEROS ROMANOS), BAJO LA COLUMNA MARCADA CON (I). DEBES MARCAR EL 1 YA QUE ESTE CUESTIONARIO ES DE TIPO 1.

   Los exámenes con DNI y/o tipo de examen incorrecto o ausente se considerarán SUSPENSOS.

9. Al acabar el examen has de **entregar** la hoja de codificación **y el presente cuestionario** con tus datos personales.
10. Siglas utilizadas a lo largo del examen:

MRLG:	Modelo de regresión lineal general.
MCO:	Mínimos cuadrados ordinarios.
MCG:	Mínimos cuadrados generalizados.
MCGF:	Mínimos cuadrados generalizados factibles.
VI:	Variables instrumentales.
NID:	Normal e independientemente distribuido.
iid:	Idéntica e independientemente distribuido.
SCR:	Suma de cuadrados residual.
SCE:	Suma de cuadrados explicada.

<u>CUESTIONARIO LADE-2003</u> (Jun-2003)

1. [Pregunta-regalo] La capital de España es:

   (A) París (B) Madrid (C) Bagdad (D) Sebastopol (E) Edimburgo

2. Un estimador asintóticamente insesgado:

   (A) tiene la varianza igual a cero.

   (B) es un estimador insesgado también en muestras finitas.

   (C) es un estimador asintóticamente eficiente.

   (D) es un estimador consistente.

   (E) puede ser sesgado en muestras finitas.

3. Señala cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

   (A) todo estimador consistente es insesgado.

   (B) todo estimador insesgado es consistente.

   (C) si un estimador es asintóticamente insesgado y su varianza tiende a cero cuando el tamaño muestral tiende a infinito, entonces el estimador es consistente.

   (D) todo estimador consistente es asintóticamente insesgado y su varianza tiende a cero cuando el tamaño muestral tiende a infinito.

   (E) todo falso.

Las cuestiones 4 a 6 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea el MRLG, donde se cumplen las hipótesis básicas y $\operatorname{plim} \frac{X'X}{T} = Q$ es una matriz finita e invertible, pero la perturbación **NO** sigue una distribución Normal.

4. Si $\hat{\beta}_T$ es el estimador MCO,

   (A) no es posible obtener la distribución asintótica de $\hat{\beta}_T$, ya que la perturbación no sigue una distribución normal.

   (B) aplicando los teoremas de Cramer y Mann-Wald, se obtiene:
   $\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_T - \beta\right) = \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{p} N\left(0, \sigma_u^2 Q^{-1}\right)$

   (C) aplicando los teoremas de Cramer y Mann-Wald, resulta:
   $\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_T - \beta\right) = \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_u^2 I\right)$

   (D) aplicando los teoremas de Cramer y Mann-Wald, se obtiene:
   $\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_T - \beta\right) = \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_u^2 Q^{-1}\right)$

   (E) aplicando los teoremas de Cramer y Mann-Wald, resulta:
   $\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_T - \beta\right) = \left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1} \frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{p} N\left(0, \sigma_u^2 I\right)$

5. La consistencia del estimador de MCO se puede demostrar de la siguiente manera:

(A) $\text{plim}\,\hat{\beta}_T = \beta + \underbrace{\text{plim}\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}}_{=Q^{-1}} \underbrace{\text{plim}\,\frac{X'u}{T}}_{=0} = \beta$

(B) $\text{plim}\,\hat{\beta}_T = \beta + \underbrace{\text{plim}\,\frac{X'X}{T}}_{=Q} \underbrace{\text{plim}\left(\frac{X'u}{T}\right)^{-1}}_{=0} = \beta$

(C) $\text{plim}\,\hat{\beta}_T = \beta + \underbrace{\text{plim}\,\frac{X'X}{T}}_{=Q} \underbrace{\text{plim}\,\frac{X'u}{T}}_{=0} = \beta$

(D) $\text{lím}_{T\to\infty} E(\hat{\beta}_T) = \beta \Rightarrow \text{plim}\,\hat{\beta}_T = \beta$

(E) $\text{lím}_{T\to\infty} Var(\hat{\beta}_T) = 0 \Rightarrow \text{plim}\,\hat{\beta}_T = \beta$

6. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) Como no se tiene normalidad en las perturbaciones, éstas no son esféricas y por tanto, es necesario estimar por MCG (en caso de Ω conocida) y por MCGF (en caso de Ω desconocida).

(B) Es posible estimar el modelo por MCO y realizar inferencia tanto en muestras finitas como asintóticamente.

(C) Es posible estimar el modelo por MCO y hallar la distribución asintótica del estimador, de forma que se puede realizar inferencia asintótica.

(D) No es posible estimar los coeficientes del modelo por MCO, ya que la perturbación no sigue una distribución Normal.

(E) Aunque la perturbación no siga una distribución Normal, los teoremas de Cramer y Mann-Wald permiten hallar la distribución del estimador en muestras finitas y realizar inferencia.

7. En el modelo $Y = X\,\beta + u$, con X no estocástica, las hipótesis $E(u) = 0$ y $E(u\,u') = \sigma^2\Omega$ donde Ω es una matriz no escalar conocida, implican entre otras cosas que:

(A) El estimador MCO de β es sesgado.

(B) El estimador MCO de β es lineal, insesgado y de mínima varianza entre los lineales e insesgados.

(C) La matriz de covarianzas del estimador MCO de β es $\sigma^2(X'X)^{-1}$.

(D) El estimador MCO de β es lineal e insesgado pero no es el de mínima varianza entre los lineales e insesgados.

(E) Todo falso.

Las cuestiones 8 a 10 hacen referencia al siguiente enunciado:

Considera el modelo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$ con $t = 1, \ldots, T$, siendo X_t no estocástica y $u_t \sim NID(0, b\,t^2)$ donde b es un parámetro desconocido.

8. ¿Qué método elegirías para estimar el parámetro β_1 del modelo de la forma más eficiente?

   (A) VI.

   (B) MCGF en el modelo original.

   (C) MCG en el modelo original.

   (D) MCO en el modelo original.

   (E) La media aritmética de Y_t.

9. ¿Cuál será el modelo transformado que has de utilizar para que se cumplan todas las hipótesis básicas?

   (A) $\frac{Y_t}{t} = \beta_0 \frac{1}{t} + \beta_1 \frac{X_t}{t} + \frac{u_t}{t}$

   (B) $\frac{Y_t}{t^2} = \beta_0 \frac{1}{t^2} + \beta_1 \frac{X_t}{t^2} + \frac{u_t}{t^2}$

   (C) $t\, Y_t = \beta_0\, t + \beta_1\, t\, X_t + t\, u_t$

   (D) $t^2\, Y_t = \beta_0\, t^2 + \beta_1\, t^2\, X_t + t^2\, u_t$

   (E) $\frac{Y_t}{\sqrt{t}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{t}} + \beta_1 \frac{X_t}{\sqrt{t}} + \frac{u_t}{\sqrt{t}}$

10. ¿Cuál es la varianza de la perturbación en el modelo transformado?

    (A) b^2 (B) $1/b$ (C) 1 (D) b (E) $1/b^2$

Las cuestiones 11 a 14 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ con $t = 1, \ldots, T$ donde X es fija, $u \sim N(0, \sigma^2\Omega)$ siendo Ω una matriz conocida, $\Omega \neq I$ y σ^2 un parámetro desconocido. Se estima el modelo anterior primero por MCO y se obtienen $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\hat{u}_{MCO}$, después por MCG y se obtienen $\tilde{\beta}_{MCG}$ y $\tilde{u}_{MCG}$.

11. La matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ es:

    (A) $\sigma^2(X'X)^{-1}$ (B) $\sigma^2(X'\Omega X)^{-1}$ (C) $\sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$

    (D) $\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$ (E) $\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega^{-1}X(X'X)^{-1}$

12. Los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$:

    (A) no son insesgados. (B) no son los de mínima varianza. (C) no son normales.

    (D) no son lineales. (E) no son consistentes.

13. Un estimador insesgado de σ^2 es:

    (A) $\frac{\tilde{u}'_{MCG}\Omega\, \tilde{u}_{MCG}}{T-K}$ (B) $\frac{\hat{u}'_{MCO}\, \hat{u}_{MCO}}{T-K}$ (C) $\frac{\tilde{u}'_{MCG}\tilde{u}_{MCG}}{T}$

    (D) $\frac{\tilde{u}'_{MCG}\tilde{u}_{MCG}}{T-K}$ (E) $\frac{\tilde{u}'_{MCG}\Omega^{-1}\, \tilde{u}_{MCG}}{T-K}$

14. Si se desea contrastar: $H_0 : R\beta = r$ frente a $H_a : R\beta \neq r$, el estadístico y su distribución adecuados para realizar el contraste son:

    (A) todo falso.

    (B) $\frac{(R\hat{\beta}_{MCO}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}_{MCO}-r)/q}{\hat{u}'_{MCO}\hat{u}_{MCO}/(T-K)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(q,T-K)}$

(C) $\frac{(R\hat{\beta}_{MCO}-r)'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}_{MCO}-r)/q}{\hat{u}'_{MCO}\hat{u}_{MCO}/(T-K)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(q,T-K)}$

(D) $\frac{(R\tilde{\beta}_{MCG}-r)'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta}_{MCG}-r)/q}{\tilde{u}'_{MCG}\Omega^{-1}\tilde{u}_{MCG}/(T-K)} \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_q$

(E) $\frac{(R\tilde{\beta}_{MCG}-r)'[R(X'\Omega^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta}_{MCG}-r)/q}{\tilde{u}'_{MCG}\Omega^{-1}\tilde{u}_{MCG}/(T-K)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(q,T-K)}$

15. Se tienen los datos de consumo (C) y renta disponible (R) de N familias, con los que se desea estimar el modelo $C_i = \alpha + \beta R_i + u_i$, donde $u_i \sim iid(0, \sigma^2_u)$. Las N familias se encuentran distribuidas a lo largo de J provincias, de manera que en la provincia j hay N_j familias. Para manejar menos datos, con las N_j observaciones de cada provincia $j = 1, \ldots, J$ se calculan los consumos medios, $\bar{C}_j$ y rentas medias $\bar{R}_j$ (suponemos $N_j \neq N_{j'}$ para $j \neq j'$ con $j, j' = 1 \ldots, J$). Así se estima el modelo:

$$\bar{C}_j = \alpha + \beta\bar{R}_j + \bar{u}_j \qquad j = 1, \ldots, J.$$

Entonces se cumple que:

(A) $\bar{u}_j$ siguen un proceso autorregresivo de orden 1 con coeficiente positivo.

(B) $\bar{u}_j$ siguen un proceso de medias móviles.

(C) $\bar{u}_j$ siguen un proceso autorregresivo de orden 1 con coeficiente negativo.

(D) $\bar{u}_j \sim iid(0, \sigma^2_{\bar{u}})$.

(E) $\bar{u}_j$ son heterocedásticas.

16. Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ donde $Var(u_t) = a\,Z^2_t$, siendo a un parámetro desconocido. A los estimadores de MCG de este modelo se les llama también estimadores de Mínimos Cuadrados Ponderados porque:

(A) se da más importancia a aquellas observaciones con un valor pequeño de Z^2_t.

(B) en $Var(u_t)$ la variable Z^2_t está ponderada por a.

(C) se da más importancia a aquellas observaciones con un valor grande de Z^2_t.

(D) se pondera la influencia que la variable X_t tiene en Y_t.

(E) todo falso.

17. Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X^2_{3t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 150.$$

con X_{2t} y X_{3t} no estocásticas. Para contrastar que $Var(u_t) = a\,Z^2_t$, siendo a una constante desconocida, es correcto aplicar los contrastes:

(A) no el de Goldfeld y Quandt pero sí el de Breusch y Godfrey.

(B) sí el de Goldfeld y Quandt pero no el de Breusch y Pagan.

(C) sí el de Goldfeld y Quandt y sí el de Breusch y Pagan.

(D) no el de Goldfeld y Quandt pero sí el de Durbin y Watson.

(E) sí el de Goldfeld y Quandt y sí el de Breusch y Godfrey.

18. Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t.$$

Se sospecha que en este modelo $Var(u_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \alpha_2 Z_{2t}$. Para llevar a cabo el contraste se estima el modelo por MCO, se obtienen los residuos $\hat{u}$ y con ellos se estiman las dos regresiones siguientes:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \alpha_2 Z_{2t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{\hat{u}'\hat{u}/T} = \gamma_0 + \gamma_1 Z_{1t} + \gamma_2 Z_{2t} + \epsilon_t \quad (2)$$

obteniéndose sus sumas de cuadrados explicadas $SCE_{(1)}$ y $SCE_{(2)}$ y sus sumas de cuadrados residuales $SCR_{(1)}$ y $SCR_{(2)}$ respectivamente. El estadístico para llevar a cabo el contraste y su distribución asintótica adecuada son:

(A) $SCE_{(1)}/2$ y χ^2_3 (B) $T \cdot SCR_{(1)}$ y χ^2_2 (C) $T \cdot R^2_{(2)}$ y χ^2_2

(D) $SCE_{(2)}/2$ y χ^2_2 (E) $T \cdot SCR_{(2)}$ y χ^2_3

19. ¿Cuándo es más apropiado estimar por MCO en lugar de estimar por MCG o MCGF si existe heterocedasticidad?

(A) Siempre.

(B) Nunca.

(C) Si $Var(u_t)$ es conocida.

(D) Si $Var(u_t)$ es desconocida pero estimable.

(E) Si $Var(u_t)$ es desconocida y no estimable.

Las cuestiones 20 a 24 hacen referencia al siguiente enunciado:

Un investigador desea comparar la función de consumo de la Comunidad de Madrid con la de Cataluña. Para ello plantea las siguientes ecuaciones:

$$C_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 R_{1t} + u_{1t} \quad t = 1, \ldots, T. \quad (3)$$

$$C_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 R_{2t} + u_{2t} \quad t = 1, \ldots, T. \quad (4)$$

donde:

C_1: Consumo agregado	en la C. Autónoma de Madrid.
C_2: ” ”	en la C. Autónoma de Cataluña.
R_1: Renta disponible	en la C.A. de Madrid.
R_2: ” ”	en la C.A. de Cataluña.

Considera los siguientes estimadores:

E1: MCO en cada ecuación por separado.

E2: MCO en el modelo conjunto:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

siendo C_1 un vector que contiene las T observaciones de C_{1t}, C_2 lo mismo para Cataluña, R_1 el vector de observaciones de R_{1t}, R_2 el correspondiente a R_{2t} y l un vector columna formado por T unos.

E3: El estimador de MCG del modelo conjunto (5).

E4: El estimador de MCGF, $\tilde{\beta}_{MCGF} = (X'\hat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}^{-1}Y$, del modelo conjunto (5), donde

$$\hat{\Sigma}_{E4} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2\, I & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2^2\, I \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{T-K_1}, \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\hat{u}_2'\hat{u}_2}{T-K_2}$$

siendo $\hat{u}_1$ los residuos de la estimación mediante E1 de la ecuación de Madrid y $\hat{u}_2$ los de Cataluña.

E5: El estimador de MCGF, $\tilde{\beta}_{MCGF} = (X'\hat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Sigma}^{-1}Y$, del modelo conjunto (5), donde

$$\hat{\Sigma}_{E5} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2\, I & \hat{\sigma}_{12}\, I \\ \hat{\sigma}_{12}\, I & \hat{\sigma}_2^2\, I \end{bmatrix}$$

siendo $\hat{\sigma}_1^2$ y $\hat{\sigma}_2^2$ iguales que en E4 y $\hat{\sigma}_{12} = \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_2}{T}$.

E6: MCO en el modelo conjunto:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 & R_1 \\ 0 & l & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

E7: MCGF con $\widehat{\Sigma}_{E4}$ sobre el modelo (6).

E8: MCGF con $\widehat{\Sigma}_{E5}$ sobre el modelo (6).

20. Si $u_{1t} \sim iid(0, \sigma^2)$ y $u_{2t} \sim iid(0, \sigma^2)$ son independientes, ¿cuál de los siguientes estimadores de los parámetros α_1, α_2, β_1 y β_2 presenta mejores propiedades?

(A) E8. (B) E5. (C) E1. (D) E7. (E) E6.

21. Si u_{1t} y u_{2t} son independientes, siendo ahora $u_{1t} \sim iid(0, 1)$ y $u_{2t} \sim iid(0, 2)$, ¿cuáles de los siguientes son estimadores lineales insesgados de mínima varianza?

(A) E4 y E5. (B) E5 y E8. (C) E1 y E5. (D) E4 y E7. (E) E1 y E3.

22. Si $u_{1t} \sim iid(0, \sigma_1^2)$, $u_{2t} \sim iid(0, \sigma_2^2)$ y Cov$(u_{1t}, u_{2s}) = \begin{cases} \sigma_{12} & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$ siendo σ_1^2, σ_2^2 y σ_{12} desconocidos, el investigador debería utilizar:

(A) E3. (B) E4. (C) E7. (D) E1. (E) E5.

23. Si $u_{1t} \sim NID(0, 2\,t)$ y $u_{2t} \sim NID(0, 7\,t)$ son independientes entre sí, ¿cuál de los siguientes estimadores tiene mejores propiedades?

(A) E1. (B) E3. (C) E4. (D) E5. (E) E2.

24. Si $u_{1t} \sim iid(0, \sigma_1^2)$, $u_{2t} \sim iid(0, \sigma_2^2)$, Cov$(u_{1t}, u_{2s}) = 0\, \forall t, s$, $\beta_1 = \beta_2$ y σ_1^2, σ_2^2 son desconocidos, ¿cuál de los siguientes estimadores tiene mejores propiedades?

(A) E1. (B) E3. (C) E2. (D) E6. (E) E7.

Las cuestiones 25 y 26 hacen referencia al siguiente enunciado:
Al estimar $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ con $T = 4$ por MCO, se ha obtenido $\hat{u}_1 = -4$, $\hat{u}_2 = 2$, $\hat{u}_3 = -4$ y $\hat{u}_4 = 6$.

25. El valor del estadístico DW es:

   (A) 0 (B) 2,39 (C) 0,14 (D) 3,07 (E) 4,78

26. Si u_t sigue un modelo AR(1): $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\hat{\rho}$ es:

   (A) $-0{,}194$ (B) -4 (C) -1 (D) $-1{,}11$ (E) $-0{,}375$

27. Sea el modelo: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ con $t = 1, \ldots, 10$, donde se sospecha que hay autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones ($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $|\rho| < 1$). Para contrastar dicha hipótesis, se estima el modelo por MCO, se calcula la serie de residuos y se obtiene el estadístico de Durbin-Watson, DW. Al realizar el contraste de $\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \rho = 0 \\ H_a: & \rho < 0 \end{array} \right.$ al nivel de significación del 5 % ¿cuál de los siguientes resultados sería correcto?

   (A) $2 < DW < 4 - d_s = 2{,}36 \Rightarrow$ Rechazamos la hipótesis nula.

   (B) $4 - d_i = 3{,}30 < DW \Rightarrow$ No rechazamos la hipótesis nula.

   (C) $4 - d_s = 2{,}68 < DW < 4 - d_i = 3{,}12 \Rightarrow$ No rechazamos la hipótesis nula.

   (D) $4 - d_i = 3{,}12 < DW \Rightarrow$ Rechazamos la hipótesis nula.

   (E) todo falso.

28. Sea el modelo: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t$ con $t = 1, \ldots, 100$, en el que, al realizar un contraste, se ha rechazado la hipótesis de ausencia de autocorrelación de tipo AR(1) en las perturbaciones ($u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $|\rho| < 1$). Estimaríamos los coeficientes del modelo de la siguiente manera:

   (A) Estimaríamos por MCG, ya que podemos aproximar ρ por medio del estadístico DW. Este estimador no sería lineal ni insesgado pero sí sería consistente.

   (B) Estimaríamos por MCG, ya que podemos aproximar ρ por medio del estadístico DW. Así, obtenemos las propiedades de linealidad, insesgadez, varianza mínima y consistencia.

   (C) Dado que ρ es desconocido, estimaríamos por MCGF obteniendo un estimador lineal, insesgado, con varianza mínima y consistente (por ejemplo, mediante el método iterativo de Cochrane-Orcutt o el método de la red de búsqueda de Hildreth-Lu).

   (D) Dado que ρ es desconocido, estimaríamos por MCGF obteniendo un estimador consistente (por ejemplo, mediante el método iterativo de Cochrane-Orcutt o el método de la red de búsqueda de Hildreth-Lu).

   (E) El método de estimación adecuado sería MCO, ya que tenemos perturbaciones esféricas. Este estimador será lineal, insesgado, con varianza mínima y consistente.

29. Considérense los estimadores MCO, MCG y MCGF de los coeficientes del modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ con X_t no estocástica y $u_t \sim$ AR(1). Siempre es cierto que:

   (A) $\hat{\beta}_2^{MCO} < \hat{\beta}_2^{MCG}$ (B) $Var(\hat{\beta}_2^{MCO}) \geq Var(\hat{\beta}_2^{MCGF})$ (C) $\hat{\beta}_2^{MCO} \geq \hat{\beta}_2^{MCG}$

   (D) $\hat{\sigma}_{MCO}^2 \geq \tilde{\sigma}_{MCG}^2$ (E) $Var(\hat{\beta}_1^{MCO}) \geq Var(\hat{\beta}_1^{MCG})$

30. Lo que aparece en las siguientes opciones son resultados de regresiones auxiliares hechas tras estimar por MCO el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$ con $T = 62$. ¿A partir de cuál de ellas se puede concluir que existe autocorrelación de primer orden en las perturbaciones con un nivel de significación del 5 %?

(A) $\hat{u}_t = 0{,}4\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_t \quad SCR = 78 \quad SCE = 12$

(B) $\hat{u}_t = 8 - 3X_t + 0{,}1Z_t + 0{,}3\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_t \quad SCR = 80 \quad SCE = 10$

(C) $\frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}^2} = 8 - 5{,}2X_t + Z_t + 0{,}4\frac{\hat{u}_{t-1}}{\hat{\sigma}^2} + \hat{v}_t \quad SCR = 85 \quad SCE = 20$

(D) $\frac{\hat{u}_t^2}{\hat{\sigma}^2} = 10 - 2X_t + 0{,}2Z_t + \hat{v}_t \quad SCR = 100 \quad SCE = 30$

(E) $\hat{u}_t = 8 - 2{,}5X_t + 0{,}2Z_t + 0{,}3\hat{u}_{t-1} + \hat{v}_t \quad SCR = 85 \quad SCE = 5$

31. Sea $Y = X\beta + u$ con $u_t \sim MA(1)$ [es decir, $u_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ con $\epsilon \sim (0, \sigma_\epsilon^2\, I)$] y $T = 4$. El número de elementos de $E(uu')$ distintos de cero es:

    (A) 4 (B) 16 (C) 12 (D) 10 (E) 6

32. Sea $Y = X\beta + u$ con $u_t \sim AR(1)$ [es decir, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$ con $\epsilon \sim (0, \sigma_\epsilon^2\, I)$ y $|\rho| < 1$] y $T = 4$. El número de elementos de $E(uu')$ distintos de cero es:

    (A) 16 (B) 12 (C) 6 (D) 4 (E) 10

33. Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, con $u_t = -0{,}5u_{t-1} + \varepsilon_t$ y $\varepsilon_t \sim iid(0, 4)$. El coeficiente de autocorrelación entre u_t y u_{t-2}, ρ_2, es:

    (A) 2 (B) -2 (C) 0.25 (D) -0.25 (E) 0

Las cuestiones 34 a 37 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \ldots, T \quad u \sim (0, \sigma_u^2\, I) \tag{7}$$

donde X_{2t} es una variable no estocástica, X_{3t} es una variable estocástica y $\operatorname{plim} \frac{X'X}{T} = Q$ finita e invertible.

34. En el modelo (7):

    (A) $\hat{\beta}_{MCO}$ no es lineal porque X_{2t} es una variable no estocástica.

    (B) $\hat{\beta}_{MCO}$ no es lineal porque X_{3t} es una variable estocástica.

    (C) $\hat{\beta}_{MCO}$ es un estimador lineal si $E(X_{3t}) = 0 \quad \forall t$.

    (D) $\hat{\beta}_{MCO}$ es un estimador lineal ya que $E(u_t) = 0 \quad \forall t$.

    (E) $\hat{\beta}_{MCO}$ no es lineal porque u_t es una variable estocástica.

35. En el modelo (7), si X_{3t} es dependiente de u_t pero incorrelacionada contemporáneamente con ella:

    (A) El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ es no lineal, generalmente sesgado e inconsistente.

    (B) El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ es lineal, sesgado e inconsistente.

    (C) El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ es lineal, insesgado y consistente.

    (D) El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ es no lineal, insesgado y consistente.

    (E) El estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ es no lineal, generalmente sesgado y consistente.

36. En el modelo (7), si X_{3t} es independiente de u_t:

(A) Para contrastar la $H_0 : \beta_3 = 0$ basta con utilizar la distribución en muestras finitas del estimador MCO.

(B) Aunque se cumple el teorema de Mann y Wald, no podemos obtener la distribución asintótica de $\hat{\beta}_{MCO}$ porque no conocemos la distribución de u_t.

(C) Dado que se cumple el teorema de Mann y Wald, podemos obtener la distribución asintótica de $\hat{\beta}_{MCO}$ y hacer inferencia en el límite.

(D) No podemos hacer inferencia ya que no conocemos la distribución de u_t.

(E) Todo falso.

37. En el modelo (7), si queremos contrastar la hipótesis nula $E(X_{3t}u_t) = 0$ contra la alternativa $E(X_{3t}u_t) \neq 0$, podremos utilizar para ello el estadístico:

(A) $\frac{(\hat{\beta}_{3,MCO}-\hat{\beta}_{3,VI})^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_{3,VI})-\widehat{Var}(\hat{\beta}_{3,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_{(1)}$

(B) $\frac{\hat{\beta}_{3,MCO}-\hat{\beta}_{3,VI}}{\widehat{Desv}(\hat{\beta}_{3,VI})-\widehat{Desv}(\hat{\beta}_{3,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} N(0,1)$

(C) $\frac{(\hat{\beta}_{3,MCO}-\hat{\beta}_{3,VI})^2}{\widehat{Var}(\hat{\beta}_{3,VI})-\widehat{Var}(\hat{\beta}_{3,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} N(0,1)$

(D) $\frac{\hat{\beta}_{3,MCO}-\hat{\beta}_{3,VI}}{\widehat{Desv}(\hat{\beta}_{3,VI})-\widehat{Desv}(\hat{\beta}_{3,MCO})} \overset{H_0}{\sim} t_{(T-3)}$

(E) $\frac{\hat{\beta}_{3,MCO}-\hat{\beta}_{3,VI}}{\widehat{Desv}(\hat{\beta}_{3,VI})-\widehat{Desv}(\hat{\beta}_{3,MCO})} \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_{(1)}$

38. Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \ldots, T \quad \text{con} \quad u \sim (0, \sigma_u^2\, I)$$

donde X_{2t} y X_{3t} son variables no estocásticas inobservables. Únicamente se dispone de los valores de las variables explicativas medidos con error. En este caso, en el modelo estimable,

(A) los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ son siempre eficientes.

(B) los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ son inconsistentes y un método de estimación apropiado es Variables Instrumentales.

(C) los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ son inconsistentes y por tanto debemos estimar por MCG.

(D) los estimadores $\hat{\beta}_{MCO}$ son siempre consistentes.

(E) que los regresores estén medidos con error no crea problemas ni de eficiencia ni de consistencia en el estimador MCO.

Las cuestiones 39 a 41 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea el modelo: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad \text{donde} \quad u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_t es no estocástica.

39. Si Y_t es una variable aleatoria no observable y se relaciona con la variable observable $Y_t^\star$ tal que $Y_t^\star = Y_t + \epsilon_t$ donde $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$ y ϵ_t es independiente de u_t, el modelo estimable es $Y_t^\star = \alpha + \beta X_t + v_t$ con

(A) $v_t \sim iid(0, \sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2 + 2\sigma_{u\epsilon})$ y $\sigma_{u\epsilon} \neq 0$.

(B) $v_t \sim iid(0, \sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2)$.

(C) $v_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$.

(D) $v_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$.

(E) $v_t \sim iid(0, 1)$.

40. Si Y_t es una variable aleatoria no observable y se relaciona con la variable observable $Y_t^\star$ tal que $Y_t^\star = Y_t + \epsilon_t$ donde $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$ y $Cov(\epsilon_t, u_t) = 0$,

(A) Si Y_t no es observable debemos estimar los parámetros α y β por Variables Instrumentales.

(B) Si Y_t no es observable no podemos estimar los parámetros α y β de ninguna forma.

(C) Dadas las propiedades de la perturbación del modelo estimable debemos estimar por MCGF que será consistente y asintóticamente eficiente.

(D) Dadas las propiedades de la perturbación del modelo estimable debemos estimar por MCO que será consistente y asintóticamente eficiente.

(E) Todo falso.

41. Si X_t es una variable no observable tal que disponemos de la variable observable $X_t^\star = X_t + \varepsilon_t$ donde X_t es fija, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ y $Cov(u_t, \varepsilon_t) = Cov(u_s, \varepsilon_t) = 0 \ \forall t, s$,

(A) plim $\hat{\beta}_{MCO} = \beta - \frac{\beta\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ (B) plim $\hat{\beta}_{MCO} = -\frac{\beta\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ (C) plim $\hat{\beta}_{MCO} = \beta - \frac{\beta(\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{\sigma_x^2}$

(D) plim $\hat{\beta}_{MCO} = -\frac{\beta(\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{\sigma_x^2}$ (E) plim $\hat{\beta}_{MCO} = \beta$

Las cuestiones 42 y 43 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea el modelo $R_t = \alpha + \beta_0 M_t + \beta_1 M_{t-1} + \beta_2 M_{t-2} + \beta_3 M_{t-3} + u_t$ con $u \sim (0, \sigma_u^2 I)$ donde R_t es el tipo de interés, M_t es la oferta monetaria, que consideramos estocástica, y las observaciones son datos temporales trimestrales para un determinado país.

42. Señala cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) si M_t está autocorrelacionada, esto puede causar un alto grado de multicolinealidad en este modelo, haciendo que los valores estimados de los coeficientes β_j no sean muy fiables.

(B) si $E(M_{t-j}u_t) \neq 0$ para algún j entre 0 y 3, se cumplen las condiciones del Teorema de Mann y Wald, y por tanto, los estimadores de MCO son consistentes.

(C) si $E(M_{t-j}u_t) \neq 0$ para algún j entre 0 y 3, lo mejor sería estimar por MCG.

(D) si M_t está autocorrelacionada, los estimadores MCO serán siempre inconsistentes.

(E) todo falso.

43. Se ha calculado el estadístico de Hausman (H) para las cuatro variables explicativas, entonces:

(A) si $H > 9{,}49$, al nivel de significación del 5 % concluiríamos que los estimadores MCO son consistentes.

(B) si $H > 9{,}49$, al nivel de significación del 5 % concluiríamos que los estimadores MCO son inconsistentes.

(C) si $H > 11{,}07$, al nivel de significación del 5 % concluiríamos que los estimadores MCO son consistentes.

(D) si $H > 11{,}07$, al nivel de significación del 5 % concluiríamos que las perturbaciones están autocorrelacionadas y, por tanto, habrá que estimar el modelo por MCGF.

(E) si $H > 9{,}49$, al nivel de significación del 5 % concluiríamos que las perturbaciones están autocorrelacionadas y, por tanto, habrá que estimar el modelo por MCGF.

44. Sea el siguiente modelo dinámico $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$, donde X_t es no estocástica, $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ y $\varepsilon \sim (0, \sigma^2_\varepsilon I)$. Señala cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

(A) todo falso.

(B) dado que $E(Y_{t-1}u_t) \neq 0$, lo más adecuado es estimar por MCO el modelo: $Y_{t-1} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{t-1} + \alpha_3 Y_{t-2} + \epsilon_t$ y utilizar $\hat{Y}_{t-1}$ como instrumento de Y_{t-1} para estimar el modelo por Variables Instrumentales.

(C) dado que $E(Y_{t-1}u_t) \neq 0$, a la hora de estimar el modelo por Variables Instrumentales, Y_{t-2} es un buen instrumento para Y_{t-1}.

(D) dado que $E(Y_{t-1}u_t) \neq 0$, a la hora de estimar el modelo por Variables Instrumentales, X_{t-1} es un buen instrumento para Y_{t-1}.

(E) dado que $E(Y_{t-1}u_t) = 0$, los estimadores MCO son consistentes.

Las cuestiones 45 y 46 hacen referencia al siguiente enunciado:

En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$ con X_t no estocástica, se ha realizado el contraste de Breusch-Godfrey para autocorrelación de orden uno y la conclusión ha sido rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 5 %.

45. Utilizando la variable X_{t-1} como instrumento para Y_{t-1} y estimando el modelo por Variables Instrumentales, se conseguirían estimadores:

(A) consistentes y asintóticamente eficientes.

(B) consistentes y asintóticamente no eficientes.

(C) inconsistentes y asintóticamente eficientes.

(D) inconsistentes y asintóticamente no eficientes.

(E) todo falso.

46. Para contrastar restricciones lineales en los parámetros, señala a partir de cuál de las cinco distribuciones asintóticas siguientes se pueden construir estadísticos de contraste válidos:

(A) $\sqrt{T}(\widehat{\beta}_{MCO} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 A^{-1})$ donde $\text{plim}\, (\frac{1}{T}X'X)^{-1} = A^{-1}$

(B) $\sqrt{T}(\widehat{\beta}_{VI}-\beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q_{zx}^{-1} Q_{zz} (Q_{zx}^{-1})')$ donde $\text{plim}(\frac{1}{T}Z'X) = Q_{zx}$ y donde $\text{plim}(\frac{1}{T}Z'Z) = Q_{zz}$

(C) $\sqrt{T}(\tilde{\beta}_{MCGF} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$ donde $\text{plim}\,(\frac{1}{T}X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1} = Q^{-1}$ y donde $\hat{\Omega}$ se obtiene usando $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=3}^{T} \hat{u}_t^{VI} \hat{u}_{t-1}^{VI}}{\sum_{t=3}^{T} (\hat{u}_{t-1}^{VI})^2}$

(D) $\sqrt{T}(\tilde{\beta}_{MCGF} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$ donde $\text{plim}\,(\frac{1}{T}X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1} = Q^{-1}$ y donde $\hat{\Omega}$ se obtiene usando $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=3}^{T} \hat{u}_t^{MCO} \hat{u}_{t-1}^{MCO}}{\sum_{t=3}^{T} (\hat{u}_{t-1}^{MCO})^2}$

(E) $\sqrt{T}(\tilde{\beta}_{MCG} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 B^{-1})$ donde $\text{plim}\,(\frac{1}{T}X'\Omega^{-1}X)^{-1} = B^{-1}$

47. Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ donde $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y X_{3t} es una variable estocástica correlacionada contemporáneamente con u_t. Sea Z_t un instrumento válido para X_{3t}. Se tiene la siguiente información muestral:

$$(Z'X)^{-1} = \frac{1}{2734} \begin{bmatrix} 4245 & -790 & -497 \\ -347 & 100 & 11 \\ -649 & 124 & 123 \end{bmatrix}; \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{2552} \begin{bmatrix} 4939 & -924 & -649 \\ -924 & 208 & 124 \\ -649 & 124 & 123 \end{bmatrix};$$

$$(Z'Z)^{-1} = \frac{1}{3014} \begin{bmatrix} 3797 & -363 & -497 \\ -363 & 99 & 11 \\ -497 & 11 & 123 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \sum_{t=1}^5 Y_t = 10 & \sum_{t=1}^5 Y_t X_{2t} = 63 & \sum_{t=1}^5 Z_t = 15 \\ \sum_{t=1}^5 Y_t Z_t = 33 & \sum_{t=1}^5 X_{3t}^2 = 68 & \sum_{t=1}^5 X_{3t} Y_t = -14 \end{matrix}$$

La estimación de β_3 por Variables Instrumentales es:

(A) $-0{,}156$ (B) $2{,}108$ (C) $-0{,}146$ (D) $-0{,}072$ (E) $1{,}968$

48. Un investigador desea estudiar la relación entre las funciones de producción de dos industrias, una de ellas, A, del sector servicios y la otra, B, del sector primario. Para ello plantea el sistema

$$P_t^A = \beta_1^A + \beta_2^A L_t^A + u_t^A \tag{8}$$
$$P_t^B = \beta_1^B + \beta_2^B L_t^B + \beta_3^B K_t^B + u_t^B \tag{9}$$

donde $t = 1, \ldots, T$. P^A y P^B son las producciones anuales de cada industria, L^A y L^B son los números de trabajadores de cada industria y K^B es el capital fijo de la industria B (todas las variables están en logaritmos). Se suponen $u_t^A \sim NID(0, \sigma_A^2)$ y $u_t^B \sim NID(0, \sigma_B^2)$ independientes entre sí. Considera los dos modelos conjuntos:

$$\begin{bmatrix} P^A \\ P^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & L^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & L^B & K^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^A \\ \beta_2^A \\ \beta_1^B \\ \beta_2^B \\ \beta_3^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^A \\ u^B \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} P^A \\ P^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 & L^A & 0 \\ 0 & l & L^B & K^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^A \\ \beta_1^B \\ \beta_2 \\ \beta_3^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^A \\ u^B \end{bmatrix} \tag{11}$$

y el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de $\begin{bmatrix} u^A \\ u^B \end{bmatrix}$:

$$\widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_A^2 I & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_B^2 I \end{bmatrix}; \quad \hat{\sigma}_A^2 = \frac{\hat{u}^{A\prime}\hat{u}^A}{T - K_A}, \quad \hat{\sigma}_B^2 = \frac{\hat{u}^{B\prime}\hat{u}^B}{T - K_B} \tag{12}$$

siendo $\hat{u}^A$ los residuos de la estimación mediante MCO de la ecuación (8) y $\hat{u}^B$ los de (9).

Si se desea contrastar la hipótesis de rendimientos constantes a escala ($\beta_2^B + \beta_3^B = 1$) en la empresa B, especificando adecuadamente la matriz R y el vector r, ¿en qué modelo, qué estimador y qué estadístico utilizarías?

(A) Modelo (10), estimador MCGF utilizando para ello el estimador de Σ dado por (12), y estadístico

$$(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'\widehat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r) \overset{d,H_0}{\to} N(0,1)$$

(B) Modelo (11), estimador MCGF utilizando para ello (12), y estadístico

$$(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'\widehat{\Sigma}^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r) \overset{d,H_0}{\to} \chi^2_{(1)}$$

(C) Modelo (11), estimador MCO y estadístico

$$\frac{(R\hat{\beta}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)}{\hat{u}'\hat{u}/(T-K)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(1,2T-K)}$$

(D) Modelo (9) (sólo segunda ecuación), estimador MCO, y estadístico

$$\frac{(R\hat{\beta}^B-r)'[R(X_B'X_B)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}^B-r)}{\hat{u}^{B\prime}\hat{u}^B/(T-K_B)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(1,T-K_B)}$$

(E) Todo falso.

49. La relación entre consumo y renta para dos países, A y B es:

$$\begin{cases} C_t^A = \beta^A Y_t^A + u_t^A & t = 1, \ldots, 40 \quad u_t^A \sim NID(0, \sigma_u^2) \\ C_t^B = \beta^B Y_t^B + u_t^B & t = 1, \ldots, 40 \quad u_t^B \sim NID(0, \sigma_u^2) \end{cases}$$

u^A y u^B son independientes. Se ha estimado por MCO el modelo $C_t = \beta Y_t + u_t$ con todos los datos de los dos países, obteniéndose los residuos $\hat{u}_{R,t} = C_t - \hat{\beta} Y_t$ siendo $t = 1, \ldots, 80$. Si se desea contrastar la hipótesis nula $\mathrm{H}_0 : \beta^A = \beta^B$, puede utilizarse el estadístico (y la distribución):

(A) $\frac{\hat{\beta}^A - \hat{\beta}^B}{(\hat{u}'^A\hat{u}^A + \hat{u}'^B\hat{u}^B)/(80-2)} \overset{H_0}{\sim} t_{(80-2)}$

(B) $\frac{(\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'^A\hat{u}^A - \hat{u}'^B\hat{u}^B)/2}{(\hat{u}'^A\hat{u}^A + \hat{u}'^B\hat{u}^B)/(80-2)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(2,78)}$

(C) $\frac{(\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'^A\hat{u}^A - \hat{u}'^B\hat{u}^B)}{(\hat{u}'^A\hat{u}^A + \hat{u}'^B\hat{u}^B)/(80-2)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(1,78)}$

(D) $\frac{(\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'^A\hat{u}^A - \hat{u}'^B\hat{u}^B)/2}{\hat{u}_R'\hat{u}_R/(80-2)} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{(2,78)}$

(E) $\frac{\hat{\beta}^A - \hat{\beta}^B}{\hat{u}_R'\hat{u}_R/(80-2)} \overset{H_0}{\sim} t_{(80-1)}$

50. La relación entre ventas y beneficios para dos empresas, A y B es:

$$\begin{cases} B_t^A = \alpha^A + \beta^A V_t^A + u_t^A & t = 1, \ldots, 50 \quad\quad u_t^A \sim iid(0, \sigma_A^2) \\ B_t^B = \alpha^B + \beta^B V_t^B + u_t^B & t = 1, \ldots, 100 \quad u_t^B \sim iid(0, \sigma_B^2) \end{cases}$$

u^A y u^B son independientes, $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ y $\hat{\beta} = \left[\hat{\alpha}^A \; \hat{\beta}^A \; \hat{\alpha}^B \; \hat{\beta}^B\right]'$ es el estimador de MCO. Se quiere contrastar $\mathrm{H}_0 : \alpha^A = \alpha^B$, $\beta^A = \beta^B$ y se definen

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_A^2 I_{50} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_B^2 I_{100} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\hat{u}_A'\hat{u}_A}{50-2}, \quad \hat{\sigma}_B^2 = \frac{\hat{u}_B'\hat{u}_B}{100-2}, \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}_A'\hat{u}_A + \hat{u}_B'\hat{u}_B}{150-4}.$$

Bajo H_0, di qué opción es cierta.

(A) $(R\hat{\beta} - r)'[R\,(X'X)^{-1}X'\hat{\Sigma}X(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/2 \sim \mathcal{F}_{2,146}$

(B) $(R\hat{\beta} - r)'[R\,\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) \xrightarrow{d} \chi_2^2$

(C) $(R\hat{\beta} - r)'[R\,\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/2 \sim \mathcal{F}_{2,146}$

(D) Con el estimador MCO no se pueden hacer contrastes en este modelo.

(E) $(R\hat{\beta} - r)'[R\,(X'X)^{-1}X'\hat{\Sigma}X(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) \xrightarrow{d} \chi_2^2$

<u>CUESTIONARIO LADE-2003</u> (Sep-2003)

1. [Pregunta-regalo] La capital de España es:

   (A) París (B) Madrid (C) Bagdad (D) Sebastopol (E) Edimburgo

2. Un estimador, $\hat{\theta}_T$, de un parámetro θ, se dice que es consistente si:

   (A) $\text{plim}\,(\hat{\theta}_T) = 0$.

   (B) converge en probabilidad a θ.

   (C) converge en distribución a θ y así nos permite realizar inferencia asintótica.

   (D) tiene varianza asintótica igual a cero.

   (E) es asintóticamente insesgado y tiene varianza mínima.

3. Las siguientes condiciones son **NECESARIAS** para poder aplicar el teorema de Mann y Wald:

   (A) X estocástica y $E(u_t^2) = \sigma_u^2 \quad \forall t$.

   (B) X fija y $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall t \neq s$.

   (C) X estocástica y $E(u_t u_s) = 0 \quad \forall t \neq s$.

   (D) X fija y $u_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_u^2)$.

   (E) $\text{plim}\,\frac{1}{T} X'X = Q$, finita y no singular, y $E(u_t) = 0 \quad \forall t$.

4. Si se cumplen las condiciones del teorema de Mann-Wald tenemos los siguientes resultados:

   (A) $E(X_{it}u_t) = 0$ y plim $\frac{X'X}{T} = Q < \infty$

   (B) plim$\frac{X'u}{\sqrt{T}} = 0$ y $\frac{X'u}{T} \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_u^2 Q^{-1}\right)$

   (C) plim$\frac{X'u}{T} = 0$ y $\frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_u^2 Q^{-1}\right)$

   (D) plim$\frac{X'u}{T} = 0$ y $\frac{X'u}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma_u^2 Q\right)$

   (E) $A_T\, z_T \xrightarrow{d} Az$

5. Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, donde se cumplen las hipótesis básicas y la perturbación **NO** sigue una distribución normal. Después de estimar el modelo por MCO y hallar $\hat{\sigma}_u^2$, contrastamos la significatividad de la variable explicativa con el siguiente estadístico y distribución asociada:

   (A) $\frac{\hat{\beta}}{des(\hat{\beta})} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

   (B) $\frac{\hat{\beta}}{\widehat{des}(\hat{\beta})} \overset{H_0}{\sim} t_{T-K}$

   (C) $\frac{\hat{\beta}}{\widehat{des}(\hat{\beta})} \overset{d,H_0}{\rightarrow} N(0,1)$

   (D) $\frac{\hat{\beta}}{\widehat{var}(\hat{\beta})} \overset{H_0}{\sim} \chi_1^2$

   (E) $\frac{\hat{\beta}}{\widehat{var}(\hat{\beta})} \overset{d,H_0}{\rightarrow} N(0,1)$

Las cuestiones 6 y 7 hacen referencia al siguiente enunciado:
Consideramos el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t$, donde se cumplen todas las hipótesis básicas. Definimos el estimador:

$$\beta^\star = \hat{\beta}_{MCO} + \frac{1}{T}C$$

donde C es una constante finita (que no depende del tamaño de muestra, T).

6. El estimador $\beta^\star$ es:

   (A) sesgado en muestras finitas y sesgado asintóticamente.

   (B) insesgado en muestras finitas y sesgado asintóticamente.

   (C) sesgado en muestras finitas pero insesgado asintóticamente.

   (D) insesgado en muestras finitas e insesgado asintóticamente.

   (E) todo falso.

7. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

   (A) $\hat{\beta}_{MCO}$ es consistente pero $\beta^\star$ es inconsistente.

   (B) $\hat{\beta}_{MCO}$ es inconsistente pero $\beta^\star$ es consistente.

   (C) $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\beta^\star$ son inconsistentes.

   (D) $\hat{\beta}_{MCO}$ y $\beta^\star$ son consistentes.

   (E) todo falso.

Las cuestiones 8 a 10 hacen referencia al siguiente enunciado:
Sea el modelo $Y_t = \beta X_t + u_t \quad t = 1, 2, 3$. Se dispone de los siguientes datos:

Y_t	X_t
1	0
1	1
2	2

$$Var(u) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad Var(u)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

8. En $Y_t^\star = \beta X_t^\star + u_t^\star \quad t = 1, 2, 3$ tal que $u_t^\star$ son esféricas, la Cov$(u_1^\star, u_3^\star)$ es:

   (A) 4 (B) 0,25 (C) 1 (D) 0 (E) -0,25

9. La estimación MCG de β es:

   (A) 1 (B) 0,6 (C) 1,667 (D) 4 (E) 0,15

10. La varianza del estimador MCG de β es:

    (A) $\frac{\tilde{\sigma}^2}{1{,}25}$ (B) $\frac{\tilde{\sigma}^2}{0{,}75}$ (C) $\frac{1}{0{,}75}$ (D) $\frac{\tilde{\sigma}^2}{3-1}$ (E) $\frac{1}{1{,}25}$

Las cuestiones 11 y 12 hacen referencia al siguiente enunciado:
Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$ donde X_{2t}, X_{3t} y X_{4t} son regresores no estocásticos y $u \sim N(0, \Sigma)$ con Σ conocida.

11. Para estimar por MCG podemos hacer:
    1. $\tilde{\beta} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}(X'\Sigma^{-1}Y)$
    2. Estimar por MCO el modelo $P^{-1}Y = P^{-1}X\beta + P^{-1}u$ donde $PP' = \Sigma$

    (A) Ambos métodos de estimación son distintos.

    (B) Ambos métodos son dos expresiones del mismo estimador.

    (C) El primer método nos permite obtener estimadores con menor varianza que el segundo.

    (D) Ambos métodos de estimación son iguales si y sólo si $\Sigma = I$.

    (E) Todo falso.

12. Para contrastar $H_0 : R\beta = r$, se debe utilizar el estadístico y la distribución:

    (A) $(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r) \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{q,T-K}$

    (B) $(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_q$

    (C) $(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}R']^{-1}(R\tilde{\beta} - r) \overset{H_0}{\sim} \mathcal{F}_{q,T-K}$

    (D) $(R\tilde{\beta} - r)'[R(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}R'](R\tilde{\beta} - r) \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_q$

    (E) todo falso

13. Sea un modelo de regresión lineal general $Y = X\beta + u$, donde $E(uu') = \sigma^2\Omega$ y Ω es conocida. Señala cuál de las siguientes afirmaciones es correcta: ($\hat{u} = \hat{u}_{MCO}$)

    (A) se puede estimar β por MCO pero $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-k}$ es sesgado e inconsistente.

    (B) se puede estimar β por MCO y como Ω es conocida $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\Omega^{-1}\hat{u}}{T-k}$ es insesgado.

    (C) no se puede estimar β por MCO aunque $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-k}$ es consistente.

    (D) no se puede estimar β por MCO porque la varianza $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-k}$ no es mínima.

    (E) todo falso.

Las cuestiones 14 y 15 hacen referencia al siguiente enunciado:
En el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde X_{2t}, X_{3t} son regresores no estocásticos, $X_{2t} > 0 \quad \forall t$ y $u_t \sim N(0, \sigma^2 X_{2t}^2)$ con σ^2 desconocida.

14. El criterio para obtener los estimadores de mínimos cuadrados ponderados es:

    (A) $\text{Min}_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{T} (\frac{Y_t}{X_{2t}} - \hat{\beta}_1 \frac{1}{X_{2t}} - \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 \frac{X_{3t}}{X_{2t}})^2$

    (B) $\text{Min}_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{T} (Y_t X_{2t} - \hat{\beta}_1 X_{2t} - \hat{\beta}_2 X_{2t}^2 - \hat{\beta}_3 X_{3t} X_{2t})^2$

    (C) $\text{Min}_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t}^2 - \hat{\beta}_3 X_{3t})^2$

    (D) $\text{Min}_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2t} - \hat{\beta}_3 X_{3t})^2$

    (E) $\text{Min}_{\hat{\beta}} \sum_{t=1}^{T} (\frac{Y_t}{X_{2t}^2} - \hat{\beta}_1 \frac{1}{X_{2t}^2} - \hat{\beta}_2 \frac{X_{2t}}{X_{2t}^2} - \hat{\beta}_3 \frac{X_{3t}}{X_{2t}^2})^2$

15. Para contrastar $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 0$ contra $H_a : \beta_2 + \beta_3 \neq 0$ utilizamos los estimadores de mínimos cuadrados ponderados, $\hat{\beta}$, y el estadístico:

    (A) $\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_2)+\widehat{desv}(\hat{\beta}_3)} \overset{H_0}{\sim} t_{(T-3)}$

    (B) $\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_2)+\widehat{desv}(\hat{\beta}_3)+2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3)} \overset{H_0}{\sim} t_{(T-3)}$

    (C) $\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_2)+\widehat{desv}(\hat{\beta}_3)} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

    (D) $\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3}{\widehat{desv}(\hat{\beta}_2)+\widehat{desv}(\hat{\beta}_3)+2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3)} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

    (E) $\frac{\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3}{\sqrt{\widehat{var}(\hat{\beta}_2)+\widehat{var}(\hat{\beta}_3)+2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3)}} \overset{H_0}{\sim} t_{(T-3)}$

16. Sea el modelo $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \quad i = 1, \ldots, N$, con X_{2i} y X_{3i} regresores no estocásticos, $u_i \sim (0, \sigma^2(X_{2i} + X_{3i}))\, \forall i$ y u_i, u_j independientes $\forall i \neq j$. Entonces:

    (A) dado que la varianza de la perturbación depende de X_{2i} y X_{3i}, $E(X_{2i}u_i) \neq 0$ y $E(X_{3i}u_i) \neq 0$.

    (B) dado que tenemos perturbaciones no esféricas y Ω es conocida, estimaríamos el modelo por MCG, obteniendo un estimador lineal, insesgado, de varianza mínima y consistente.

    (C) dado que tenemos perturbaciones no esféricas y Ω es desconocida, estimaríamos el modelo por MCGF, obteniendo un estimador consistente.

    (D) dado que tenemos perturbaciones esféricas, estimaríamos β por MCO, obteniendo un estimador lineal, insesgado, de varianza mínima y consistente.

    (E) no conocemos la estructura exacta de la varianza de la perturbación, así que estimaríamos β por MCO y luego estimaríamos su matriz de varianzas y covarianzas mediante la aproximación de White.

17. Sea el modelo, $Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Z_i + u_i \quad i = 1, \ldots, 100$. Se estima por MCO y se obtienen los siguientes resultados:

    $$\hat{Y}_i = 3 + 2,8X_i + 1,3Z_i \quad SCR = 1,23 \quad R^2 = 0,92 \tag{1}$$

    Además se estima por MCO la siguiente regresión auxiliar:

    $$\frac{\hat{u}_i^2}{\hat{\sigma}_u^2} = 0,22 + 0,30X_i + 0,18Z_i + \hat{\omega}_i \quad SCR = 1,35 \quad R^2 = 0,80 \tag{2}$$

    En el modelo dado por la ecuación (1), la existencia de heterocedasticidad causada por las variables X_i y Z_i: $\sigma_i^2 = h(\alpha_0 + \alpha_1 X_i + \alpha_2 Z_i)$, se contrasta así:

    (A) $\begin{cases} H_0: & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ H_A: & \text{alguna igualdad no se dé} \end{cases}$
    $BP = 2,7 < \chi^2_{(2)0,05} = 5,99 \Longrightarrow$ **No** se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad a un $\alpha = 5\,\%$

    (B) $\begin{cases} H_0: & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ H_A: & \text{alguna igualdad no se dé} \end{cases}$
    $BP = 3,375 < \chi^2_{(2)0,05} = 5,99 \Longrightarrow$ **No** se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad a un $\alpha = 5\,\%$

(C) $\begin{cases} H_0: & \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ H_A: & \text{alguna igualdad no se dé} \end{cases}$

$BP = 2,7 < \chi^2_{(3)0,05} = 7,81 \Longrightarrow$ **No** se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad a un $\alpha = 5\,\%$

(D) $\begin{cases} H_0: & \alpha_1 = \alpha_2 \\ H_A: & \alpha_1 \neq \alpha_2 \end{cases}$

$BP = 80 > \chi^2_{(2)0,05} = 5,99 \Longrightarrow$ Se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad a un $\alpha = 5\,\%$

(E) $\begin{cases} H_0: & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ H_A: & \text{alguna igualdad no se dé} \end{cases}$

$BP = 0,675 < \chi^2_{(2)0,05} = 5,99 \Longrightarrow$ **No** se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad a un $\alpha = 5\,\%$

Las cuestiones 18 y 19 hacen referencia al siguiente enunciado:

Sea el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, T,\ u_t = 0,7u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0,\ 0{,}5)$.

18. Var(u_{t-2}) es:

(A) 0,5 (B) 0,98 (C) 0,25 (D) 0,34 (E) 0,74

19. ¿En cuál de los siguientes modelos transformados las perturbaciones no presentan autocorrelación?

(A) $Y_t + 0,7Y_{t-1} = 0,3\alpha + \beta(X_t + 0,7X_{t-1}) + v_t \qquad t = 2, \ldots, T$

(B) $Y_t - 0,7Y_{t-1} = 0,3\alpha + \beta(X_t - 0,7X_{t-1}) + v_t \qquad t = 2, \ldots, T$

(C) $Y_t + 0,7Y_{t-1} = 1,7\alpha + \beta(X_t + 0,7X_{t-1}) + v_t \qquad t = 2, \ldots, T$

(D) $Y_t - 0,7Y_{t-1} = 1,7\alpha + \beta(X_t - 0,7X_{t-1}) + v_t \qquad t = 2, \ldots, T$

(E) $Y_t - 0,7Y_{t-1} = 0,7\alpha + \beta(X_t - 0,7X_{t-1}) + v_t \qquad t = 2, \ldots, T$

20. Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_6 X_{6t} + u_t \quad t = 1, \ldots, 60$. Si $\frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}^2_{t-1}} = 0,31$, el valor aproximado del estadístico de Durbin y Watson y la conclusión del contraste DW ($\alpha = 5\,\%$) son respectivamente:

(A) 1,81 y se concluye que no hay autocorrelación.

(B) 1,81 y el contraste no es concluyente.

(C) 1,38 y se concluye que hay autocorrelación.

(D) 1,38 y el contraste no es concluyente.

(E) todo falso.

21. En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \ldots, T$ se quiere contrastar la presencia de autocorrelación de 2º orden en las perturbaciones mediante el contraste de Breusch-Godfrey. El coeficiente de determinación, R^2, que interviene en el estadístico de contraste, se obtiene de la siguiente regresión:

(A) $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \epsilon_t$

(B) $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 X_{2t} + \gamma_3 X_{3t} + \epsilon_t$

(C) $\hat{u}_t = \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \gamma_3 X_{2t} + \gamma_4 X_{3t} + \epsilon_t$

(D) $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \gamma_3 X_{2t} + \gamma_4 X_{3t} + \epsilon_t$

(E) $\hat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \gamma_3 \hat{u}^2_{t-1} + \gamma_4 \hat{u}^2_{t-2} + \epsilon_t$

22. Sea $u_t = \rho u_{t-2} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\varepsilon) \qquad |\rho| < 1$. Entonces:

(A) $E(u_t\, u_{t-4}) \neq 0$ (B) $E(u_t\, u_{t-2}) = 0$ (C) $E(u_t\, \varepsilon_{t-4}) = 0$

(D) $E(u_t\, u_{t-1}) \neq 0$ (E) $E(u_t\, \varepsilon_{t-2}) = 0$

23. Sea $u_t = \varepsilon_t + 0,6\varepsilon_{t-1} \qquad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\varepsilon = 1)$. Entonces $Var(u_t)$ toma el valor:

(A) 1,60 (B) 1,36 (C) 1,56 (D) 0,64 (E) 0,36

24. Sea el modelo: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$, donde $u_t = 0,6u_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim NID(0, \sigma^2_\epsilon)$. Se dispone de la siguiente información muestral:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para obtener las estimaciones de los coeficientes por MCG, transformamos el modelo y lo estimamos por MCO. Los dos primeros elementos de $P^{-1}Y$, es decir, $Y_1^\star$ e $Y_2^\star$ son:

(A) $0,8$ y $0,4$ (B) $0,8$ y $2,4$ (C) 1 y 3

(D) $2,4$ y $0,2$ (E) $2,4$ y $2,2$

25. Sea un MRLG donde $u_t = 0,6u_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2_\epsilon), \quad t = 1, 2, \ldots, 6$. Entonces:

(A) $$E(uu') = \sigma^2_u \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 & 0,6^5 \\ & 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(B) $$E(uu') = \sigma^2_u \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 & 0,6^5 & 0,6^6 \\ & 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 & 0,6^5 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(C) $$E(uu') = \sigma^2_\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 & 0,6^5 \\ & 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(D) $$E(uu') = \sigma^2_\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 & 0,6^5 & 0,6^6 \\ & 1 & 0,6 & 0,6^2 & 0,6^3 & 0,6^4 & 0,6^5 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(E) todo falso.

26. Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad t = 1, \ldots, T$, y $u_t \sim NID(0, \sigma_u^2)$. No disponemos de datos sobre la variable X_t, por lo que utilizamos la siguiente variable medida con error: $X_t^* = X_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$. Entonces:

(A) los errores de medida en las variables económicas son inexistentes, ya que siempre disponemos de datos exactos sobre las variables.

(B) el error de medida en la variable explicativa causa autocorrelación en la perturbación del modelo.

(C) la variable que conocemos, X_t^*, es prácticamente la variable original, X_t y, por tanto, no nos causa ningún problema.

(D) el error de medida en la variable explicativa causa heterocedasticidad en la perturbación del modelo.

(E) todo falso.

27. Sea el modelo:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad \text{donde} \quad u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$$

Si X_t es una variable no observable tal que disponemos de la variable observable $X_t^\star = X_t + v_t$ donde X_t es fija, $v_t \sim iid(0, \sigma_v^2)$ y $Cov(u_s, v_t) = 0, \forall t, s$:

(A) plim $\hat{\alpha}_{MCO} = \alpha + \frac{\beta\sigma_v^2}{\sigma_x^2+\sigma_v^2}$ plim $\bar{X}^\star$

(B) plim $\hat{\alpha}_{MCO} = \frac{\beta\sigma_v^2}{\sigma_x^2+\sigma_v^2}$ plim $\bar{X}^\star$

(C) plim $\hat{\alpha}_{MCO} = \alpha + \frac{\beta(\sigma_x^2+\sigma_v^2)}{\sigma_x^2}$ plim $\bar{X}^\star$

(D) plim $\hat{\alpha}_{MCO} = \frac{\beta(\sigma_x^2+\sigma_v^2)}{\sigma_x^2}$ plim $\bar{X}^\star$

(E) plim $\hat{\alpha}_{MCO} = \alpha$

28. Se tiene el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$ donde se cumplen todas las hipótesis básicas del MRLG. X_t es una variable inobservable pero se observa $X_t^* = X_t + \epsilon_t \quad \epsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_\epsilon^2)$. Las variables X_t , u_t y ϵ_t son variables incorrelacionadas en todo momento. El modelo estimable será: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + \beta_3 Z_t + v_t$. Entonces:

(A) como $E(X_t^* v_t) \neq 0$, los estimadores MCO son inconsistentes.

(B) como $E(Z_t v_t) \neq 0$, los estimadores MCO son inconsistentes.

(C) como $E(X_t^* v_t) = 0$, los estimadores MCO son consistentes.

(D) como $E(Z_t v_t) = 0$, los estimadores MCO son consistentes.

(E) como v_t no son perturbaciones esféricas, los estimadores MCGF son consistentes.

Las cuestiones 29 y 30 hacen referencia al siguiente enunciado:
Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ donde $u_t = 0,3u_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, 4)$ y X_t es inobservable. Se tienen observaciones de $X_t^* = X_t + w_t$ donde $w_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_w^2)$ y además w_t y ϵ_t son independientes. De este modo, el modelo estimable es $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + v_t$.

29. Entonces $E(v_t^2)$ es:

(A) $\sigma_\epsilon^2 + \beta_2^2\sigma_w^2$

(B) $\sigma_u^2 + \beta_2\sigma_w^2$

(C) $\sigma_u^2 + \beta_2^2\sigma_w^2$

(D) $\sigma_\epsilon^2 + \beta_2^2\sigma_w^2 - 2\beta_2 Cov(u_t, w_t)$, donde $Cov(u_t, w_t) \neq 0$

(E) $\sigma_\epsilon^2 + \beta_2^2\sigma_w^2 + 2\beta_2 Cov(u_t, w_t)$, donde $Cov(u_t, w_t) \neq 0$

30. $E(v_t v_{t-2})$ vale:

(A) 1,30 (B) 0,51 (C) No hay suficientes datos para hallarla (D) 0,39 (E) 1,71

Las cuestiones 31 y 32 hacen referencia al siguiente enunciado:
Sea el modelo $Y_t = \beta + \gamma X_t + \delta Z_t + u_t \quad t = 1, \ldots, 360$. La variable X es estocástica y la variable Z es no estocástica.

31. Existe la sospecha de la existencia de autocorrelación de primer orden en la perturbación del modelo. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

(A) Podemos realizar tanto el contraste de Durbin-Watson como el contraste de Breusch-Godfrey, ambos serían válidos.

(B) Realizaríamos el contraste de Durbin-Watson pero utilizando los residuos de VI, ya que los residuos MCO serían inconsistentes.

(C) El contraste de Breusch-Godfrey no se podría aplicar dado que sólo es válido para un contraste de autocorrelación de orden p.

(D) Primero deberíamos realizar el contraste de Hausman porque el resultado del mismo nos permitirá verificar la existencia de autocorrelación.

(E) Dadas las características del modelo, realizaríamos el contraste de Breusch-Godfrey.

32. Si $E(X_t u_t) \neq 0$ los estimadores MCO cumplen:

(A) $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son inconsistentes.

(B) $\hat{\beta}, \hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son consistentes.

(C) $\hat{\gamma}$ es inconsistente y $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$ son consistentes.

(D) $\hat{\gamma}$ es consistente y $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$ son inconsistentes.

(E) $\hat{\beta}$ es consistente y $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son inconsistentes.

Las cuestiones 33 a 35 hacen referencia al siguiente enunciado:
En el modelo $Y = X\beta + u \quad X$ es estocástica, $u \sim N(0, \sigma^2 I)$ y X y u son independientes.

33. La expresión de la Var($\hat{\beta}_{MCO}$) es:

(A) $\sigma^2 E_x\left[(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}\right]$ (B) $\sigma^2(X'X)^{-1}$ (C) $\sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$
(D) $\sigma^2 E_x(X'X)^{-1}$ (E) $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$

34. La distribución en muestras finitas del estadístico de contraste de significatividad individual de una de las variables explicativas ($\hat{\beta}_i$ entre su desviación típica estimada), bajo la H_0, es:

(A) normal. (B) t-Student. (C) F de Snedecor.

(D) desconocida. (E) χ^2.

35. La distribución asintótica del estadístico de contraste de significatividad individual de una de las variables explicativas ($\hat{\beta}_i$ entre su desviación típica estimada), bajo la H_0, es:

(A) desconocida. (B) normal. (C) todo falso.

(D) χ^2. (E) F de Snedecor.

Las cuestiones 36 y 37 hacen referencia al siguiente enunciado:
Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \qquad t = 1, \ldots, T$ donde:

$u_t \sim iid(0, \sigma_u^2) \qquad X_{3t}, X_{4t}$ son variables fijas

$X_{2t} = 0,5 X_{2t-1} + v_t \quad v_t \sim iid(0, \sigma_v^2)\ \forall t$

$$E(u_t v_s) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad t = s \quad \forall t, s \\ 0 & \text{si} \quad t \neq s \end{cases}$$

36. $E(X_{2t} u_t)$ es:

(A) $0,5$ (B) $5,5$ (C) 0 (D) 5 (E) 1

37. Supón que existe una variable instrumental válida para X_{2t}. Entonces:

(A) el estimador MCO es lineal, insesgado y consistente.

(B) el estimador MCO es no lineal, generalmente sesgado e inconsistente.

(C) el estimador de VI es lineal, insesgado y consistente.

(D) el estimador de VI es no lineal, generalmente sesgado e inconsistente.

(E) todo falso.

Las cuestiones 38 a 40 hacen referencia al siguiente enunciado:
En el modelo $V_t = \beta P_t + u_t \quad t = 1, \ldots, 100 \quad u_t \sim iid(0, 1)$ donde V_t son las ventas de un producto y P_t es su precio, queremos contrastar la independencia entre P_t y u_t. Disponemos de información muestral sobre estas variables aleatorias y una posible variable instrumental, S_t, que son las existencias en almacén, tal que $E(S_t u_t) = 0$. La información muestral de que se dispone es:

$$\begin{array}{lll} \sum S_t V_t = 2,75 & \sum P_t S_t = 0,6 & \sum P_t V_t = 1,78 \\ \sum S_t^2 = 1,76 & \sum P_t^2 = 0,5 & \sum p_t s_t = 0,564 \\ \sum s_t^2 = 1,7276 & \sum p_t^2 = 0,46 & \sum s_t v_t = 3 \end{array}$$

donde $s_t = S_t - \bar{S}; \quad v_t = V_t - \bar{V}; \quad p_t = P_t - \bar{P}$

38. Si $E(P_t u_t) \neq 0$ ¿será S_t un buen instrumento para P_t al utilizar el estimador de VI? (utiliza al menos cuatro decimales)

(A) Sí, porque están correlacionadas y su correlación es 0,6

(B) Sí, porque están correlacionadas y su correlación es 0,632

(C) Sí, porque están correlacionadas y su correlación es 0,649

(D) No, porque no están correlacionadas

(E) Sí, porque están correlacionadas y su correlación es 0,7097

39. La estimación de β por VI es:

(A) 0,218 (B) 0,188 (C) 3,560 (D) 0,341 (E) 4,583

40. El estadístico de Hausman tiene un valor de:

(A) $H = 1,78$ (B) $H = 0,94$ (C) $H = 1,28$ (D) $H = 0,36$ (E) $H = 0,75$

41. Sea $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 W_t + u_t \quad u_t \sim NID(0, \sigma_u^2)$ siendo $W_t = \gamma W_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim NID(0, \sigma_\epsilon^2)$ y X_t no estocástica. $\hat{\beta}_{MCO}$ es consistente si:

(A) W_{t-1} y u_t están incorrelacionadas.

(B) W_t y ϵ_t son independientes.

(C) X_t y u_t están incorrelacionadas.

(D) ϵ_t y u_t son independientes.

(E) todo falso.

42. En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + u_t \quad t = 2, \ldots, T$ donde $u_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ estimamos por VI, usando como instrumento el segundo retardo de la variable endógena. La expresión del estimador de VI será:

(A)

$$\begin{bmatrix} T-1 & \sum_2^T Y_{t-1} \\ \sum_2^T Y_{t-2} & \sum_2^T Y_{t-2}Y_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_2^T Y_t \\ \sum_2^T Y_{t-2}Y_t \end{bmatrix}$$

(B)

$$\begin{bmatrix} T-2 & \sum_3^T Y_{t-2} \\ \sum_3^T Y_{t-1} & \sum_3^T Y_{t-1}Y_{t-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_3^T Y_t \\ \sum_3^T Y_{t-2}Y_t \end{bmatrix}$$

(C)

$$\begin{bmatrix} T-1 & \sum_2^T Y_{t-1} \\ \sum_2^T Y_{t-1} & \sum_2^T Y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_2^T Y_t \\ \sum_2^T Y_{t-1}Y_t \end{bmatrix}$$

(D)

$$\begin{bmatrix} T-2 & \sum_3^T Y_{t-1} \\ \sum_3^T Y_{t-2} & \sum_3^T Y_{t-2}Y_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_3^T Y_t \\ \sum_3^T Y_{t-2}Y_t \end{bmatrix}$$

(E)

$$\begin{bmatrix} T-2 & \sum_3^T Y_{t-1} \\ \sum_3^T Y_{t-2} & \sum_3^T Y_{t-2}Y_{t-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_3^T Y_t \\ \sum_3^T Y_{t-1}Y_t \end{bmatrix}$$

43. En el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + u_t$, los estimadores MCO:

(A) son siempre inconsistentes.

(B) son siempre consistentes.

(C) son consistentes si las perturbaciones no tienen autocorrelación.

(D) son consistentes si las perturbaciones tienen autocorrelación.

(E) todo falso.

44. Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-2} + u_t \qquad t = 1, \ldots, 100.$

(A) Si $u_t \sim MA(2)$, entonces $\hat{\beta}_{MCO}$ es un estimador consistente.

(B) Si $u_t \sim MA(1)$, entonces $\hat{\beta}_{MCO}$ es un estimador consistente.

(C) Si $u_t \sim AR(2)$, entonces $\hat{\beta}_{MCO}$ es un estimador consistente.

(D) Si $u_t \sim AR(1)$, entonces $\hat{\beta}_{MCO}$ es un estimador consistente.

(E) El estimador MCO es siempre inconsistente, independientemente del proceso que siga u_t.

45. u_A y u_B están correlacionadas contemporáneamente si $E(u_{At}u_{Bs})$ es igual a:

(A) $0 \quad \forall t = s$ y $1 \quad \forall t \neq s$ (B) $\sigma_{AB} \quad \forall t \neq s$ (C) $0 \quad \forall t = s$

(D) $\sigma_{AB} \quad \forall t = s$ y $0 \quad \forall t \neq s$ (E) $0 \quad \forall t = s$ y $\sigma_{AB} \quad \forall t \neq s$

46. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} Y_t^A & = & \alpha^A + \beta^A X_t^A + u_t^A \qquad t = 1, \ldots, 50 \qquad u_t^A \sim NID(0, 3) \\ Y_t^B & = & \alpha^B + \beta^B X_t^B + u_t^B \qquad t = 1, \ldots, 50 \qquad u_t^B \sim NID(0, 5X_t^B) \end{array}$$

donde u^A y u^B son independientes. Sea $\hat{\beta} = \left[\hat{\alpha}^A \; \hat{\beta}^A \; \hat{\alpha}^B \; \hat{\beta}^B\right]'$ el estimador MCO y $\hat{u}^A$, $\hat{u}^B$ son los vectores de residuos MCO,

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{\hat{u}_A'\hat{u}_A}{50-2} \qquad \hat{\sigma}_B^2 = \frac{\hat{u}_B'\hat{u}_B}{50-2} \qquad \hat{\sigma}_{AB} = \frac{\hat{u}_A'\hat{u}_B}{50}$$

y las matrices:

$$\Omega_B = \begin{pmatrix} X_1^B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{50}^B \end{pmatrix} \; \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 3I & 0 \\ 0 & 5\Omega_B \end{pmatrix} \; \hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_A^2 I & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_B^2 I \end{pmatrix} \; \hat{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_A^2 I & \hat{\sigma}_{AB} I \\ \hat{\sigma}_{AB} I & \hat{\sigma}_B^2 I \end{pmatrix}$$

¿Cuál de los siguientes estimadores del modelo conjunto tiene mejores propiedades?

(A) MCGF con la matriz $\hat{\Sigma}_3$.

(B) MCGF con la matriz $\hat{\Sigma}_2$.

(C) MCG con la matriz Σ_1.

(D) MCG con la matriz $\hat{\Sigma}_2$.

(E) MCGF con la matriz Σ_1.

47. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Y_{At} = \alpha_A + \gamma_A X_{At} + u_{At} & u_A \sim NID(0, \sigma_A^2 I_T) \\ Y_{Bt} = \alpha_B + \gamma_B X_{Bt} + u_{Bt} & u_B \sim NID(0, \sigma_B^2 I_T) \end{cases}$$

siendo u_A y u_B independientes. Las variables X_A y X_B son no estocásticas. Sean las siguientes matrices:

$$F = \begin{bmatrix} l & X_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & X_B \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} l & X_A \\ l & X_B \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} l & X_A & 0 \\ 0 & X_B & l \end{bmatrix}$$

donde l es una columna de unos. Si se sabe que la restricción $\gamma_A = \gamma_B$ es cierta, la matriz X del modelo restringido y el método de estimación a utilizar para conseguir estimadores asintóticamente eficientes son:

(A) F y MCO. (B) H y MCO. (C) H y MCGF. (D) F y VI. (E) G y MCGF.

48. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1\beta_1 + u_1 & \text{con } T_1 \text{ observaciones} \\ Y_2 = X_2\beta_2 + u_2 & \text{con } T_2 \text{ obsservaciones} \end{cases}$$

donde $Var(u_{1t}) = \sigma_1^2 Z_t$ con Z_t conocida, $E(u_{1t}u_{1s}) = 0 \quad \forall t \neq s$, $E(u_1 u_2') = 0$ y $E(u_2 u_2') = \sigma_2^2 I$. Los estimadores lineales, insesgados de varianza mínima se obtienen:

(A) estimando la primera ecuación por MCG y la segunda por MCO.

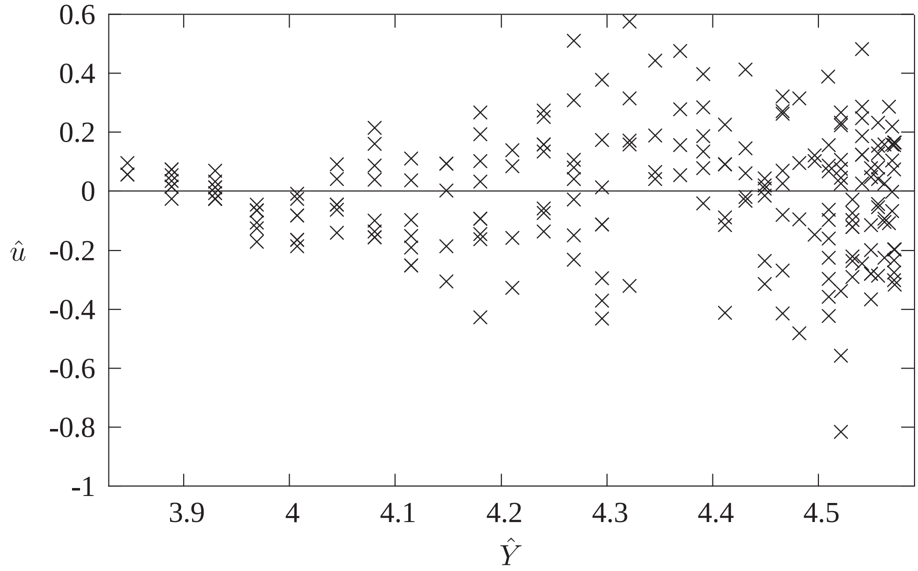
(B) estimando conjuntamente por MCGF.

(C) estimando cada ecuación por separado por MCO.

(D) estimando conjuntamente por MCO.

(E) estimando cada ecuación por separado por MCGF.

49. Se ha realizado una regresión MCO de una variable Y sobre dos variables explicativas. Al representar los residuos $\hat{u}$, con respecto a $\hat{Y}$ se obtiene el siguiente gráfico:



¿qué se puede sospechar a partir de este gráfico?

(A) Que hay un error de especificación.

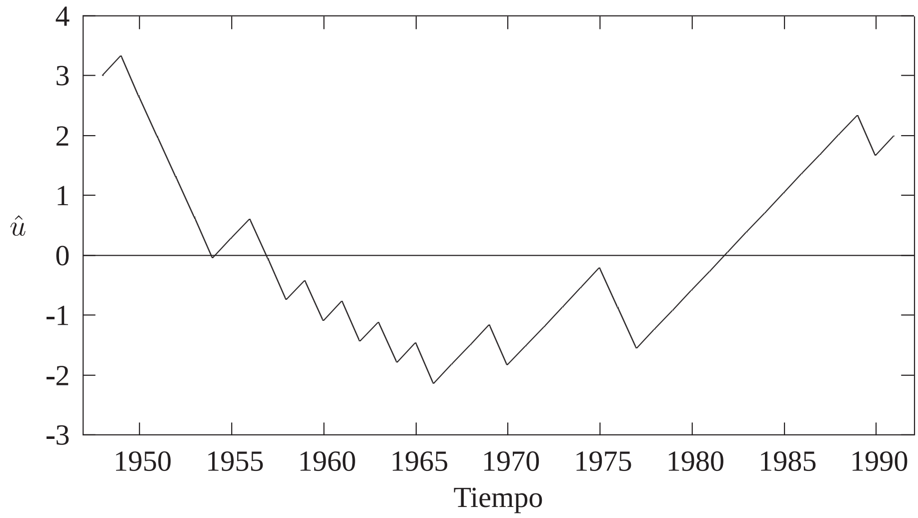
(B) Que las perturbaciones presentan autocorrelación.

(C) Que las perturbaciones presentan heterocedasticidad.

(D) Que las perturbaciones cumplen todas las hipótesis básicas del MRLG.

(E) Todo falso.

50. Se ha realizado una regresión MCO de una variable Y sobre una constante y una tendencia lineal determinista, $Y_t = \alpha + \beta t + u_t \quad t = 1, \ldots, T$. Al representar los residuos, $\hat{u}$, con respecto al tiempo se obtiene el siguiente gráfico:



¿qué se puede sospechar a partir de este gráfico?

(A) Que las perturbaciones cumplen todas las hipótesis básicas del MRLG.

(B) Que las perturbaciones presentan heterocedasticidad.

(C) Que las perturbaciones presentan autocorrelación.

(D) Que hay un regresor estocástico.

(E) Todo falso.

PROBLEMA LE-2004.1 (Ene-2004)

Responde a las siguientes preguntas:

a) La no normalidad de las perturbaciones del modelo, ¿cómo afecta a las propiedades del estimador MCO?

b) Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad u_t \sim NID(0, \exp(\alpha\, Z_t)) \tag{1}$$

donde X_2, X_3, Z son variables observables y fijas y α es una constante conocida. Se han estimado los parámetros del modelo por MCO y por MCG. A continuación tienes los resultados de ambas estimaciones. ¿Cuál corresponde a la estimación MCG? ¿Por qué?

$$\underset{(desv.)}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,17)}{7,211} - \underset{(0,03)}{0,52} X_{2t} + \underset{(0,81)}{1,5}\, X_{3t} \qquad cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0,5 \qquad R^2 = 0,40 \tag{2}$$

$$\underset{(desv.)}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,37)}{3,211} - \underset{(0,11)}{0,42} X_{2t} + \underset{(0,97)}{1,3}\, X_{3t} \qquad cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0,3 \qquad R^2 = 0,55 \tag{3}$$

c) Se suele decir que el estimador de MCGF es un estimador de MCG. ¿Por qué?

d) ¿Cuándo se utiliza el contraste de Hausman? Explica brevemente en qué consiste.

PROBLEMA LE-2004.2 (Ene-2004)

La tasa de fertilidad, y, es el número de niños nacidos por cada 1000 mujeres en edad fértil. Para datos anuales de EE.UU. durante 1946-1984 se ha propuesto el siguiente modelo:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1\, x_t + \beta_2\, x_{t-1} + \beta_3\, D_t + \beta_4\, y_{t-1} + u_t \tag{4}$$

donde

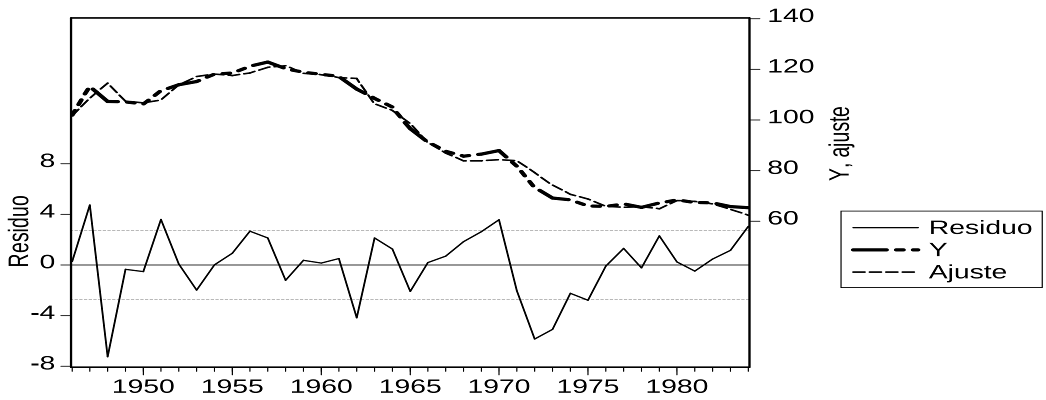
- x es la exención impositiva (en dólares reales) personal promedio por hijo.
- D es una variable ficticia que toma valor 1 de 1963 en adelante, año en que salió al mercado la píldora anticonceptiva.

Los resultados de la estimación MCO han sido:

$$\underset{(desv)}{\widehat{y_t}} = \underset{(5,35)}{6,52} - \underset{(0,05)}{0,01} x_t + \underset{(0,04)}{0,13} x_{t-1} - \underset{(1,64)}{6,22} D_t + \underset{(0,04)}{0,78} y_{t-1} \tag{5}$$

$$R^2 = 0,986 \quad DW = 1,7 \qquad BG(4) = 2,17 \qquad BP(D) = 0,9 \qquad \text{donde}$$

Figura 6: Residuos y ajuste MCO estimación (5)



- $BG(4)$ denota el estadístico de Breusch y Godfrey calculado para la hipótesis de autocorrelación de orden 4.
- $BP(D)$ denota el estadístico de Breusch y Pagan calculado para la hipótesis de heterocedasticidad relacionada con la variable ficticia D.

a) Analiza la existencia de autocorrelación en el modelo mediante un contraste. Plantea claramente el modelo, las hipótesis y el estadístico de contraste, su distribución y todos los cálculos necesarios para su obtención.

b) Con el dato sobre el estadístico de Breusch y Pagan realiza el contraste correspondiente. Plantea claramente el modelo, las hipótesis y el estadístico de contraste, su distribución y todos los cálculos necesarios para su obtención.

c) ¿Reformularías este modelo (4)? ¿Cómo? ¿Por qué?

d) Finalmente, ¿cómo contrastarías si las medidas impositivas tienen efecto sobre la tasa de fertilidad? Si tienes datos para realizar el contraste, llévalo a cabo.

PROBLEMA LE-2004.3 (Jun-2004)

Considera estimar el parámetro β en la siguiente ecuación

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \sim NID(0, \sigma_1^2) \tag{1}$$

Se sabe que y_{1t} e y_{2t} se determinan simultáneamente ya que

$$y_{2t} = \alpha_1 y_{1t} + \alpha_2 X_t + u_{2t} \qquad u_{2t} \sim NID(0, \sigma_2^2) \tag{2}$$

donde X_t es una variable exógena, independiente de u_{1s} y de u_{2s} para todo t y s.

a) Obtén la expresión del estimador de β por el método de variables instrumentales (VI) utilizando como instrumento X_t.

b) ¿Es este estimador lineal? ¿Es insesgado? ¿Por qué?

c) ¿Es consistente? ¿Por qué?

d) ¿Conoces su distribución? ¿Y la asintótica? ¿Por qué?

e) ¿Cambiaría alguna de tus respuestas a los apartados anteriores si $\alpha_2 = 0$? Razona tu respuesta.

Para una muestra de tamaño $T = 1000$ se obtiene la siguiente información muestral:

$$\sum_t y_{2t}^2 = 42 \quad \sum_t y_{1t} y_{2t} = 5 \quad \sum_t y_{2t} X_t = 12 \quad \sum_t X_t^2 = 10 \quad \sum_t X_t y_{1t} = 3 \quad \sum_t y_{1t}^2 = 11$$

f) Además se dispone de un estimador consistente de σ_1^2 cuya estimación es $\hat{\sigma}_1^2 = 0,01$.

Utiliza el contraste de Hausman para determinar si hay evidencia o no de que y_{2t} sea una variable endógena. Explica en detalle todo el proceso.

PROBLEMA LE-2004.4 (Jun-2004)

Con datos anuales desde 1948 hasta 1989 se ha estimado la siguiente función de consumo para el Reino Unido:

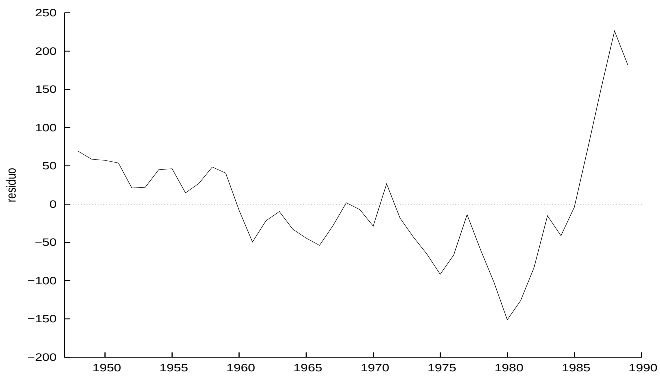
$$C_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + u_t \tag{3}$$

donde C es el consumo per cápita y RD es la renta disponible per cápita (en libras). Ambas variables están medidas en términos reales. Los resultados de la estimación han sido:

```
Modelo 3: MCO utilizando las 42 observaciones 1948-1989 Variable dependiente: C

VARIABLE    COEFICIENTE     DESV.TÍP.    ESTAD.T
 const       168,315        43,2796       3,889
  RD           0,864323     0,0133004    64,985

Media de la var. dependiente = 2876,55       R-cuadrado = 0,990617
D.T. de la var. dependiente= 771,61          R-cuadrado corregido = 0,990382
Suma de cuadrados de los residuos = 229045   Grados de libertad = 40
Desviación típica de los residuos = 75,6711
Estadístico de Durbin-Watson = 0,247444
Coef. de autocorr. de primer orden = 0,927294
```

a) ¿Qué significa que las variables están medidas en términos reales?

Figura 7: Gráfico de residuos del modelo (1)



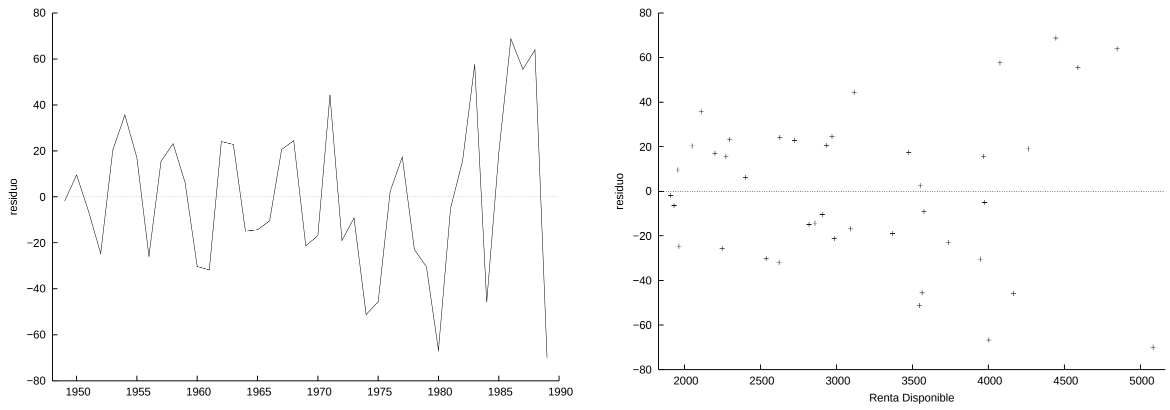
b) Después de analizar los resultados el investigador cree que este modelo puede estar incorrectamente especificado. ¿Cuál puede ser la razón de esta afirmación? Utilizando los resultados de la estimación y el gráfico, repite los pasos que ha realizado para llegar a esta conclusión.

A continuación, considera dos re-especificaciones para la función de consumo. La primera propuesta junto con los resultados de la estimación son:

$$C_t \quad = \quad \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_{t-1} + \beta_4 C_{t-1} + u_t \tag{4}$$

```
 Modelo 4: MCO utilizando 41 observaciones 1949-1989

Variable dependiente: C

VARIABLE  COEFICIENTE   DESV. TIP.   ESTADISTICO t
const      -56,094       29,936       -1,874
 RD{t}      0,684         0,085        8,048
 RD{t-1}   -0,723         0,080       -9,002
 C{t-1}     1,068         0,097       10,980

Suma cuadrados de residuos=  45682,2     R-cuadrado= 0,998043
Desv. típica de residuos  = 35,1376      R-cuadrado corregido=0,997885
Estadístico Durbin-Watson = 1,59545      Estadístico F(3, 37)= 6291,16
Coef. de autocorr. de primer orden= 0,166491
Estad. de Breusch-Godfrey para autocorrelación de segundo orden = 2,97
Estad. de Breusch-Pagan para varianza en  función de RD y tiempo=17,9
```

Figura 8: Gráficos de residuos del modelo (4)



c) ¿Qué mide el parámetro β_2 del modelo (4)?

d) Analiza los resultados de la estimación del modelo (4). Dada la evidencia encontrada, explica cuáles son las consecuencias sobre el estimador MCO de los coeficientes y si son fiables las desviaciones típicas mostradas.

A continuación se muestran la segunda propuesta y su estimación:

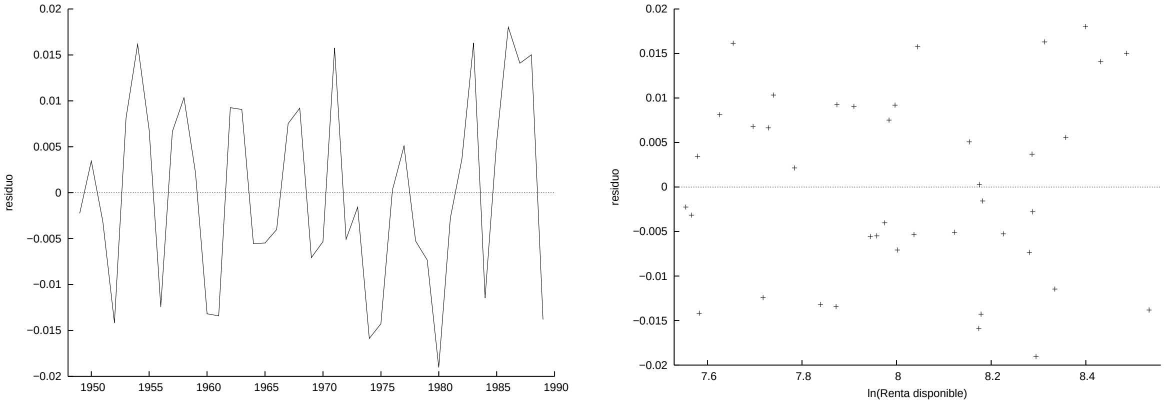
$$\ln(C_t) \quad = \quad \alpha_1 + \alpha_2 \ln(RD_t) + \alpha_3 \ln(RD_{t-1}) + \alpha_4 \ln(C_{t-1}) + v_t \tag{5}$$

```
 Modelo 5: Estimaciones MCO utilizando 41 observaciones 1949-1989
Variable dependiente: ln(C)

VARIABLE  COEFICIENTE   DESV. TIP.   ESTADISTICO t
const         -0,116       0,080        -1,453
ln(RD{t})      0,741       0,083         8,968
ln(RD{t-1})  -0,744       0,087        -8,531
ln(C{t-1})     1,018       0,090        11,355

Media var. dependiente = 7,94001      R-cuadrado = 0,998389
D.T. var. dependiente = 0,258946      R-cuadrado corregido = 0,998259
Suma cuadrados residuos= 0,004320     Estadístico F(3, 37)  = 7644,56
Desv. típica  residuos = 0,0108057
Estad. de Durbin-Watson = 1,65215
Coef. de autocorr. de primer orden = 0,158247
Estad. Breusch-Godfrey para autocorrelación de segundo orden = 3,2
Estad. Breusch-Pagan para heterocedasticidad en función de RD y tiempo = 1,5

ESTIMACION DE MATRIZ DE COVARIANZAS DE LOS COEFICIENTES
 const       ln(RD{t})    ln(RD{t-1})    ln(C{t-1})
0,00641     0,0023         0,0024        -0,0056
            0,0068        -0,0039        -0,0032
                           0,0076        -0,0040
                                          0,0080
```

e) ¿Qué mide el parámetro α_2 del modelo (5)?

f) Analiza los resultados de la estimación del modelo (5). ¿Re-estimarías los parámetros del modelo? Justifica tu respuesta.

Figura 9: Gráficos de residuos del modelo (5)



g) ¿Qué modelo te parece mejor para explicar el comportamiento del consumo? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

Finalmente, tras analizar el modelo (5), el investigador propone el siguiente modelo:

$$\ln(C_t) \quad = \quad \delta_1 + \delta_2[\ln(RD_t) - \ln(RD_{t-1})] + \delta_3 \ln(C_{t-1}) + v_t \tag{6}$$

h) ¿Qué contraste ha realizado para llegar a esta conclusión? Utilizando los resultados de la estimación del modelo 5, repite los pasos que ha realizado para llegar a esta conclusión. Supón que $v_t \sim NID(0, \sigma_v^2)$.

<u>PROBLEMA LE-2004.5</u> (Sep-2004)

Se dispone de una base de datos sobre el precio de venta y distintas características de 224 viviendas pertenecientes a dos áreas residenciales del condado de *Orange* en California (USA), *Dove Canyon* y *Coto de Caza* [1]. Dove Canyon es una zona de viviendas relativamente pequeñas construidas alrededor de un campo de golf. Coto de Caza es un área de mayor nivel de vida aunque más rural con viviendas más grandes. Las variables que se consideran son

```
salepric = precio de venta de la vivienda en  miles de dólares
sqft     = tamaño de la vivienda en pies cuadrados
age      = edad de la vivienda en años
city     = 1 si está en Coto de Caza, 0 si está en Dove Canyon
```

A continuación se muestran los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) de un modelo para el precio de venta de la vivienda utilizando esa base de datos:

[1]Fuente: Ramanthan, Ramu (1992) *Introductory econometrics with applications*

```
RESULTADOS A Variable dependiente: salepric

  VARIABLE    COEFICIENTE     DESV.TÍP.      ESTAD.T
   const     -440,312          35,3203       -12,466
   sqft         0,252069        0,00815634    30,905
   age          3,69805         3,02416        1,223
   city        91,8038         21,7494         4,221

  Media de la var. dependiente = 642,929
  D.T. de la var. dependiente = 371,376
  Suma de cuadrados de los residuos (SCR_A) = 4,27804e+006
  R-cuadrado = 0,860905
  R-cuadrado corregido = 0,859008
  Estadístico F (3, 220) = 453,884
```

a) Escribe el modelo teórico que se ha estimado y comenta los resultados obtenidos en términos de bondad de ajuste, significatividad y signos de los coeficientes estimados.

b) Analiza de forma razonada la información que te proporcionan los siguientes gráficos y la regresión auxiliar. Si realizas algún contraste, indica todos los elementos del mismo. ¿Cuál de los gráficos es más informativo y por qué?

Figura 10: Gráfico de residuos MCO sobre observación i=1,...,224

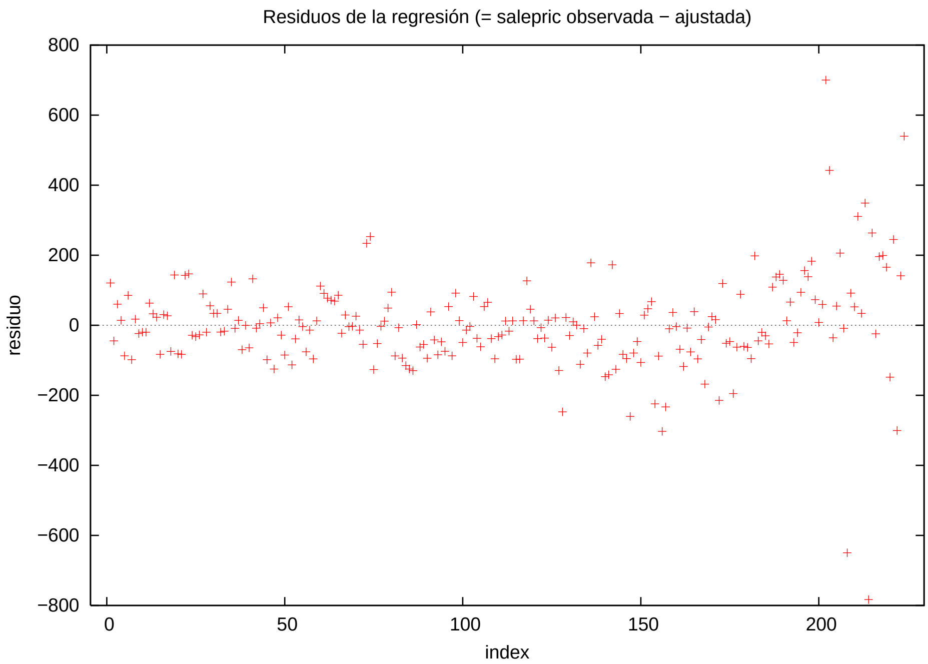
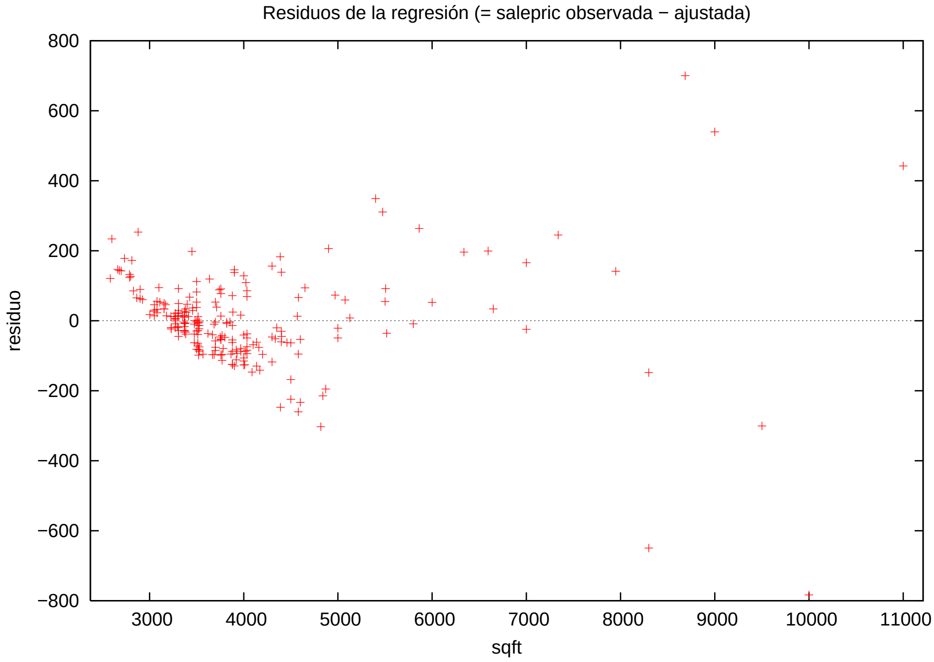


Figura 11: Gráfico de residuos MCO sobre la variable sqft



$$\frac{\widehat{\hat{u}_i^2}}{SCR_A/224} = \underset{(-10{,}387)}{-5,94184} + \underset{(12{,}727)}{0,00172457}\ \text{sqft}_i$$

$$N = 224 \quad R^2 = 0,421826 \quad SCR = 1478,52$$

A continuación se muestran los resultados de la estimación por MCO utilizando un estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes consistente aunque exista heterocedasticidad.

```
RESULTADOS B Variable dependiente: salepric

 VARIABLE    COEFICIENTE     DESV.TÍP.      ESTAD.T
  const      -440,312         110,631        -3,980
  sqft          0,252069        0,0279076     9,032
  age           3,69805         5,15553       0,717
  city         91,8038         26,3404        3,485

  Media de la var. dependiente = 642,929
  D.T. de la var. dependiente = 371,376
  Suma de cuadrados de los residuos = 4,27804e+006
  R-cuadrado = 0,860905
  R-cuadrado corregido = 0,859008
```

c) ¿En que varían los resultados mostrados ahora (RESULTADOS B) con los primeros (RESULTADOS A)? ¿Por qué? ¿Cuáles son fiables y para qué? Explica razonadamente.

Por último se muestran los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Generalizados o Ponderados utilizando como variable de ponderación el inverso del tamaño de la vivienda esto es, $\frac{1}{sqft}$.

```
RESULTADOS C

Estimaciones MC.Ponderados utilizando las 224 observaciones 1-224
Variable utilizada como ponderación: inversqf = 1/sqft

Variable dependiente: salepric

 VARIABLE      COEFICIENTE      DESV.TÍP.     ESTAD.T
    const      -285,205         37,2121       -7,664
    sqft         0,215569        0,00959143   22,475
    age        -0,549288         2,28001      -0,241
    city       110,780          15,6896        7,061

Estadísticos basados en los datos ponderados:
  Suma de cuadrados de los residuos = 0,150742
  Desviación típica de los residuos = 0,0261762
  R-cuadrado = 0,798817
  R-cuadrado corregido = 0,796073
  Estadístico F (3, 220) = 291,177

Estadísticos basados en los datos originales:
  Media de la var. dependiente = 642,929
  D.T. de la var. dependiente = 371,376
  Suma de cuadrados de los residuos = 4,73514e+006
  Desviación típica de los residuos = 146,708
```

d) ¿Qué se quiere decir con datos ponderados y datos originales? ¿Por qué se utiliza como variable de ponderación el inverso de sqft? Explica razonadamente.

e) ¿Qué resultados de los tres A,B, ó C te parecen mejores? ¿Por qué?

PROBLEMA LE-2004.6 (Sep-2004)

Con datos anuales desde 1948 hasta 1989 se ha estimado la siguiente función de consumo para el Reino Unido:

$$\ln(C_t) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln(RD_t) + \alpha_3 \ln(RD_{t-1}) + \alpha_4 \ln(C_{t-1}) + v_t \tag{1}$$

donde C es el consumo per cápita y RD es la renta disponible per cápita (en libras). Ambas variables están medidas en términos reales. Los resultados de la estimación por MCO han sido los siguientes:

```
Variable dependiente: ln(C)

VARIABLE  COEFICIENTE   DESV. TIP.   ESTADISTICO t
const        -0,116       0,080        -1,453
ln(RD{t})     0,741       0,083         8,968
ln(RD{t-1})  -0,744       0,087        -8,531
ln(C{t-1})    1,018       0,090        11,355

Media var. dependiente = 7,94001      R-cuadrado = 0,998389
D.T. var. dependiente = 0,258946      R-cuadrado corregido = 0,998259
Suma cuadrados residuos= 0,004320     Estadístico F(3, 37) = 7644,56
Desv. típica  residuos = 0,0108057 Estad. de Durbin-Watson = 1,65215
Coef. de autocorr. de primer orden = 0,158247
Estad. Breusch-Godfrey para autocorrelación de segundo orden = 3,2
```

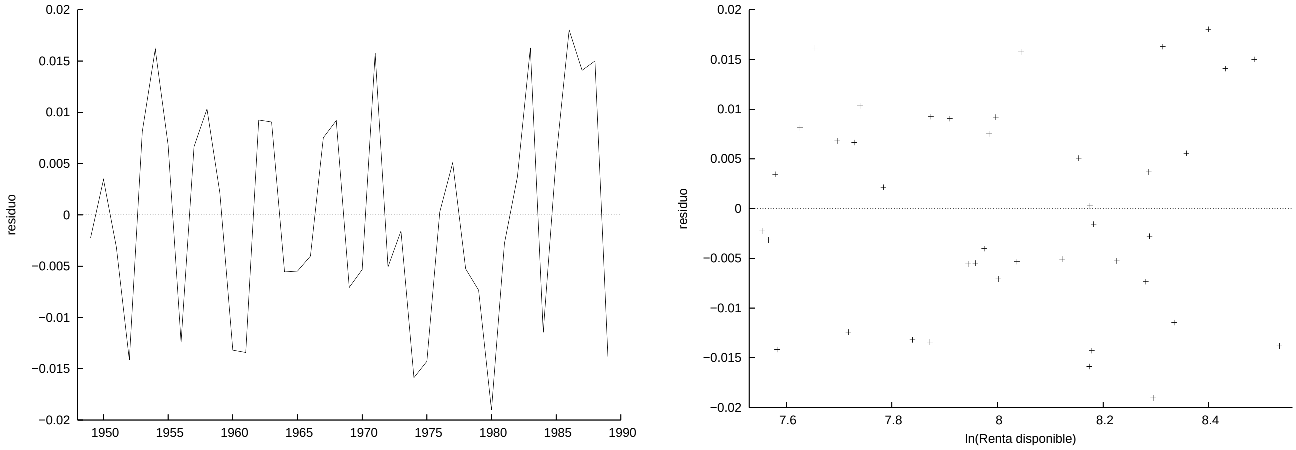


Figura 12: Gráficos de residuos

a) ¿Se pueden considerar todos los regresores fijos? ¿Por qué?

b) ¿Tiene este hecho alguna consecuencia para la validez de los resultados mostrados? Razona tu respuesta.

c) Utilizando la información mostrada en los resultados de la estimación y en los gráficos, decide si quedarte con el método de estimación utilizado o propondrías otro alternativo. Razona tu respuesta. Si realizas algún contraste, indica todos los elementos del mismo.

PROBLEMA LE-2004.7 (Sep-2004)

Comenta brevemente las siguientes afirmaciones:

a) Si utilizando el contraste de Hausman aceptamos la hipótesis nula, entonces es mejor utilizar el estimador de Variables Instrumentales que el de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

b) Un sistema de ecuaciones aparentemente no relacionadas se caracteriza por la existencia de relaciones entre los coeficientes de sus ecuaciones.

PROBLEMA LADE-2004.1 (Jun-2004)

Con datos de 50 regiones europeas se ha estimado la relación:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 Z_i + \beta_4 Z_i^2 + u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 50 \tag{1}$$

donde Y_i es el consumo de gasolina en la región i-ésima, X_i es el número de coches matriculados y Z_i es el tipo impositivo sobre la gasolina.

El resultado de la estimación por MCO es:

$$\hat{Y}_i = \underset{(1342{,}50)}{2990{,}73} + \underset{(0{,}01)}{0{,}18}\, X_i - \underset{(260{,}68)}{552{,}62}\, Z_i + \underset{(12{,}16)}{24{,}57}\, Z_i^2$$

Entre paréntesis: desviaciones típicas estimadas con el estimador de White

a) Contrasta la hipótesis de que el efecto del impuesto sobre el consumo de gasolina no es cuadrático. Especifica la fórmula que se ha utilizado para obtener el número $12{,}16$.

b) Se sospecha que la varianza de las perturbaciones depende tanto del número de coches como del impuesto. Explica **paso a paso** cómo efectuarías el contraste oportuno. Haz el contraste, suponiendo que el valor del estadístico es $60{,}20$.

c) El contraste del apartado anterior confirma la sospecha. ¿Sería preferible en este caso el uso de los estimadores de MCG Factibles para hacer el contraste del primer apartado, en vez de los de MCO? ¿Por qué? Razona tu respuesta en términos de las propiedades del estimador MCGF.

PROBLEMA LADE-2004.2 (Jun-2004)

Una entidad bancaria solicita a su servicio de estudios que analice la relación entre el Producto Nacional Bruto (PNB) y la oferta monetaria (M), variable no estocástica. Las variables están medidas en logaritmos, desde el primer trimestre de 1970 al segundo trimestre de 2003, ambos inclusive. El servicio de estudios propone estimar por MCO el siguiente modelo:

$$PNB_t = \beta_0 + \beta_1 M_t + \beta_2 M_{t-1} + u_t \tag{2}$$

Los resultados de la estimación MCO son:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{PNB}_t} = \underset{(0{,}00218)}{0{,}00078} + \underset{(0{,}2053)}{0{,}5320}\, M_t + \underset{(0{,}2074)}{0{,}4368}\, M_{t-1}$$

$$R^2 = 0{,}9371 \quad DW = 0{,}2911 \quad SCR = 0{,}08476$$

El servicio de estudios concluye:
"El ajuste encontrado es bueno, por encima del $93\,\%$ y las variables exógenas son significativas al $5\,\%$. Se ha estimado el modelo de la manera más eficiente posible".

a) ¿Te parece razonable **cada una** de estas tres conclusiones? Razona tu respuesta comentando las propiedades de los estimadores utilizados.

b) Si no estás de acuerdo con las conclusiones del servicio de estudios propón un método de estimación alternativo y **descríbelo**.

PROBLEMA LADE-2004.3 (Jun-2004)

a) Plantea un modelo con término independiente y una sola variable explicativa para una muestra de tamaño T. Especifica la condición de perturbaciones esféricas.

b) Supón que no dispones de observaciones sobre dicha variable explicativa pero sí de otra variable que se considera una aproximación de la anterior. Escribe formalmente este hecho y comprueba qué consecuencias tiene sobre las propiedades del estimador de MCO. Escribe explícitamente **t**odos los supuestos que creas necesarios para demostrar tus resultados.

c) ¿Llegarías a las mismas conclusiones sobre las propiedades del estimador MCO si la variable de la que no dispones de observaciones fuera la endógena?

PROBLEMA LADE-2004.4 (Jun-2004)

Para analizar el consumo de un país se especifica el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \ , \quad t = 1, 2, ..., 100$$

donde Y_t, X_{1t} y X_{2t} representan la tasa de crecimiento del consumo, el tipo de interés y la inflación en el periodo t respectivamente. Se supone que $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$. La variable X_{1t} se supone no estocástica, pero la inflación, al estar determinada por la demanda de consumo, se considera estocástica. Se dispone a su vez de información sobre la tasa de crecimiento de los costes de producción, P_t, que se considera no estocástica.

Se ha estimado el modelo por MCO, obteniéndose los siguientes resultados:

$$\hat{Y}_t = 0{,}046 - 0{,}021 X_{1t} - 0{,}055 X_{2t} \tag{3}$$

a) ¿Cuándo es el estimador de la ecuación (3) inconsistente?

b) Se dispone de la siguiente información muestral:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}010 & 0{,}012 & 0{,}000 \\ 0{,}012 & 0{,}011 & -0{,}033 \\ 0{,}000 & -0{,}033 & 0{,}022 \end{pmatrix} \quad (Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}011 & 0{,}000 & 0{,}003 \\ -0{,}034 & -0{,}012 & 0{,}000 \\ -0{,}023 & 0{,}000 & -0{,}032 \end{pmatrix}$$

$$(Z'X)^{-1}Z'Z[(Z'X)^{-1}]' = \begin{pmatrix} 0{,}012 & -0{,}033 & -0{,}033 \\ -0{,}033 & 0{,}118 & 0{,}051 \\ -0{,}033 & 0{,}051 & 0{,}188 \end{pmatrix} \quad Z'Y = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 3{,}0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} \quad X'Y = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 3{,}0 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$$

$$Z'Z = \begin{pmatrix} 100 & -14 & -16 \\ -14 & 95 & -15 \\ -16 & -15 & 155 \end{pmatrix} \qquad (X'Z)^{-1}Z'Z[(X'Z)^{-1}]' = \begin{pmatrix} 0{,}012 & -0{,}030 & 0{,}059 \\ 0{,}002 & 0{,}008 & -0{,}010 \\ -0{,}006 & -0{,}033 & 0{,}142 \end{pmatrix}$$

Si Z es la matriz de instrumentos, estima el modelo por variables instrumentales. Escribe la matriz Z y el instrumento que se utiliza, argumentando por qué se elige dicho instrumento. ¿Qué propiedades tiene este estimador?

c) Si además $\sum \hat{u}^2_{t,VI} = 2{,}037$, ¿cómo podrías contrastar si el estimador MCO es consistente? Explica y realiza el contraste. De acuerdo con este contraste, ¿qué método de estimación elegirías?¿Por qué?

PROBLEMA LADE-2004.5 (Sep-2004)

Sea la relación lineal entre consumo de ropa (C_i) e ingreso (R_i):

$$C_i = \alpha + \beta R_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

donde se sospecha que la varianza de la perturbación puede ser distinta para los hombres que para las mujeres.

a) Para una muestra de 50 individuos varones se ha estimado por MCO la relación anterior obteniéndose un valor de 136,28 para la SCR. El mismo estadístico obtenido en una muestra de 50 mujeres ha alcanzado el valor de 18,34. Describe y aplica el contraste de Goldfeld y Quandt para contrastar la sospecha del enunciado.

b) Dado el resultado del contraste, describe cómo estimarías los parámetros del modelo de manera que tengan buenas propiedades. Cítalas.

c) Si además se sospecha que los parámetros de la relación consumo de ropa-ingreso para los hombres son distintos que los de la relación consumo de ropa-ingreso para las mujeres, ¿cómo estimarías estos parámetros? Indica el modelo a estimar y el método de estimación justificando tu respuesta.

PROBLEMA LADE-2004.6 (Sep-2004)

12 Sea el siguiente modelo: $$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \quad t = 1, \ldots, T \qquad (1)$$

donde X_t es un regresor no estocástico. Se ha estimado el modelo por MCO, obteniéndose:

$$\hat{Y}_t = 17{,}86 + 0{,}27 X_t - 0{,}79 Y_{t-1} \quad t = 2, \ldots, 51$$

En la siguiente tabla se recogen las 8 primeras observaciones de las variables Y_t, X_t y $\hat{u}_{t,MCO}$

t	Y_t	X_t	$\hat{u}_{t,MCO}$
1	8,5	11	
2	8,9	13	
3	16	14	
4	7,8	14,9	
5	16,4	15,1	0,625
6	7,9	18	-1,864
7	18	18,8	1,304
8	8	19,1	-0,797
⋮	⋮	⋮	⋮

a) Utilizando las observaciones muestrales de la tabla anterior obtén los residuos de MCO iniciales. Analiza gráficamente la posible presencia de autocorrelación de primer orden en las perturbaciones. Explica detalladamente cómo contrastarías formalmente este supuesto.

b) En el caso de rechazar la hipótesis nula del apartado anterior y suponiendo que las perturbaciones siguen un AR(1), es decir, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$, demuestra las propiedades del estimador MCO de los parámetros de la relación (1).

   Se dispone de la siguiente información muestral:

$$\begin{array}{lll}
\sum_{t=2}^{51} X_t = 3323,4 & \sum_{t=2}^{51} Y_t = 1022 & \sum_{t=2}^{51} Y_{t-1} = 998,5 \\
\sum_{t=2}^{51} X_t Y_t = 77268,38 & \sum_{t=2}^{51} Y_t Y_{t-1} = 14146,83 & \sum_{t=2}^{51} X_t Y_{t-1} = 75652,8 \\
\sum_{t=2}^{51} (X_t)^2 = 281168,2 & \sum_{t=2}^{51} X_t X_{t-1} = 272614,67 & \sum_{t=2}^{51} (Y_{t-1})^2 = 31068,07 \\
\sum_{t=2}^{51} X_{t-1} = 3205,4 & \sum_{t=2}^{51} X_{t-1} Y_{t-1} = 73233,88 & \sum_{t=2}^{51} X_{t-1} Y_t = 74499,05
\end{array}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}103060 & -0{,}000948 & -0{,}001003 \\ -0{,}000948 & 0{,}000019 & -0{,}000015 \\ -0{,}001003 & -0{,}000015 & 0{,}000103 \end{pmatrix}$$

$$(Z'X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}233 & 0{,}203 & -0{,}207 \\ -0{,}0062 & 0{,}0032 & -0{,}0032 \\ 0{,}033 & -0{,}021 & 0{,}021 \end{pmatrix} \qquad (X'Z)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}233 & -0{,}0062 & 0{,}033 \\ 0{,}203 & 0{,}0032 & -0{,}021 \\ -0{,}207 & -0{,}0032 & 0{,}021 \end{pmatrix}$$

c) Si Z es la matriz de instrumentos, estima el modelo por Variables Instrumentales donde X_{t-1} es el instrumento para Y_{t-1}. **Razona** las propiedades de dicho estimador.

d) ¿Crees que con la estimación anterior se ha corregido el problema de autocorrelación? Razona tu respuesta.

Además de la información anterior se dispone de la siguiente:

$$\begin{array}{lll} \sum \hat{u}^2_{t-1,MCO} = 3353,54 & \sum X^*_t = 4627,25 & \sum X^*_t Y^*_{t-1} = 148191,84 \\ \sum \hat{u}_{t,MCO}\hat{u}_{t-1,MCO} = 1331,60 & \sum Y^*_t = 1421,21 & \sum X^*_t Y^*_t = 151394,54 \\ \sum \hat{u}^2_{t-1,VI} = 477634,63 & \sum Y^*_{t-1} = 1388,42 & \sum Y^*_t Y^*_{t-1} = 41014,33 \\ \sum \hat{u}_{t,VI}\hat{u}_{t-1,VI} = -196899,12 & \sum (X^*_t)^2 = 550599,31 & \sum (Y^*_{t-1})^2 = 46920,97 \end{array}$$

donde $Y^*_t = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$, $X^*_t = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$, $Y^*_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{\rho} Y_{t-2}$ y $\hat{\rho}$ es un estimador consistente del parámetro del proceso autorregresivo de primer orden.

e) ¿Cuál es la estimación consistente del parámetro ρ utilizada para construir Y^*_t, X^*_t y Y^*_{t-1} en las expresiones superiores?

f) Con la información anterior, ¿se puede estimar los parámetros de la relación (1) mejorando las propiedades del estimador de VI? Describe el método que propones y sustituye los sumatorios anteriores en la fórmula del estimador correspondiente. (No debes calcular las estimaciones.)

g) ¿Cómo contrastarías la hipótesis nula $H_0 : \beta_2 = 1$? Detalla explícitamente todos los elementos que intervienen en dicho contraste.

PROBLEMA LE-2005.1 (Jun-2005)

Se desea analizar la siguiente la relación entre los gastos agregados en sanidad, Y_i y la renta agregada, X_i, ambos en billones de dólares, para 51 estados norteamericanos[2]:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \tag{1}$$

Los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios son los siguientes:

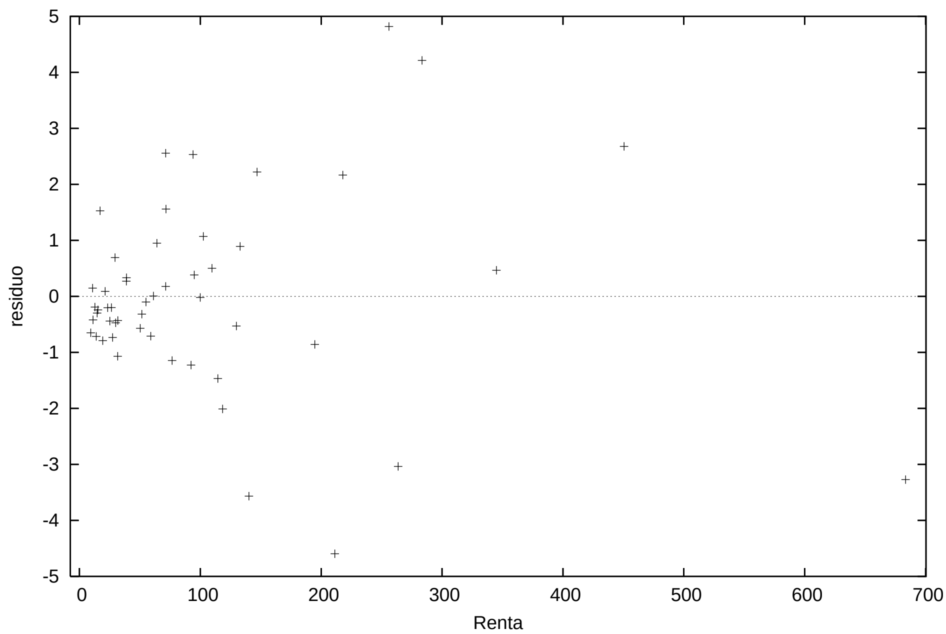
$$\begin{array}{rclll} \hat{Y}_i & = & \underset{(0{,}3197)}{0,3256} + \underset{(0{,}0019)}{0,1420}\, X_i & R^2 = 0,999 & (2) \\ (\widehat{desv}(\hat{\beta}_i)) & & & & \\ (\widehat{desv}(\hat{\beta}_i)_{White}) & & (0,2577) \quad (0,0031) & & \\ \dfrac{\hat{u}_i^2}{\frac{\hat{u}'\hat{u}}{T}} & = & 0,113 + 0,008 X_i + \hat{\epsilon}_i & R^2 = 0,3269 \quad SCE = 55,89 & (3) \end{array}$$

Posteriormente, se dibujan los residuos frente a la renta agregada (figura 13).

[1] CVS Id: $Id: 05e2le.tex,v 1.2 2006/02/07 15:03:04 etpdihei Exp

[2] Rammanathan, R. (2002), *Introductory econometrics with applications*, data 3-2.

Figura 13: Residuos MCO frenta a la Renta (1)



a) Explica cómo crees que se han calculado los residuos y para qué crees que se ha dibujado la Figura 1. Interprétala.

b) Teniendo en cuenta la Figura 1 realiza el contraste que consideres oportuno.

c) Explica, razonando tu respuesta, qué estadístico utilizarías para contrastar la significatividad de la variable renta. Realiza el contraste detallando todos sus elementos.

d) A la vista de los resultados de la estimación del modelo (1) el investigador estima de nuevo el modelo suponiendo la siguiente estructura para la varianza de la perturbación: $Var(u_i) = \sigma^2 X_i$. Se obtienen los siguientes resultados:

```
 Modelo 2: estimaciones M C.Ponderados
utilizando las 51 observaciones 1-51
Variable dependiente: Gasto

VARIABLE COEFICIENTE    DESV.TÍP. ESTAD.T    2Prob(t > |T|)
 const    0,104510    0,162476      0,643    0,523069
 renta    0,144202    0,00259765    55,513   < 0,00001 ***
Estadísticos basados en los datos ponderados:
  Suma de cuadrados de los residuos = 1,14534    R-cuadrado = 0,984348
  Desviación típica de los residuos = 0,152887   R-cuadrado corregido = 0,984029
```

4.a) Razona la forma funcional escogida para la varianza de la perturbación. Explica cómo crees que se han obtenido las estimaciones.

4.b) Suponiendo normalidad en la perturbación, contrasta la significatividad de la variable renta.

e) El investigador no se siente conforme con la forma funcional escogida para $Var(u_i)$ y se propone reestimar el modelo (1) suponiendo que $Var(u_i) = a + bX_i$, donde a y b son desconocidos.

5.a) Explica detalladamente cómo estimarías los coeficientes del modelo (1) bajo este supuesto.

5.b) Suponiendo $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{a} + \hat{b}X_i$. Realiza dicha estimación con la siguiente información muestral:

$$\begin{array}{llll} \sum \hat{u}_i^2 = 148,699 & \sum \hat{u}_i^2 X_i = 34945,67 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i)^2 = 196420,998 & \sum (X_i/\hat{\sigma_i}^2) = 1608,337 \\ \sum (1/\hat{\sigma}_i)^2 = 34,738 & \sum (Y_i/\hat{\sigma_i}^2) = 236,139 & \sum (Y_i X_i/\hat{\sigma_i}^2) = 28484,578 & \sum (Y_i^2/\hat{\sigma_i}^2) = 4168,919 \end{array}$$

5.c) Contrasta la significatividad de la variable explicativa.

f) ¿Qué comentarías sobre la validez de los contrastes realizados en los apartados 3), 4.b) y 5.c)?

PROBLEMA LE-2005.2 (Jun-2005)

La evolución anual de los precios para el período de 1950-1994 para el país A es la siguiente:

$$P_t = \beta_1 + \beta_2 M_t + \beta_3 M_{t-1} + \beta_4 P_{t-1} + u_t \tag{4}$$

Siendo M_t la masa monetaria, variable que se supone no estocástica. La estimación MCO de la ecuación anterior ha proporcionado los siguientes resultados:

$$\hat{P}_t = \underset{(0,231)}{0,46} + \underset{(0,64)}{1,68}\, M_t + \underset{(0,495)}{0,99}\, M_{t-1} + \underset{(0,87)}{2,36}\, P_{t-1} \tag{5}$$
$$R^2 = 0,78 \qquad DW = 0,86 \qquad BG(1) = 6,38$$

a) Enuncia el Teorema de Mann y Wald.

b) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en (5) verifica cuáles de los supuestos de este Teorema no se satisfacen. ¿Qué consecuencias tiene esto sobre las propiedades del estimador MCO?

c) Dado que se incluye como regresor a la variable endógena retardada el investigador decide estimar por variables instrumentales la relación (4). Describe el método de estimación y escribe las cuatro primeras filas de las matrices que utilizarías para calcularlo. Justifica las propiedades de este estimador.

d) Suponiendo que en (4) $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \quad |\rho| < 1$ pero ρ desconocido y $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$. ¿Cuál crees que sería el mejor estimador de los coeficientes del modelo (4)? Explícalo detalladamente.

e) Para contrastar la significatividad de la variable P_{t-1}, ¿qué estadístico de contraste consideras más adecuado?

PROBLEMA LE-2005.3 (Jun-2005)

El director de recursos humanos de una empresa quiere estimar un modelo sobre la productividad de los empleados y cree que esta es diferente según el sexo del empleado. Por ello propone el siguiente modelo:

$$\underset{(T\times 1)}{Y_H} = \underset{(T\times 2)}{X_H}\ \underset{(2\times 1)}{\beta_H} + \underset{(T\times 1)}{u_H} \qquad u_H \sim NID(0,\sigma^2) \tag{6}$$

$$\underset{(T\times 1)}{Y_M} = \underset{(T\times 2)}{X_M}\ \underset{(2\times 1)}{\beta_M} + \underset{(T\times 1)}{u_M} \qquad u_M \sim NID(0,\sigma^2) \tag{7}$$

Donde H-indica observación que pertenece a la muestra masculina y M-indica observación que pertenece a la muestra femenina y $E(u_H^{'} u_M) = 0$

a) Explica razonadamente cuál sería el método de estimación más eficiente del conjunto de parámetros β.

b) Indica cómo contrastarías $H_0 : \beta_H = \beta_M$. No olvides explicar cada uno de los elementos del contraste y cómo los obtendrías.

PROBLEMA LE-2005.4 (Sep-2005)

Se desea estimar una función de producción tipo Cobb-Douglas para el sector agrícola y ganadero en los Estados Unidos. Para ello se dispone de una base[3] de datos anuales para el periodo de 1948 a 1993 sobre los siguientes índices con base en el año 1982:

- Y_t = Índice de la producción agrícola y ganadera (en logaritmos)
- L_t = Índice de utilización del factor trabajo (en logaritmos)
- EX_t = Índice del tamaño de la explotación (en logaritmos)
- K_t = Índice del gasto en maquinaria (en logaritmos)

Se especifica el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + \beta_3 EX_t + \beta_4 K_t + u_t \tag{1}$$

Los resultados de la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_i))}{\hat{Y}_t} &= \underset{(1{,}286)}{4,112} - \underset{(0{,}039)}{0,739}\, L_t + \underset{(0{,}377)}{1,063}\, EX_t - \underset{(0{,}077)}{0,233}\, K_t & (2)\\
R^2 &= 0,974 \qquad DW = 1,304 & \\
\hat{u}_t &= -0,3215 - 0,0068 L_t + 0,084 EX_t - 0,007 K_t + 0,349 \hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t & (3)\\
R^2 &= 0,1225 &
\end{aligned}$$

Se obtiene la serie temporal de los residuos (ver Figura 1).

a) Explica cómo crees que se han calculado los residuos y para qué se ha dibujado la Figura 1. Interpreta el gráfico y comenta si hay evidencia de algún problema.

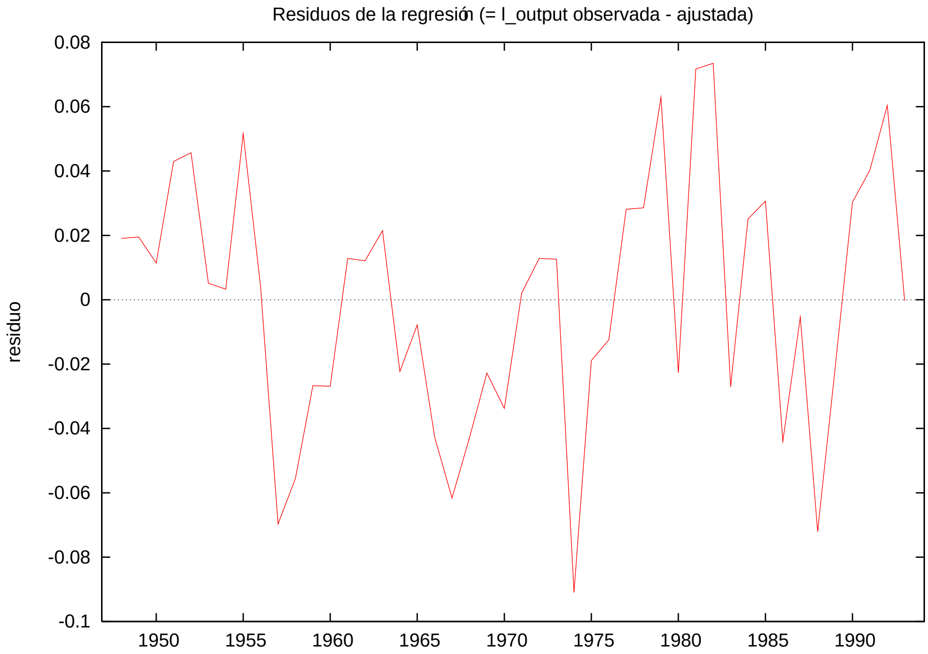
b) Realiza los contrastes de autocorrelación que consideres oportunos utilizando toda la información ofrecida. Explica detalladamente.

c) Explica, razonando tu respuesta, si es fiable contrastar la significatividad del factor trabajo utilizando la información proporcionada en (2). ¿Cómo se debería modificar el estadístico si se sigue utilizando el estimador MCO para estimar el coeficiente β_2?

A la vista de los resultados de la estimación del modelo (1) el investigador estima de nuevo la función de producción por el método de Hildreth y Lu. Los resultados utilizando el programa GRETL son los siguientes:

[3] Rammanathan, R. (2002), *Introductory econometrics with applications*, data 9-5.gdt

Figura 14: Residuos MCO Modelo 1




```
Estimaciones Hildreth-Lu utilizando las 45 observaciones 1949-1993
Variable dependiente: Y
VARIABLE      COEFICIENTE      DESV.TÍP.     ESTAD.T    2Prob(t > |T|)
 const          3,70258        1,30555        2,836     0,007064 ***
     L         -0,741430       0,0434648    -17,058     0,00001 ***
    EX          1,14724        0,378590       3,030     0,004219 ***
     K         -0,224659       0,0906423     -2,479     0,017399 **
```

d) Explica razonadamente qué muestra la figura 2. ¿Qué quiere decir que la SCR sea mínima para rho = 0,35?

e) Explica cómo se han obtenido las estimaciones de los coeficientes.

f) Utilizando los resultados de la estimación por Hildreth y Lu y sabiendo que la estimación de la matriz de covarianzas de los coeficientes es:

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{HL}) = \begin{bmatrix} 1,70446 & 0,03642 & -0,47824 & 0,07057 \\ 0,03642 & 0,00189 & -0,012883 & 0,00307 \\ -0,47824 & -0,01283 & 0,143331 & -0,02647 \\ 0,07057 & 0,00307 & -0,02647 & 0,00827 \end{bmatrix}$$

Contrasta la hipótesis nula $H_0 : \beta_3 = 2\beta_4$. Explica todos los elementos del contraste.

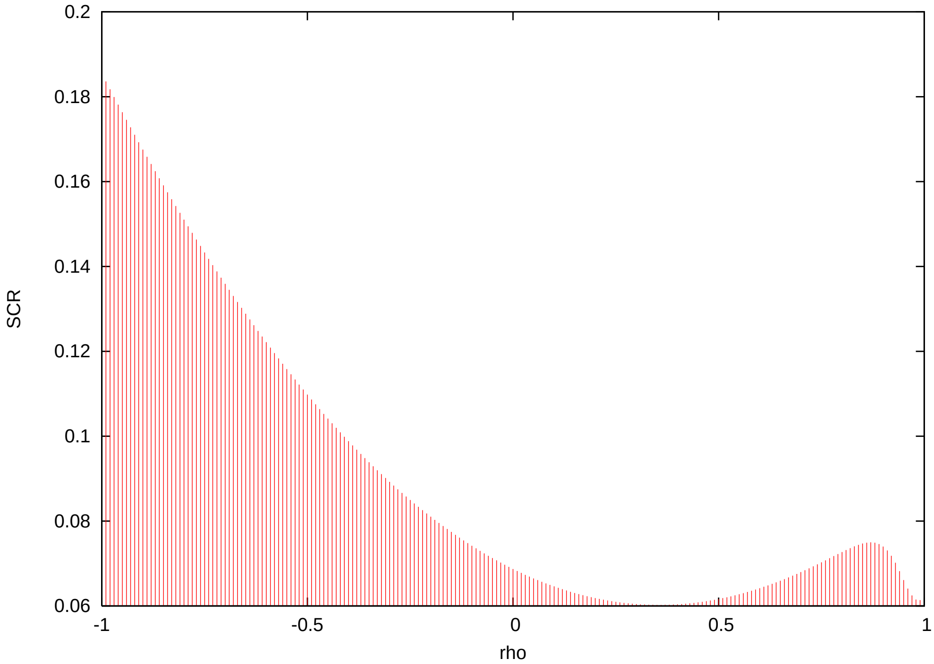
<u>PROBLEMA LE-2005.5</u> (Sep-2005)

En el modelo

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad u_i \sim NID(0, \sigma_i^2) \tag{4}$$

donde $\sigma_i^2 = a + bX_i^2$.

Figura 15: Hildreth-Lu. La SCR es mínima para rho = 0,35



a) Obtén la estimación por Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles utilizando la siguiente información muestral donde $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{a} + \hat{b}X_i^2$ es un estimador consistente de la varianza de u_i :

$$\begin{array}{llll} \sum \hat{u}_i^2 = 148,699 & \sum \hat{u}_i^2 X_i = 34945,67 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i)^2 = 196420,99 & \sum (X_i/\hat{\sigma}_i{}^2) = 1608,34 \\ \sum (1/\hat{\sigma}_i)^2 = 34,74 & \sum (Y_i/\hat{\sigma}_i{}^2) = 236,14 & \sum (Y_i X_i/\hat{\sigma}_i{}^2) = 28484,58 & \sum (Y_i^2/\hat{\sigma}_i{}^2) = 4168,92 \end{array}$$

b) Explica qué ventajas presenta este estimador frente al de Mínimos Cuadrados Ordinarios. Razona tu respuesta.

c) Contrasta la significatividad de la variable explicativa. Explica todos los elementos del contraste.

PROBLEMA LE-2005.6 (Sep-2005)

Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué requisitos debe de satisfacer un instrumento para estimar por el método de Variables instrumentales? ¿Por qué? Razona la respuesta.

b) ¿Se puede detectar con el contraste de Hausman un problema de error de medida en algún regresor? ¿Por qué?

[3] CVS Id: $Id: 05e2e.tex,v 1.3 2006/02/07 15:53:03 etpdihei Exp

PROBLEMA LADE-2005.1 (Jun-2005)

Se dispone de datos anuales del consumo (C_t) y renta (R_t) de USA desde 1950 hasta 1985. Para analizar la proporción de renta que se dedica al consumo se propone el modelo $C_t = \alpha + \beta R_t + u_t$, donde u_t sigue una distribución normal. Al estimar el modelo por MCO se obtienen los siguientes resultados:

$$\widehat{\mathrm{C}}_t = \underset{(1{,}181)}{11{,}374} + \underset{(153{,}603)}{0{,}898}\ \mathrm{R}_t$$

$$T = 36 \quad \bar{R}^2 = 0{,}998 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 12044{,}2$$

(entre paréntesis, los estadísticos t)

a) Para analizar si se ha mantenido constante la dispersión de las perturbaciones a lo largo del tiempo se han realizado dos regresiones :

$$\widehat{\mathrm{C}}_t = 6{,}719 + 0{,}909\mathrm{R}_t \quad \sum \hat{u}_t^2 = 405{,}369 \quad t = 1950, ..., 1963$$
$$\widehat{\mathrm{C}}_t = -187{,}162 + 0{,}99\mathrm{R}_t \quad \sum \hat{u}_t^2 = 3709{,}55 \quad t = 1972, ..., 1985$$

Utiliza estos resultados para contrastar si las perturbaciones del modelo considerado han mantenido constante su dispersión. Explica claramente todos los pasos del contraste.

b) Asimismo, se desea contrastar la posibilidad de que la dispersión de las perturbaciones dependa de R_t. Utiliza una de las siguientes regresiones para realizar dicho contraste. Explica claramente todos los elementos del contraste realizado.

$$(1) \quad \frac{\hat{u}_t^2}{334{,}561} = 1{,}345 + 0{,}345R_t + 0{,}581C_t + \hat{w}_t; \quad R^2 = 0{,}890; \quad \sum \hat{w}_t^2 = 4{,}515$$

$$(2) \quad \hat{u}_t = 7{,}205 + 0{,}014R_t + 0{,}546\hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t; \quad R^2 = 0{,}329; \quad \sum \hat{w}_t^2 = 19{,}455$$

$$(3) \quad \hat{u}_t^2 = -3{,}305 + 0{,}953R_t + \hat{w}_t; \quad R^2 = 0{,}129; \quad \sum \hat{w}_t^2 = 9{,}315$$

$$(4) \quad \frac{\hat{u}_t^2}{334{,}561} = -1{,}272 + 0{,}001R_t + \hat{w}_t; \quad R^2 = 0{,}189; \quad \sum \hat{w}_t^2 = 94{,}651$$

c) Teniendo en cuenta que la renta ha mantenido una tendencia creciente durante los años considerados en la muestra y los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, dibuja en un gráfico el comportamiento que esperas que tengan los residuos MCO frente a R_t.

d) Suponiendo que $Var(u_t) = \sigma^2 R_t^4$ explica detalladamente cómo estimarías de la mejor forma posible los parámetros α y β. Razona qué propiedades tiene el estimador propuesto.

e) Supón ahora que $Var(u_t) = \gamma_0 + \gamma_1 R_t$, donde γ_0 y γ_1 son constantes desconocidas. Explica detalladamente cómo contrastarías la hipótesis de que de cada dolar en que se incrementa la renta se espera que 90 céntimos se dediquen al consumo.

PROBLEMA LADE-2005.2 (Jun-2005)

Con una muestra de 100 observaciones se ha estimado por MCO el siguiente modelo donde X_{1t} y X_{2t} son variables no estocásticas:

$$\widehat{\mathrm{Y}}_t = \underset{(0{,}96)}{3{,}25} + \underset{(0{,}027)}{0{,}086}\ \mathrm{X}_{1t} + \underset{(0{,}009)}{0{,}402}\ \mathrm{X}_{2t} \quad T = 100 \qquad (1)$$

$$DW = 2,05 \quad R^2 = 0,950 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 635,2$$
$$\text{(entre paréntesis, las desviaciones estimadas)}$$

a) Contrasta la significatividad de la variable X_{2t} suponiendo que las perturbaciones del modelo siguen una distribución normal. Ten en cuenta toda la información suministrada en la regresión.

Con los mismos datos se ha obtenido la estimación de otro modelo:

$$\widehat{\mathrm{Y}}_t = \underset{(1{,}04)}{3,82} + \underset{(0{,}027)}{0,088}\ \mathrm{X}_{1t} + \underset{(0{,}010)}{0,403}\ \mathrm{X}_{2t} - \underset{(0{,}023)}{0,032}\ \mathrm{Y}_{t-1} \quad T = 99 \tag{2}$$
$$DW = 1,98 \quad R^2 = 0,951 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 621,4$$
$$\text{(entre paréntesis, las desviaciones estimadas)}$$

También se han obtenido las regresiones auxiliares asociadas al modelo (2):

$$\hat{u}_t = 0,0005 + 0,01\hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t; \qquad R^2 = 0,00005; \quad SCT = 621,4 \tag{3}$$
$$\hat{u}_t = 0,011 + 0,008\hat{u}_{t-1} + 0,0000006X_{1t} - 0,00009X_{2t} - 0,0003Y_{t-1} + \hat{v}_t \tag{4}$$
$$R^2 = 0,00006; \quad SCT = 621,4$$

b) Contrasta de nuevo la significatividad de la variable X_{2t} suponiendo que las perturbaciones del modelo siguen una distribución normal. Utiliza la información de las regresiones auxiliares para comentar la fiabilidad de este contraste.

c) ¿Existe alguna diferencia entre los contrastes de significatividad de los apartados A y B? Si la hay, explícala detalladamente.

d) ¿Con qué modelo preferirías trabajar? Explica por qué.

<u>PROBLEMA LADE-2005.3</u> (Jun-2005)

El dueño de una editorial propone explicar sus ventas de libros a través del modelo:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 G_t + \beta_4 V_{t-1} + u_t \qquad t = 1992:1,\ldots,2001:4 \tag{5}$$

donde V_t denota las ventas, P_t, el precio medio de los libros y G_t, los gastos realizados en publicidad. Las variables P_t y G_t se consideran no estocásticas. Estimado el modelo por MCO se obtiene:

$$\hat{V}_t = \underset{(44{,}64)}{259,42} - \underset{(0{,}40)}{2,14}\,P_t + \underset{(0{,}005)}{0,097}\,G_t + \underset{(0{,}04)}{0,091}\,V_{t-1} \tag{6}$$

$$R^2 = 0,9366 \qquad DW = 1,8998 \qquad SCR = 9608,8056$$

Su hijo piensa que la estimación del modelo anterior por MCO no es la más adecuada. Por tanto, decide realizar la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{V}_{t-1} = 313,53 - 2,09P_{t-1} + 0,10G_{t-1} \tag{7}$$

y utilizar sus resultados para estimar el modelo (5) mediante el método de Variables Instrumentales. El resultado de dicha estimación aparece a continuación:

$$\hat{V}_t = \underset{(45{,}21)}{260,54} - \underset{(0{,}40)}{2,15}\,P_t + \underset{(0{,}005)}{0,097}\,G_t + \underset{(0{,}05)}{0,086}\,V_{t-1} \tag{8}$$

$$R^2 = 0,9354 \qquad DW = 1,7101 \qquad SCR = 9790,8944$$

a) Explica por qué se ha utilizado la regresión auxiliar (7) para obtener los estimadores de Variables Instrumentales del modelo estimado (8). Escribe las expresiones del estimador de variables instrumentales y del estimador de su matriz de varianzas y covarianzas para este modelo concreto, detallando cada matriz utilizada.

b) Realiza el contraste de Hausman y decide, basándote en el resultado obtenido, si es válido el método de estimación utilizado por el padre. Razona tu respuesta.

c) Dado el resultado del apartado anterior, ¿puedes hacer algún comentario sobre el cumplimiento de las hipótesis básicas de las perturbaciones del modelo? Razona la respuesta.

PROBLEMA LADE-2005.4 (Jun-2005)

Se dispone de una muestra de 20 datos anuales de las empresas Citroen y Renault ($i = C$ si la empresa es Citroen, $i = R$ si la empresa es Renault) para las variables:
I_{it} = Inversión Bruta de la empresa *i*
F_{it} = Valor de mercado de la empresa *i* al final del año anterior
C_{it} = Valor del stock de capital de la empresa *i* al final del año anterior Así, se proponen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} I_{Ct} &= \alpha_1 + \beta_1 F_{Ct} + \gamma_1 C_{Ct} + u_{Ct} \qquad u_{Ct} \sim^{iid} (0, \sigma^2) \\ I_{Rt} &= \alpha_2 + \beta_2 F_{Rt} + \gamma_2 C_{Rt} + u_{Rt} \qquad u_{Rt} \sim^{iid} (0, \sigma^2) \end{cases} \tag{9}$$

a) Si se cree que las perturbaciones de ambos modelos están incorrelacionadas entre sí en todo momento del tiempo, ¿cómo estimarías los parámetros de ambos modelos? Escribe detalladamente el modelo a estimar junto con el estimador propuesto y sus propiedades.

b) ¿Cómo contrastarías el hecho de que la estructura de inversión bruta especificada es la misma para la empresa Citroen y para Renault?

PROBLEMA LADE-2005.5 (Sep-2005)

Se propone el siguiente modelo de regresión para estudiar el efecto de los gastos en publicidad, X_i, en los ingresos, Y_i, de los restaurantes de una determinada ciudad:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad u_i \sim NID(0, \sigma_u^2) \tag{1}$$

De una muestra de 166 restaurantes, se dispone del promedio de los ingresos (en miles de euros) y del gasto en publicidad mensual (en cientos de euros) de los restaurantes agrupados según al barrio al que pertenecen.

Barrio	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{Y}_j$	10	12	14	18	17	18	20
$\overline{X}_j$	3	5	9	12	15	17	19
n_j	9	4	36	16	81	4	16

donde $\overline{X}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i\in B_j} X_i$, $\overline{Y}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i\in B_j} Y_i$ y n_j indica el número de restaurantes en el barrio B_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$.

Además, se dispone de la siguiente información:

$$\sum_{j=1}^{7}\sqrt{n_j}\overline{X}_j = 366; \sum_{j=1}^{7}\sqrt{n_j}\overline{Y}_j = 479; \sum_{j=1}^{7}\sqrt{n_j}\overline{X}_j^2 = 5186; \sum_{j=1}^{7}\sqrt{n_j}\overline{Y}_j^2 = 7909; \sum_{j=1}^{7}\sqrt{n_j}\overline{X}_j\overline{Y}_j = 6257$$

$$\sum_{j=1}^{7}\frac{\overline{X}_j}{n_j} = 8,21; \sum_{j=1}^{7}\frac{\overline{Y}_j}{n_j} = 11,59; \sum_{j=1}^{7}\frac{\overline{X}_j^2}{n_j} = 116,09; \sum_{j=1}^{7}\frac{\overline{Y}_j^2}{n_j} = 182,37; \sum_{j=1}^{7}\frac{\overline{X}_j\overline{Y}_j}{n_j} = 138,73$$

$$\sum_{j=1}^{7}n_j\overline{X}_j = 2150; \sum_{j=1}^{7}n_j\overline{Y}_j = 2699; \sum_{j=1}^{7}n_j\overline{X}_j^2 = 30558; \sum_{j=1}^{7}n_j\overline{Y}_j^2 = 44821; \sum_{j=1}^{7}n_j\overline{X}_j\overline{Y}_j = 36461$$

a) Dado que sólo tienes la información de los promedios, ¿en qué modelo podrías estimar los parámetros α y β? Indica la propiedades de las perturbaciones de dicho modelo.

b) Estima eficientemente los parámetros del modelo y describe en detalle el estimador utilizado y sus propiedades.

c) Contrasta si el gasto en publicidad tiene un efecto marginal positivo sobre los ingresos.

d) Sin hacer los cálculos, ¿cómo estimarías el modelo que has propuesto en el apartado 1 si la varianza de las perturbaciones del modelo original (1) aumenta con los gastos en publicidad tal que $\text{Var}(u_i) = \sigma_u^2 X_i$?

PROBLEMA LADE-2005.6 (Sep-2005)

Un investigador está analizando la relación que existe entre el Índice de Producción Industrial medio anual de la CAPV (X_t) y el Valor Añadido del sector industrial (Y_t). Para ello, dispone de datos anuales de ambas variables en los últimos 30 años y propone el siguiente modelo de dos ecuaciones:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + u_{1t} \qquad u_{1t} \sim iid(0, \sigma_u^2) \qquad t = 1975, ..., 1985 \tag{2}$$

$$Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t} \qquad u_{2t} \sim iid(0, \sigma_u^2) \qquad t = 1986, ..., 2004 \tag{3}$$

donde u_1 y u_2 son independientes entre sí.

a) Dado el importante cambio en el proceso productivo industrial a raíz de la entrada en la Comunidad Económica Europea en 1986, comenta brevemente el motivo que puede haber llevado al investigador a especificar dos ecuaciones en lugar de una sola. Escribe el modelo en forma matricial y la correspondiente matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones. Propón el estimador más eficiente para estimar los parámetros del modelo, incluyendo σ_u^2.

b) Supón que la relación entre X e Y no se ha alterado a lo largo de los 30 años. Escribe matricialmente el modelo y propón el estimador más eficiente de los parámetros del modelo, incluyendo σ_u^2.

PROBLEMA LADE-2005.7 (Sep-2005)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad t = 1, \ldots, 100 \tag{4}$$

donde X_2 y X_3 son variables no estocásticas.

Se ha estimado el modelo por MCO obteniéndose la siguiente función de regresión muestral:

$$\underset{\text{(estadístico-t)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,15)}{0,79} + \underset{(10,58)}{12,56}\, X_{2t} - \underset{(-8,35)}{12,43}\, X_{3t} \qquad R^2 = 0,75 \qquad DW = 0,3 \tag{5}$$

a) Realiza un contraste para detectar la posible presencia de un proceso autorregresivo de orden uno en las perturbaciones explicando **detalladamente** todos los pasos.

b) Describe cómo realizar el contraste de Breusch y Godfrey para detectar la posible presencia de autocorrelación de primer orden en las perturbaciones.

c) Si $u_t \sim AR(1)$, propón un estimador asintóticamente eficiente de los parámetros del modelo y un contraste válido para la significatividad de X_3.

PROBLEMA LADE-2005.8 (Sep-2005)

Se quiere analizar si la volatilidad de las acciones del BBVA (X_{1t}) afecta a su rendimiento (Y_t). Para ello se propone el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t \qquad t = 1, 2, ..., 100$$

donde $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ y X_{2t} es el tipo de interés de las letras del tesoro a un año. Un investigador estima el modelo por MCO obteniéndose el siguiente resultado:

$$\hat{Y}_t = 0,7 - 0,3X_{1t} - 0,1X_{2t} \tag{6}$$

con

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = 0,17 \begin{pmatrix} 0,31 & 0,12 & -0,15 \\ 0,12 & 0,31 & 0,07 \\ -0,15 & 0,07 & 0,13 \end{pmatrix}$$

a) Contrasta si la volatilidad afecta al rendimiento de las acciones del BBVA.

b) Otro investigador considera que, aunque X_{2t} puede considerarse una variable no estocástica, la volatilidad está determinada por los mismos factores que afectan al rendimiento y, por lo tanto, u_t y X_{1t} estarán correlacionados. ¿Qué implicaciones tendría este hecho en la estimación por MCO del modelo en la ecuación (6)?

c) Este segundo investigador decide estimar el modelo por VI utilizando como instrumento la volatilidad del Ibex35, obteniendo los siguientes resultados:

$$\hat{Y}_t = 1,3 - 0,7X_{1t} - 0,2X_{2t} \tag{7}$$

con

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{VI}) = 0,21 \begin{pmatrix} 0,41 & 0,23 & -0,25 \\ 0,23 & 0,33 & 0,09 \\ -0,25 & 0,09 & 0,16 \end{pmatrix}$$

Explica **detalladamente** cómo se han obtenido las estimaciones de β_0, β_1 y β_2 y comenta las propiedades de estos estimadores. ¿Qué condiciones tiene que cumplir la volatilidad del Ibex35 para que sirva como instrumento?

d) Explica cómo se ha obtenido $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{VI})$.

e) Contrasta, utilizando los resultados obtenidos mediante VI, si la volatilidad afecta al rendimiento de las acciones del BBVA.

f) Realiza algún contraste para comprobar cuál de los investigadores está actuando mejor a la hora de estimar y contrastar la hipótesis de interés. Explica detalladamente tus conclusiones.

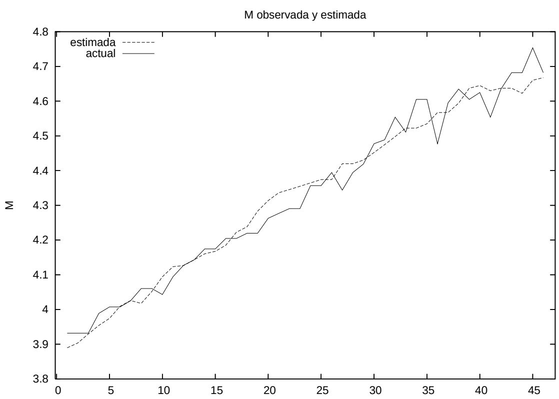
<u>PROBLEMA LE-2006.1</u> (Jun-2006)

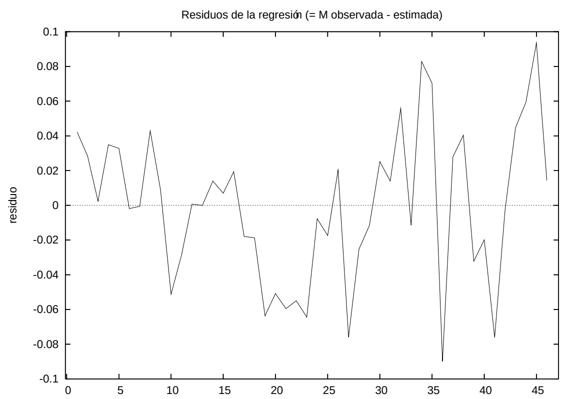
Una empresa familiar dedicada al arreglo de coches siniestrados, encarga a una gestoría un estudio sobre la relación existente entre el número de trabajadores, L, y los beneficios anuales obtenidos (medidos en miles de euros), M, durante los últimos 46 años. El gestor le propone la siguiente relación:

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 L_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{1}$$

donde supone que la variable L_t es no estocástica y la perturbación sigue una distribución normal de media cero. Los resultados de la estimación MCO son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_i))}{\widehat{M}_t} = \underset{(0{,}0843)}{7,4408} - \underset{(0{,}0170)}{0,6310}\, L_t \qquad R^2 = 0,968 \qquad DW = 1,333 \qquad t = 1, \ldots, 46 \tag{2}$$





Además se dispone de las siguientes regresiones auxiliares:

$$\frac{\hat{u}_t^2}{\hat{u}'\hat{u}} = 0,7734 + 0,1225 L_t + \hat{\xi}_{1t} \qquad SCR = 45,8741 \qquad R^2 = 0,1209 \qquad (A)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/46)} = 0,1740 + 0,0351\, t + \hat{\xi}_{2t} \qquad SCR = 60,5979 \qquad R^2 = 0,1418 \qquad (B)$$

$$\frac{\hat{u}_t}{(\hat{u}'\hat{u}/46)} = 0,2232 - 0,3517\, t + 2,4571 L_t + \hat{\xi}_{3t} \qquad SCR = 36,3244 \qquad R^2 = 0,2187 \qquad (C)$$

$$\hat{u}_t = 0,2992 \hat{u}_{t-1} + 0,0464 \hat{u}_{t-2} + \hat{\xi}_{4t} \qquad SCR = 0,0733 \qquad R^2 = 0,1010 \qquad (D)$$

1. Interpreta el coeficiente α_2, ¿cuál es el signo que esperas?

2. Comenta los gráficos. ¿Crees que el **modelo** (1) cumple todas las hipótesis básicas?

3. Basándote en la información proporcionada, ¿qué supuestos sobre la perturbación podrías contrastar? Realiza los posibles contrastes indicando todos los elementos necesarios.

No satisfecho con los resultados el gestor procede a estimar el siguiente modelo alternativo:

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + \beta_3 L_t^2 + v_t \quad t = 1, \ldots, T \tag{3}$$

cuyos resultados aparecen en la siguiente tabla:

Modelo 3: estimaciones MCO utilizando las 46 observaciones 1948–1993
Variable dependiente: M

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	421,905	21,0849	20,0098	0,0000
L	-72,228	4,71511	-15,3185	0,0000
L^2	0,000484685	8,99453e-05	5,3887	0,0000

Media de la var. dependiente	78,0652	R^2	0,962685
D.T. de la variable dependiente	18,9975	$\bar{R}^2$ corregido	0,960949
Suma de cuadrados de los residuos	606,028	$F(2,43)$	554,674

4. ¿Qué pretende recoger el nuevo término?

Además se dispone de los siguientes resultados:

Modelo A: estimaciones MCO utilizando las 46 observaciones 1–46
Variable dependiente: $\dfrac{\hat{v}_t^2}{(\hat{v}'\hat{v})/46}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-0,132741	0,391608	-0,3390	0,7362
t	0,0482018	0,0145090	3,3222	0,0018

Media de la var. dependiente	1,00000	R^2	0,200538
D.T. de la variable dependiente	1,44478	$\bar{R}^2$ corregido	0,182368
Suma de cuadrados de los residuos	75,0956	Grados de libertad	44
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1,30641	Estadístico de Durbin–Watson	2,08620

Modelo B: estimaciones MCO utilizando las 45 observaciones 2–46
Variable dependiente: $\hat{v}_t$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	-0,144956	1,26964	-0,1142	0,9097
L	0,0583956	0,513785	0,1137	0,9101
L^2	-0,00585360	0,0517415	-0,1131	0,9105
$\hat{v}_{t-1}$	0,194001	0,153777	1,2616	0,2142

Media de la var. dependiente	-8,41529e-05	R^2	0,0374139
D.T. de la variable dependiente	0,0400752	$\bar{R}^2$ corregido	-0,0330193
Suma de cuadrados de los residuos	0,0680212	F(3,41)	0,531197
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	0,0407315	Estadístico de Durbin–Watson	1,97476

5. Basándote en la información contenida en las dos tablas anteriores:

   i. ¿Qué concluyes sobre las características de la perturbación?

   ii. ¿A qué se debe la contradicción que se obtiene entre los Apartados 3 y 5.i?

6. A la vista de los resultados obtenidos en la estimación del modelo (3), ¿cuáles son las consecuencias sobre el estimador de MCO y las desviaciones estimadas mostradas?

Otro de los socios de la gestoría presenta los siguientes resultados obtenidos empleando otro estimador alternativo.

Modelo C: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 46 observaciones 1948–1993
Variable dependiente: M
Variable utilizada como ponderación: $\dfrac{1}{t}$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	147,113	4,21100	34,9355	0,0000
L	-0,666136	0,0404821	-16,4551	0,0000
L^2	0,00115263	9,35801e-05	12,3170	0,0000

7. Escribe la función de regresión poblacional que se está estimando e indica cuáles son los supuestos sobre la perturbación que se han asumido. ¿Cuál es el método de estimación que se está empleando? Escribe la fórmula matricial del estimador y cada uno de sus componentes.

8. Dado el supuesto realizado sobre la varianza de u_t, ¿cuál es el correspondiente modelo transformado con perturbaciones esféricas? Demuéstralo. Para este modelo, indica cuáles son los pasos necesarios para obtener dichas estimaciones y el valor de éstas.

9. ¿Cómo contrastarías si el número de trabajadores de la empresa es relevante para determinar el beneficio medio anual?

<u>PROBLEMA LE-2006.2</u> (Jun-2006)

Se dispone de 62 observaciones sobre las siguientes características de los terremotos registrados en Alaska durante el periodo 1969-1978[4]:

Y_t El logaritmo de la amplitud de onda en metros por segundo, (m/sg).

X_t^* El logaritmo de la amplitud del cuerpo longitudinal de la onda en m/sg.

W_t El logaritmo de la traza máxima de amplitud de onda a corta distancia en m/sg.

[4] *Fuente:* Fuller, W.A. (1987). *Measurement Error Models*. Wiley, New York.

Se quiere estimar cuál es el efecto sobre Y_t de la velocidad de amplitud del cuerpo de la onda de un terremoto, X_t, mediante el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + v_t \qquad v_t \sim NID(0, \sigma_v^2) \tag{4}$$

La tecnología existente no permite obtener directamente el valor de la variable no estocástica X_t por lo que se aproxima mediante $X_t^* = X_t + e_t$, donde X_t^* es la variable observada y $e_t \sim \text{NID}(0, \sigma_e^2)$ es el error de medida. Además, la perturbación del modelo, v, y el error de medida, e, son independientes. Se han obtenido los siguientes resultados a partir del estimador de Mínimos Cuadrados ordinarios (MCO).

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_i))}{Y_t} = \underset{(0{,}780)}{-1{,}491} + \underset{(0{,}149)}{1{,}261}\, X_t^* + \hat{u}_t\,, \qquad SCR = 17{,}242.$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,118 & -0,403 \\ -0,403 & 0,077 \end{bmatrix}^{-1}$$

1. Obtén paso a paso cada uno de los siguientes valores:

   $u_t =$

   $E(u_t) =$

   $Var(u_t) =$

   $Cov(u_t, u_s) =$

   $E(X_t^* u_t) =$

2. Razona las propiedades en muestras finitas y asintóticas del estimador MCO.

El modelo anterior ha sido reestimado por variables instrumentales (VI). Para ello se ha utilizado como instrumento para el regresor X_t^* a la variable W_t, cuya medición se puede realizar con exactitud. Se han obtenido los siguientes resultados.

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}_{i,VI}))}{Y_t} = \underset{(1{,}114)}{-4{,}287} + \underset{(0{,}213)}{1{,}797}\, X_t^* + \hat{u}_t\,, \qquad SCR = 20{,}961.$$

3. Escribe **explícitamente** la fórmula del estimador de VI y su expresión en términos de sumatorios.

4. Escribe explícitamente las condiciones necesarias para que el estimador de VI sea consistente.

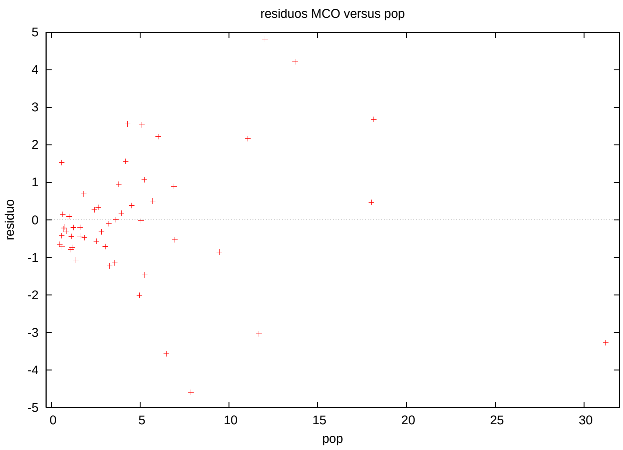
5. Lleva a cabo el contraste de Hausman para analizar si es o no importante el problema de error de medida. Escribe la hipótesis nula, la alternativa y todos los elementos del contraste, así como su conclusión.

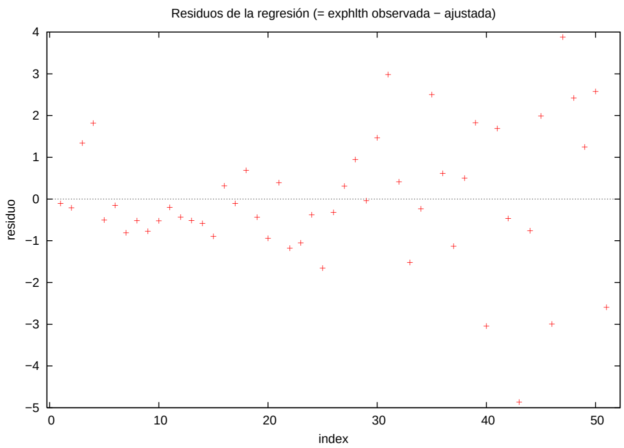
6. Contrasta la hipótesis de que, en media, la amplitud del cuerpo longitudinal de la onda recogida en un sismógrafo no es relevante sobre la amplitud de la onda.

<u>PROBLEMA LE-2006.3</u> (Sep-2006)

El Departamento de Sanidad de E.E.U.U. quiere estudiar la relación entre el gasto sanitario agregado en billones de dólares (exphlth), la renta personal disponible agregada también en billones de dólares (income), el porcentaje de población que supera los 65 años en el año 2005 (seniors) y la población en millones (pop). Para ello encarga un estudio a dos becarios de la facultad de Económicas de Harvard poniendo a su disposición datos de 2005 para dichas variables sobre 51 estados americanos y los siguientes resultados:

```
 Modelo 1: estimaciones MCO utilizando las
51 observaciones 1-51 Variable dependiente: exphlth

      VARIABLE      COEFICIENTE      DESV.TÍP.      ESTAD.T   2Prob(t > |T|)

   0)    const        -3,55153            1,40710      -2,524    0,014965 **
   2)   income         0,142035           0,00184017   77,186   < 0,00001 ***
   4)  seniors         0,305816           0,108449      2,820    0,006962 ***

  Media de la var. dependiente = 15,2649
  D.T. de la var. dependiente = 17,8877
  Suma de cuadrados de los residuos = 127,565
  Desviación típica de los residuos = 1,63022
  R-cuadrado = 0,992026
  R-cuadrado corregido = 0,991694
  Estadístico F (2, 48) = 2985,94 (valor p < 0,00001)
  Estad. de Breusch-Pagan para la varianza en función de POP = 15,13
```





El **becario A** supone que las variables income, seniors y pop son no estocásticas, que la perturbación sigue una distribución normal y **concluye** que *tanto la renta como el porcentaje de población mayor de 65 años son variables individualmente significativas para explicar el gasto sanitario* y presenta los siguientes resultados:

```
Modelo becario A: estimaciones MCO utilizando las 51 observaciones
1-51 Variable dependiente: exphlth

Desviaciones típicas robustas a heterocedasticidad, variante HC3

      VARIABLE      COEFICIENTE      DESV.TÍP.      ESTAD.T   2Prob(t > |T|)
```

```
       const        -3,55153            1,57010      -2,262    0,028265 **
      income         0,142035           0,00264576   53,684   < 0,00001 ***
     seniors         0,305816           0,121408      2,519    0,015157 **

  Media de la var. dependiente = 15,2649
  D.T. de la var. dependiente = 17,8877
  Suma de cuadrados de los residuos = 127,565
  Desviación típica de los residuos = 1,63022
  R-cuadrado = 0,992026
  R-cuadrado corregido = 0,991694
  Estadístico F (2, 48) = 1451,55 (valor p < 0,00001)
```

1. ¿Qué modelo está estimando el becario A? Analiza la información proporcionada en los gráficos y realiza los contrastes que consideres oportunos.

2. ¿Qué supuestos está realizando sobre la media, varianza y covarianzas de la perturbación?, ¿qué método de estimación está utilizando?

3. ¿Estás de acuerdo con sus conclusiones sobre la significatividad individual de las variables? Realiza los contrastes que creas oportunos para justificar tus argumentos.

Al mismo tiempo **el becario B**, que también supone que las variables income, seniors y pop son no estocásticas y que la perturbación sigue una distribución normal llega a las mismas conclusiones sobre la significatividad individual de las variables. Presenta los resultados siguientes:

```
 Modelo becario B: estimaciones MC.Ponderados utilizando las 51 observaciones 1-51
Variable dependiente: exphlth

Variable utilizada como ponderación: 1/pop

      VARIABLE      COEFICIENTE      DESV.TÍP.      ESTAD.T   2Prob(t > |T|)

       const        -1,12626            0,408314     -2,758    0,008196 ***
      income         0,142343           0,00493399   28,849   < 0,00001 ***
     seniors         0,106763           0,0330614     3,229    0,002242 ***

Estadísticos basados en los datos ponderados::

  Suma de cuadrados de los residuos = 12,3508
  Desviación típica de los residuos = 0,507256
  R-cuadrado = 0,947736
  R-cuadrado corregido = 0,945558
  Estadístico F (2, 48) = 435,207 (valor p < 0,00001)
```

4. ¿Qué modelo está estimando el becario B?, ¿qué supuesto está realizando sobre la varianza de la perturbación?, ¿qué método de estimación está utilizando?

5. ¿Estás de acuerdo con sus conclusiones sobre la significatividad individual de las variables? Realiza los contrastes que creas oportunos para justificar tus argumentos.

6. Valora el comportamiento de ambos investigadores. ¿Cuál te parece más adecuado?

PROBLEMA LE-2006.4 (Sep-2006)

Un agricultor quiere conocer la relación que existe entre la cantidad de fresas recolectadas en sus tierras, Q, medida en kilogramos, y el número de jornaleros contratados, L. Para ello encarga un estudio sobre la relación entre ambas variables a un económetra, quien especifica el siguiente modelo:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 L_t + u_t \qquad t = 1970, \ldots, 2004 \tag{1}$$

donde L_t es no estocástica y u_t sigue una distribución normal. La estimación MCO presenta los siguientes resultados:

$$\underset{\text{(estad-t)}}{\widehat{Q}_t} = \underset{(36,62)}{1115,93} - \underset{(-14,20)}{2,4462}\, L_t \qquad R^2 = 0,8594 \qquad DW = 0,3210 \qquad T = 35 \tag{2}$$

Además se dispone de las siguientes regresiones, donde $\hat{u}_t$ son los residuos obtenidos de (2):

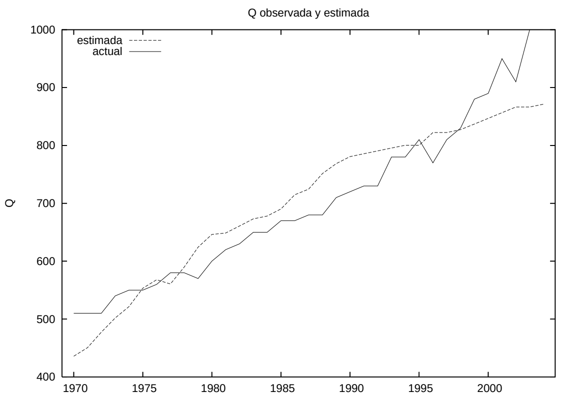
$$\hat{u}_t = 31,25 - 0,1814L_t + 0,8958\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{1t} \qquad SCR = 26981,8 \qquad R^2 = 0,7041 \qquad (A)$$

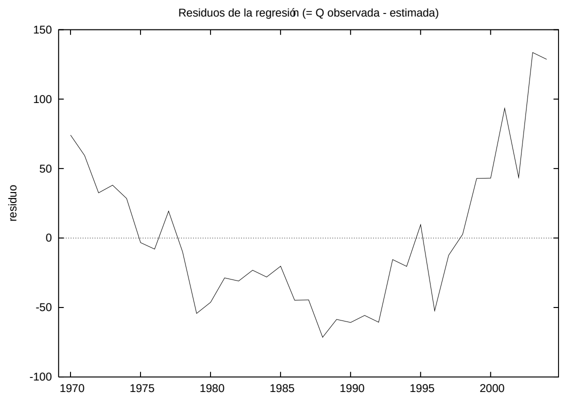
$$\hat{u}_t = 1,1397 + 0,8958\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{2t} \qquad SCR = 29807,6 \qquad R^2 = 0,6731 \qquad (B)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/35)} = 0,4432 + 2,2378L_t + \hat{\zeta}_{3t} \qquad SCR = 70,4985 \qquad R^2 = 0,0427 \qquad (C)$$

$$\frac{\hat{u}_t^2}{(\hat{u}'\hat{u}/35)} = 1,7899 + 0,9955\hat{u}_{t-1} + \hat{\zeta}_{4t} \qquad SCR = 55,2297 \qquad R^2 = 0,0577 \qquad (D)$$

Y de los siguientes gráficos:





1. ¿La muestra se compone de datos de sección cruzada o datos temporales?, ¿por qué?

2. Interpreta el coeficiente β_2, ¿cuál es el signo que esperas?

3. Comenta el gráfico que representa los valores reales y los ajustados de la variable endógena. ¿Crees que se trata de un buen ajuste? Comenta el gráfico de los residuos. A la vista de ambos gráficos, ¿crees que el **modelo** cumple todas las hipótesis básicas?

4. Basándote en la información proporcionada verifica si las **perturbaciones** cumplen las hipótesis básicas.

5. Dada la evidencia encontrada explica cuáles son las consecuencias sobre el estimador MCO de los coeficientes y la fiabilidad de los estadísticos mostrados.

A la vista de los resultados obtenidos en los contrastes anteriores el económetra estima la relación (1) empleando otro estimador que cree más adecuado al contexto. Los resultados que obtiene son los siguientes:

Modelo 2: estimaciones Cochrane–Orcutt utilizando las 34 observaciones 1971–2004
Variable dependiente: Q
iteración final $\hat{\rho}$ = 0,976619

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	1456,54	186,561	7,8073	0,0000
L	2,74197	1,13652	2,4126	0,0217

6. ¿Qué método de estimación se está empleando? Especifica detalladamente todos los pasos que se han de llevar a cabo para obtener todas las estimaciones anteriores. ¿Por qué es más adecuado que el anterior? Razona tu respuesta basándote en las propiedades del estimador.

En una conversación con el agricultor, éste le comenta que en general a una buena cosecha, le suceden buenas cosechas y que cuando se obtiene una mala cosecha es muy probable que las siguientes sean malas también. Esto hace reflexionar al económetra porque pudiera ser que la cantidad de fresas recogidas en la temporada anterior influyera en la cosecha actual. En base a su sospecha el económetra especifica y estima el siguiente modelo:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 L_t + \alpha_3 Q_{t-1} + w_t \tag{3}$$

Resultados de la estimación:

Modelo 3: estimaciones MCO utilizando las 34 observaciones 1971–2004
Variable dependiente: Q

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	90,9866	99,9536	0,9103	0,3697
L	-0,230355	0,0115477	-1,9948	0,0470
Q_{t-1}	0,944638	0,0898926	10,5085	0,0000

Estadístico de Durbin-Watson = 3,10304

Además se dispone de las siguientes regresiones auxiliares:

$$\hat{w}_t = 21,32 - 0,1766 L_t + 0,8788 \hat{w}_{t-1} + \hat{\eta}_{1t} \qquad SCR = 25671,3 \qquad R^2 = 0,4734 \quad (E)$$

$$\hat{w}_t = 1,7943 + 0,2398 \hat{w}_{t-1} + 0,5647 Q_{t-1} + \hat{\eta}_{2t} \qquad SCR = 23398,1 \qquad R^2 = 0,4767 \quad (F)$$

$$\hat{w}_t = -255,47 + 0,579406 L_t + 0,231059 Q_{t-1} - 0,804475 \hat{w}_{t-1} + \hat{\eta}_{3t} \qquad SCR = 10958,4 \qquad R^2 = 0,4869 \quad (G)$$

$$\frac{\hat{w}_t^2}{(\hat{w}'\hat{w}/34)} = 0,4432 + 2,2378 L_t + \hat{\eta}_{4t} \qquad SCR = 77,8328 \qquad R^2 = 0,05665 \quad (H)$$

$$\frac{\hat{w}_t}{(\hat{w}'\hat{w}/34)} = 3,9229 + 2,2552 \hat{w}_{t-1} + 0,3463 Q_{t-1} + \hat{\eta}_{5t} \qquad SCR = 50,0805 \qquad R^2 = 0,0064 \quad (I)$$

7. Realiza los contrastes que creas oportunos y calcula o razona las siguientes igualdades:

$E(w_t) =$

$E(w_t^2) =$

$Cov(w_t, w_s) =$

$E(L_t w_t) =$

$E(Q_{t-1} w_t) =$

$E(\hat{\beta}_{MCO}) =$

8. ¿Qué puedes decir sobre el Teorema de Mann y Wald y la consistencia de estimador MCO?

9. Para poder comprobar que la cosecha de la temporada anterior es un factor que determina la cosecha actual se ha obtenido la siguiente estimación **consistente, asintóticamente eficiente** y válida para hacer inferencia del modelo (3):

$$\underbrace{\underset{(\widehat{desv}(\hat{\alpha}_i))}{Q_t - \hat{\rho} Q_{t-1}}}_{Q_t^*} = 25,28 \underbrace{(1-\hat{\rho})}_{X_t^*} + \underset{(0{,}125)}{0,064} \underbrace{(L_t - \hat{\rho} L_{t-1})}_{L_t^*} + \underset{(0{,}048)}{1,067} (Q_{t-1} - \hat{\rho} Q_{t-2}) + \hat{\epsilon}_t \qquad (4)$$

$$R^2 = 0,981 \qquad DW = 1,98$$

siendo ϵ_t es un ruido blanco tal que $\epsilon_t = w_t - \rho w_{t-1}$ y w_t son las perturbaciones del modelo (3).

Completa y/o realiza lo siguiente:

a) $\epsilon_t \sim (\quad , \quad)$

b)

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \end{bmatrix}_{\dots\dots\dots} = \begin{bmatrix} 25,28 \\ 0,064 \\ 1,067 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

c) ¿Cuál es el estimador consistente de ρ empleado? Describe todos los elementos y las condiciones que te garantizan la consistencia del parámetro ρ estimado.

d) ¿Es cierto que la cosecha de la temporada anterior es un factor que determina la cosecha actual? ¿Qué implicaciones tiene el resultado?

<u>PROBLEMA LADE-2006.1</u> (Jun-2006)

Para analizar el precio de las viviendas (en miles de dólares) de San Diego en 1990 (Y_i) en función del área de la vivienda (pies al cuadrado) (A_i) y el número de habitaciones (H_i), se dispone de una muestra de 14 viviendas Se especifica el siguiente modelo de regresión lineal:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 A_i + \beta_3 H_i + u_i \qquad i = 1, \ldots, 14$$

Se ha estimado el modelo por MCO, obteniéndose:

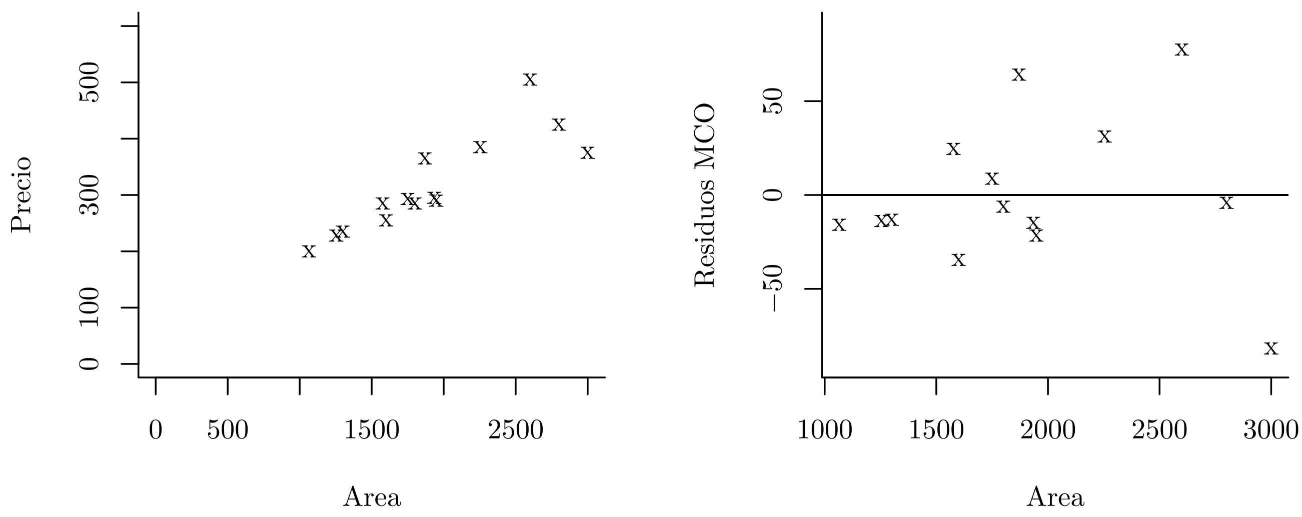
$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_i} = \underset{(89{,}564)}{146{,}730} + \underset{(0{,}024)}{0{,}138}\, A_i - \underset{(27{,}527)}{25{,}957}\, H_i \qquad R^2 = 0{,}7749 \quad SCR = 21000{,}44$$

Las regresiones auxiliares:

$$\frac{\hat{u}_i^2}{1500{,}03} = -2{,}106 + 0{,}002 A_i + \hat{\omega}_i \qquad R^2 = 0{,}3727 \quad SCR = 19{,}294$$

$$\frac{\hat{u}_i^2}{21000{,}44} = -0{,}150 + 0{,}001 A_i + \hat{\omega}_i \qquad R^2 = 0{,}3727 \quad SCR = 0{,}098$$

y los gráficos:



a) Interpreta $\hat{\beta}_2$.

b) ¿Hay evidencia de incumplimiento de alguna hipótesis básica sobre la perturbación? Básate en los gráficos y la información proporcionada en las regresiones auxiliares.

c) ¿Qué puedes decir sobre la fiabilidad de las desviaciones estimadas **mostradas**?

d) Supón que $V(u_i) = \sigma^2 A_i$ y el resultado de la estimación del modelo por MCG es:

$$\underset{(estad.\, t)}{\hat{Y}_i} = \underset{(1{,}414)}{104{,}029} + \underset{(6{,}000)}{0{,}141}\, A_i - \underset{(-0{,}634)}{15{,}625}\, H_i$$

Detalla cómo se ha obtenido $\tilde{\beta}_{MCG}$.

e) ¿Es la variable explicativa área de la vivienda significativa? ¿Y el número de habitaciones? Haz los contrastes, detallando sus elementos. (Supuesto: $u_i \sim N$)

PROBLEMA LADE-2006.2 (Jun-2006)

Un estudio propone el siguiente modelo para explicar las ventas de un producto (Y_t) en función del precio (P_t) y de los gastos en publicidad (G_t) para dos países distintos A y B.

$$\begin{array}{rcll} Y_t^A & = & \beta_0 + \beta_1 P_t^A + \beta_2 G_t^A + u_t^A & \quad t = 1, \ldots, T \\ Y_t^B & = & \gamma_0 + \gamma_1 P_t^B + \gamma_2 G_t^B + u_t^B & \quad t = 1, \ldots, T \end{array}$$

Sabiendo que $u_t^A \sim NID(0, \sigma_A^2)$, $u_t^B \sim NID(0, \sigma_B^2)$ y $E(u_t^A u_t^B) = \sigma_{AB}$, con σ_A^2, σ_B^2 y σ_{AB} desconocidas,

a) Describe **detalladamente** el estimador con mejores propiedades de los coeficientes y sus varianzas en el modelo formado por estas ecuaciones.

b) Razona las propiedades del estimador de los coeficientes anterior, tanto en muestras finitas como asintóticas.

PROBLEMA LADE-2006.3 (Jun-2006)

Se quiere analizar la relación que hay entre los dividendos anuales de una empresa (Y_t) y su nivel de beneficios anual (X_t), para lo que se propone el siguiente modelo

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \tag{1}$$

donde X_t se considera **un regresor estocástico independiente de la perturbación**.

Con los datos de los últimos 60 años se ha estimado (1) por MCO obteniéndose

$$\underset{(\widehat{desv})}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,46)}{1,59} + \underset{(0,14)}{0,12}\, X_t \qquad t = 1, 2, ..., 60,$$
$$R^2 = 0,75\ , \quad SCR = 24,45\ , \quad DW = 0,95$$

a) Contrasta la significatividad de los beneficios en el nivel de dividendos.

Además, con los residuos MCO, $\hat{u}_t$, se ha estimado por MCO la siguiente relación

$$\hat{u}_t = 0,41 + 0,32\hat{u}_{t-1} + 0,12 X_t + \hat{\varepsilon}_t \qquad R^2 = 0,17\ , \quad SCR = 7,22$$

b) Realiza un contraste para comprobar si las perturbaciones del modelo (1) cumplen la hipótesis básica de no autocorrelación. Explica detalladamente cómo se calculan todos los elementos del contraste.

c) De acuerdo con tu respuesta en (b), ¿qué propiedades tiene el estimador MCO de (1)? ¿Y el contraste propuesto en (a)?

d) Otro investigador considera que el tipo de interés (Z_t) influye también en los dividendos y por lo tanto estima por MCO un modelo que incluye esta variable:

$$\underset{(desv)}{\widehat{Y_t}} = \underset{(0,36)}{1,23} + \underset{(0,07)}{0,23}\, X_t + \underset{(0,04)}{0,16}\, Z_t + \hat{v}_t \qquad t = 1, 2, ..., 60,$$
$$R^2 = 0,86 \ , \quad SCR = 17,45 \ , \quad DW = 2,05$$

Con los residuos MCO, $\hat{v}_t$, se ha estimado por MCO la relación

$$\hat{v}_t = 0,25 + 0,07\hat{v}_{t-1} + 0,11X_t + 0,21Z_t + \hat{\eta}_t \qquad R^2 = 0,03 \ , \quad SCR = 4,22$$

Dados estos resultados, ¿cuáles son las propiedades del estimador MCO del **modelo (1)**? Razona tu respuesta, apoyándote en los contrastes oportunos.

PROBLEMA LADE-2006.4 (Jun-2006)

Sea el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \qquad u_t \sim iid(0, \sigma_u^2) \qquad t = 1, \ldots, 100 \tag{2}$$

donde X_{2t} es una variable no estocástica, X_{3t} es una variable aleatoria incorrelacionada con u_t y $X_{4t} = 0,4X_{4,t-1} + v_t$ siendo v_t un ruido blanco y tal que $E(v_t u_t) = \sigma_{uv}$ y $E(v_t u_s) = 0 \ \ \forall t \neq s$.

a) Calcula y razona:

$E(X_{2t}u_t) =$

$E(X_{3t}u_t) =$

$E(X_{4t}u_t) =$

b) Razona las propiedades del estimador MCO en (2)

c) Propón un estimador alternativo a MCO que sea consistente en (2), especificando sus componentes. ¿Es asintóticamente eficiente?

d) Con el estimador que has propuesto en el apartado (c), explica cómo contrastarías la significatividad individual de X_{3t}. Escribe la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y su distribución así como la regla de decisión.

PROBLEMA LADE-2006.5 (Sep-2006)

Se dispone de datos anuales del consumo (C_t) y renta (R_t) de USA desde 1950 hasta 1985. Para analizar la proporción de renta que se dedica al consumo se propone el modelo $C_t = \alpha + \beta R_t + u_t$, donde u_t sigue una distribución normal. Al estimar el modelo por MCO se obtienen los siguientes resultados:

$$\widehat{C}_t = \underset{(1,181)}{11,374} + \underset{(153,603)}{0,898}\ R_t$$

$$T = 36 \quad \bar{R}^2 = 0,998 \quad \sum \hat{u}_t^2 = 12044,2$$
(entre paréntesis, los estadísticos t)

Para analizar si se ha mantenido constante la dispersión de las perturbaciones a lo largo del tiempo se han realizado dos regresiones :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{C}}_t &= 6,719 + 0,909\mathrm{R}_t \quad \sum \hat{u}_t^2 = 405,369 \quad t = 1950,...,1963 \\
\widehat{\mathrm{C}}_t &= -187,162 + 0,99\mathrm{R}_t \quad \sum \hat{u}_t^2 = 3709,55 \quad t = 1972,...,1985
\end{aligned}$$

Utiliza estos resultados para contrastar si las perturbaciones del modelo considerado han mantenido constante su dispersión. Explica claramente todos los pasos del contraste.

PROBLEMA LADE-2006.6 (Sep-2006)

Se quiere analizar la relación que hay entre los dividendos anuales de una empresa (Y_t) y su nivel de beneficios anual (X_t), para lo que se propone el siguiente modelo

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \tag{1}$$

donde X_t se considera no estocástico. Con los datos correspondientes a los últimos 60 años se ha estimado (1) por MCO obteniéndose

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\hat{Y}_t} = \underset{(0,46)}{1,59} + \underset{(0,14)}{0,12}\, X_t \qquad t = 1,2,...,60, \tag{2}$$

$$R^2 = 0,75 \qquad SCR = 24,45 \qquad \sum_{t=2}^{60} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})\hat{u}_{t-1} = -11,98 \tag{3}$$

$$\sum_{t=2}^{60} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} = 13,02 \qquad \sum_{t=2}^{60} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 22,12$$

a) Realiza un contraste para comprobar si las perturbaciones del modelo (1) cumplen las hipótesis básicas.

b) De acuerdo con tu respuesta en a), demuestra las propiedades en muestras finitas del estimador MCO de (1).

c) Suponiendo que las perturbaciones fuesen un AR(1), describe como estimarías de la mejor forma posible los parámetros del modelo.

d) Suponiendo que las perturbaciones fuesen un AR(1), describe detalladamente como realizarías el contraste de significatividad de X_t.

e) Otro investigador considera que el tipo de interés (Z_t, no estocástica) influye también en los dividendos y por lo tanto estima por MCO un modelo que incluye Z_t

$$\underset{\widehat{(desv)}}{Y_t} = \underset{(0,36)}{1,23} + \underset{(0,07)}{0,23}\, X_t + \underset{(0,04)}{0,16}\, Z_t + \hat{v}_t \qquad t = 1,2,...,60, \tag{4}$$

$$R^2 = 0,86\ , \quad SCR = 17,45\ , \quad DW = 2,05$$

¿Encuentras alguna evidencia de que las perturbaciones en el modelo estimado incumplan alguna hipótesis básica?

f) Con la información obtenida en el apartado e), razona las propiedades asintóticas del estimador MCO **del modelo (1)**.

PROBLEMA LADE-2006.7 (Sep-2006)

Sea el modelo a estimar:

$$Y_t = \beta X_t + u_t \qquad u_t \sim iid(0, \sigma_u^2) \qquad t = 1, \ldots, 100 \tag{5}$$

y se sabe que $X_t = 0,5X_{t-1} + w_t$ donde w_t es un ruido blanco tal que

$$E(w_t u_s) = \begin{cases} 4 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$$

a) Demuestra las propiedades del estimador MCO en el modelo (5).

Se dispone de la siguiente información muestral:

	Y_t	X_t	X_{t-1}
Y_t	140	70	50
X_t		90	84
X_{t-1}			87

b) Estima β de una forma consistente.

c) Contrasta la significatividad de la variable X_t suponiendo que $\sigma_u^2 = 1$.

d) Si la única información disponible sobre X_t es que es una variable estocástica, realiza un contraste que te ayude a decidir qué método de estimación utilizar.

e) Si $E(u_t w_s) \neq 0 \; \forall t, s$ ¿qué hubiese cambiado en tus respuestas a los apartados b) y c)?

PROBLEMA LADE-2006.8 (Sep-2006)

Sea el modelo formado por las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 Z_{1t} + u_t \qquad u_t \sim NID(0, \sigma_u^2 = 3) \qquad t = 1 \ldots, T \\ Y_{2t} &= \gamma_0 + \gamma_1 X_{2t} + \gamma_2 Z_{2t} + w_t \qquad w_t \sim NID(0, \sigma_w^2 = 2) \qquad t = 1 \ldots, T \end{aligned}$$

donde $cov(u_t, w_s) = \begin{cases} 2, & \text{si } t = s; \\ 0, & \text{si } t \neq s. \end{cases}$

a) Describe detalladamente cómo estimarías los coeficientes y sus varianzas en este sistema de ecuaciones y razona cuáles son las propiedades del estimador propuesto.

b) Utilizando un nivel de significación del $5\,\%$ y bajo las hipótesis del apartado anterior, explica cómo contrastarías la hipótesis $\beta_1 = \gamma_1 = 0$.

PROBLEMA LADE-2006.9 (Sep-2006)

Un agricultor desea analizar el efecto que produce la aplicación de un determinado abono en la producción de tomates. Ha dividido su terreno en 30 parcelas de similares características, ha anotado los Kg. de tomates recogidos (T_i) en cada una y la cantidad de abono utilizado durante el año 2005 (A_i) y ha preguntado a su sobrino como podría comprobar dicho efecto. El sobrino ha especificado un modelo de regresión lineal simple cuya estimación por MCO le ha aportado el siguiente resultado:

$$\underset{\widehat{(desv)}}{\hat{T}_i} = \underset{(423,31)}{150,71} + \underset{(0,03)}{0,8}\, A_i \qquad i = 1, \ldots, 30$$

a) ¿Es la cantidad de abono relevante en la producción de tomates? Contrástalo.

b) El agricultor se ha dado cuenta de que la producción de tomates en las hectáreas que reciben mucho abono es mucho más variable que la de las hectáreas con poco abono, de forma que algunas hectáreas intensivas en abono han dado una gran producción y otras poca. ¿Cómo podría realizar un contraste para verificar dicha observación? Explícalo detalladamente.

Supón en el resto de apartados que el resultado del contraste anterior ha verificado la sospecha del agricultor.

c) ¿Es el resultado del contraste del apartado a) válido? Razónalo.

d) Si tu respuesta anterior es negativa, ¿cómo podría realizar el mismo contraste de significatividad con el estimador MCO?

PROBLEMA LE 2007.1 (Jun-2007)

Una consultora americana tiene firmado un contrato para realizar un estudio sobre la relación entre el número de patentes y los gastos en Investigación y Desarrollo (RD) en Estados Unidos. Para ello dispone de datos anuales para los años 1960 a 1993 de las siguientes variables[5]:

- PATENTS: número de patentes, en miles de unidades, (rango muestral de 84,5 a 189,4).
- RD: gastos en investigación y desarrollo, en billones de dólares de 1992, (rango muestral de 57,94 a 166,7)

En primer lugar se considera estimar por MCO el modelo simple:

$$PATENTS_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + u_t \qquad t = 1, \ldots, 34 \tag{1}$$

Variable dependiente: PATENTS

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	34,5711	6,35787	5,4375	0,0000
RD	0,791935	0,0567036	13,9662	0,0000

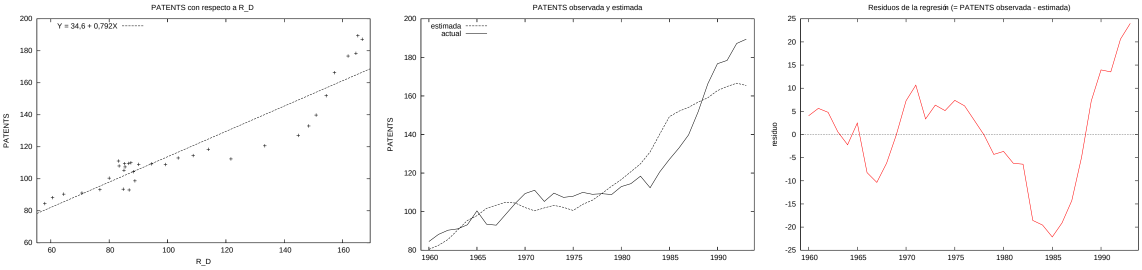
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	11,1724
R-cuadrado	0,859065
Estadístico de Durbin–Watson	0,233951

[5]Fuente: fichero DATA3-3 del libro de Ramanathan.

a) Interpreta el coeficiente estimado que acompaña a la variable RD. ¿Tiene el signo esperado?, ¿es una variable significativa?

b) Comenta detalladamente los **tres** gráficos proporcionados.

Figura 16: *PATENTS sobre RD, PATENTS observada y estimada y Residuos MCO sobre tiempo*



¿Qué problema parece existir en el modelo anterior? Razónalo con detalle y comenta las posibles consecuencias sobre los resultados mostrados y los obtenidos en el apartado anterior.

Después de probar con diversas especificaciones la consultora decide elegir de entre las siguientes:

$$PATENTS_t = \beta_1 + \beta_2 RD_t + \beta_3 RD_t^2 + u_{1t} \quad (2)$$

$$PATENTS_t = \alpha_1 + \alpha_2 RD_t + \alpha_3 RD_{t-4} + \alpha_4 RD_t^2 + u_{2t} \quad (3)$$

3. ¿Son estos dos modelos lineales?, ¿por qué? ¿Son ambos modelos dinámicos?, ¿por qué?

4. Escribe la matriz de datos que corresponde a cada modelo.

Los resultados de la estimación de las dos especificaciones alternativas son:

MODELO A:

$$\begin{array}{lcccccc}
\widehat{PATENTS}_t & = & 121,575 & - & 0,852 \; RD_t & + & 0,00706 \; RD_t^2 \\
(\widehat{desv}) & & (23,243) & & (0,429) & & (0,00183) \\
(\widehat{desv})_{N-West} & & (27,615) & & (0,503) & & (0,002)
\end{array}$$

$$R^2 = 0,904 \qquad DW = 0,284 \qquad BG(4) = 27,171$$

MODELO B:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\widehat{PATENTS}_t & = & 135,887 & - & 1,789 \; RD_t & + & 0,813 \; RD_{t-4} & + & 0,00790 \; RD_t^2 \\
(\widehat{desv}) & & (22,493) & & (0,356) & & (0,097) & & (0,00160) \\
(\widehat{desv})_{N-West} & & (30,555) & & (0,475) & & (0,120) & & (0,002)
\end{array}$$

$$R^2 = 0,979 \qquad DW = 0,842 \qquad BG(4) = 11,974$$

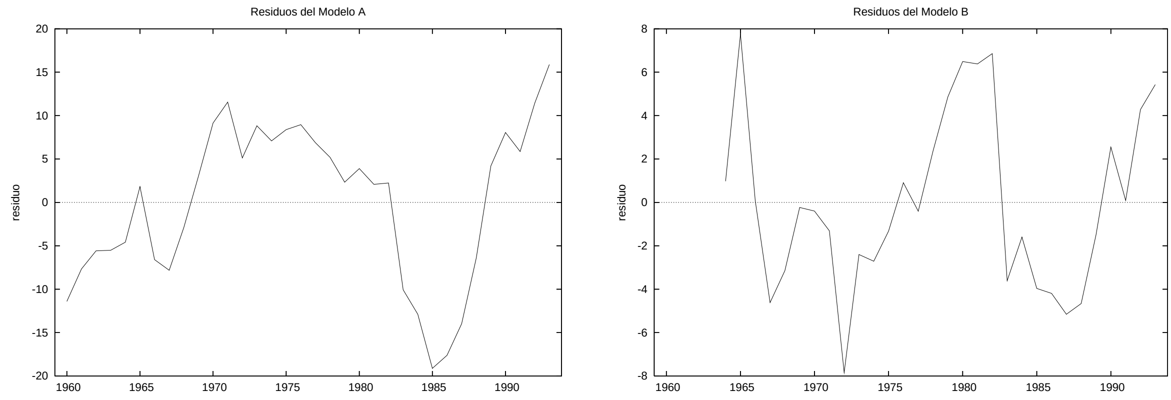
5. ¿Crees que los gráficos de los residuos reflejan algún problema? Contrástalo.

6. ¿Por qué crees que han utilizado el estimador de Newey-West para la obtención de las desviaciones típicas? ¿te parece razonable su uso en las dos especificaciones?

7. Utilizando **toda** la información proporcionada, ¿cuál crees que puede ser la mejor **especificación** para determinar el número de patentes? Razona tu respuesta. ¿Es el modelo escogido un modelo con dinámica?

8. Dado el modelo que has escogido, obtén el incremento medio en el número de patentes inscritas cuando el gasto en investigación y desarrollo correspondiente a ese año aumenta en un billón de dólares manteniendo el resto de los factores constantes. Dado el rango muestral, ¿es el incremento estimado positivo?

Figura 17: *Gráficos de residuos de los Modelos A y B*



<u>PROBLEMA LE 2007.2</u> (Jun-2007)

Una empresa quiere analizar el precio (P) de las viviendas en un determinado país en función del tipo de interés (I) y del Producto Interior Bruto (PIB). Para ello se dispone de datos trimestrales correspondientes al periodo 1963-1985. Los resultados de la estimación son los siguientes:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{P_t}} = \underset{(3{,}128)}{-5,3174} + \underset{(0{,}469)}{1,864}\, PIB_t - \underset{(0{,}295)}{0,890}\, I_t \tag{4}$$

$$SCR = 0,516 \qquad\qquad R^2 = 0,478$$

El analista de la empresa, tras observar los residuos, sospecha que la varianza de las perturbaciones al principio de la muestra son menores que los correspondientes al final de la muestra. Por ello propone dos posibles especificaciones:

$$Var(u_t) = \delta\, t^4 \qquad \delta > 0 \tag{5}$$

$$Var(u_t) = \gamma_1 + \gamma_2 D_t \qquad \gamma_1, \gamma_2 > 0 \tag{6}$$

donde la variable ficticia D_t toma valor uno para las observaciones comprendidas en el periodo 1963-1975 y cero en caso contrario.

1. ¿Qué pretenden recoger las ecuaciones (5) y (6)?, ¿en qué se diferencian? Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación asociada a cada una de las propuestas. (Supón que $E(u_t u_s) = 0 \quad t \neq s$.)

2. ¿Podrías verificar la sospecha del analista con el contraste de Hausman? Razónalo.

   Al final el analista se decide por una de las especificaciones y obtiene los siguientes resultados

Modelo: estimaciones M.C.Ponderados utilizando las observaciones 1976:1–1985:4
Variable dependiente: P
Variable utilizada como ponderación: $1/t^2$

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	$-9{,}3955$	$3{,}83947$	$-2{,}4471$	$0{,}0443$
PIB	$2{,}42845$	$0{,}511158$	$4{,}7509$	$0{,}0021$
I	$-1{,}0789$	$0{,}182560$	$-5{,}9103$	$0{,}0006$

Estadísticos basados en los datos ponderados:

Suma de cuadrados de los residuos	$0{,}000142049$
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	$0{,}00450474$
R^2	$0{,}837967$
$\bar{R}^2$ corregido	$0{,}791671$

3. Escribe la función de regresión poblacional que ha estimado el analista. Especifica las hipótesis necesarias sobre la perturbación para que la ponderación empleada sea la adecuada. Demuestra tus afirmaciones.

4. Escribe detalladamente la expresión del estimador empleado.

$$\widehat{\beta}_{\dots\dots\dots} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} \left[\qquad\qquad\qquad \right]$$

5. Si la especificación adecuada para la varianza fuese la recogida en la ecuación (6), ¿qué consecuencias tendría sobre las estimaciones de Mínimos Cuadrados Ponderados mostradas? En este caso, ¿cómo estimarías los coeficientes del modelo?, ¿por qué?

PROBLEMA LE 2007.3 (Sep-2007)

El director de una empresa desea estudiar la función de demanda de silicona para la construcción de equipamientos. Para ello dispone de una muestra de datos mensuales[6] desde 1983:1 hasta 1990:5 sobre los galones producidos de silicona (Q) y el precio por galón en dólares (P). Con estos datos se estima el siguiente modelo:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t \tag{1}$$

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Modelo 1: estimaciones MCO utilizando las 89 observaciones 1983:01–1990:05
Variable dependiente: Q

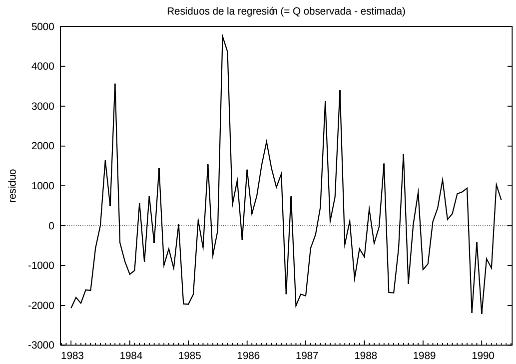
Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	5962,05	955,810	6,2377	0,0000
P	−381,09	104,766	−3,6376	0,0005

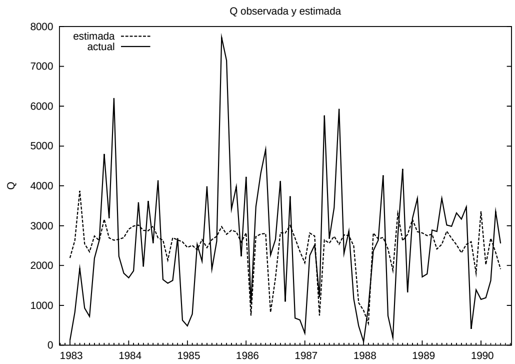
Media de la var. dependiente	2531,49
D.T. de la variable dependiente	1564,67
Suma de cuadrados de los residuos	1,87000e+08
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1466,09
R^2	0,132013
$\bar{R}^2$ corregido	0,122036
Grados de libertad	87
Estadístico de Durbin–Watson	1,32875
Coef. de autocorr. de primer orden.	0,323783
Estadístico de Breusch-Godfrey, BG(1)	9,52

[6]Fuente: Ramanathan, fichero de datos data3-5.

a) ¿Qué hipótesis se están asumiendo sobre la perturbación del modelo para que los estadísticos-t anteriores tengan validez?, ¿y sobre la variable explicativa? Razónalas.

b) Indica cómo y para qué se ha calculado el valor “Estadístico de Durbin-Watson = 1,32875”. Dado el valor de este estadístico, ¿son creíbles las hipótesis asumidas para la perturbación en el apartado anterior?
Se dispone además de los siguientes gráficos:





El director, tras analizar los resultados de la estimación y los gráficos disponibles decide proponer este nuevo modelo:

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 Q_{t-1} + v_t \tag{2}$$

c) ¿Qué razones crees que han llevado al gerente a proponer el nuevo modelo? Razónalo en base a los gráficos y **todos** los resultados disponibles.
Los conocimientos de econometría del gerente son limitados y no confía en tomar la decisión adecuada sobre el método de estimación, por lo que duda entre dos alternativas. Los primeros resultados de que dispone son los siguientes:

Modelo 2: estimaciones MC2E utilizando las 88 observaciones 1983:02–1990:05
Variable dependiente: Q
Instrumentos: P_1

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	$6056{,}46$	$1363{,}59$	$4{,}4415$	$0{,}0000$
P	$-375{,}74$	$109{,}814$	$-3{,}4216$	$0{,}0006$
Q_1	$-0{,}0470207$	$0{,}285300$	$-0{,}1648$	$0{,}8691$

Media de la var. dependiente	2558,90
D.T. de la variable dependiente	1552,01
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1489,92
R^2	0,101437
Estadístico de Durbin–Watson	1,26492
Estadístico de Hausman	1,7694

d) Dados los resultados de la primera alternativa:

I) ¿Qué método de estimación ha utilizado? ¿Por qué crees que ha propuesto este estimador? ¿Qué propiedades tiene el estimador empleado? Explica con detalle tus afirmaciones.

II) Escribe explícitamente la fórmula del estimador.

La segunda estimación disponible es la siguiente:

Modelo 3: estimaciones MCO utilizando las 88 observaciones 1983:02–1990:05
Variable dependiente: Q

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	$4971{,}54$	$967{,}433$	$5{,}1389$	$0{,}0000$
P	$-346{,}23$	$100{,}532$	$-3{,}4440$	$0{,}0009$
Q_1	$0{,}276772$	$0{,}0956479$	$2{,}8937$	$0{,}0048$

Media de la var. dependiente	2558,90
D.T. de la variable dependiente	1552,01
Suma de cuadrados de los residuos	1,66272e+08
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	1398,62
R^2	0,206563
$\bar{R}^2$ corregido	0,187894
$F(2, 85)$	11,0645
Estadístico de Durbin–Watson	2,00214
Coef. de autocorr. de primer orden.	-0,00538456
Estadístico de Breusch-Godfrey, BG(1)	0,04984

e) Dados los resultados de la segunda alternativa:

I) ¿Qué método de estimación ha utilizado? Escribe explícitamente la fórmula.

II) Enuncia el teorema de Mann y Wald y verifica si se satisfacen sus condiciones en este caso. Indica las propiedades del estimador. ¿Cuál de los dos métodos de estimación te parece la más adecuada?, ¿por qué?

f) Contrasta si el modelo que determina la producción de silicona es estático.

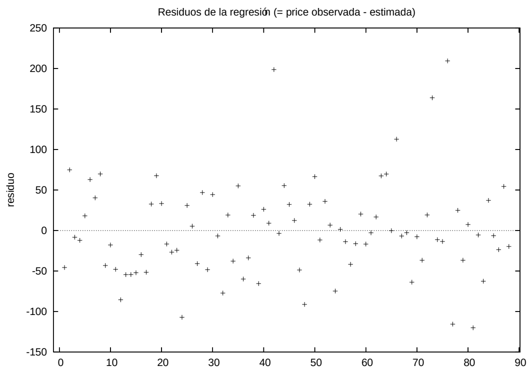
PROBLEMA LE 2007.4 (Sep-2007)

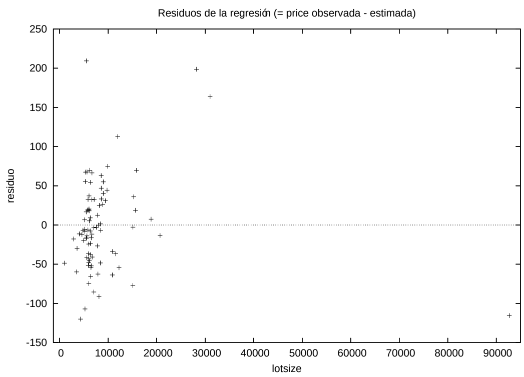
La inmobiliaria BOSHOUSE contrató a un gestor para que le asesore en su política de fijación de precios. Para ello le presenta la siguiente información obtenida con 88 observaciones sobre precios de venta y sus determinantes correspondientes a hogares situados en Boston y su área de influencia. Las variables disponibles son: precio de la vivienda en miles de dólares (**price**), tamaño de la parcela en pies cuadrados (**lotsize**), tamaño de la vivienda en pies cuadrados (**sqrft**) y número de dormitorios (**bdrms**). El analista propone dos especificaciones alternativas para determinar el precio de la vivienda. Los resultados de la primera especificación se muestran a continuación:

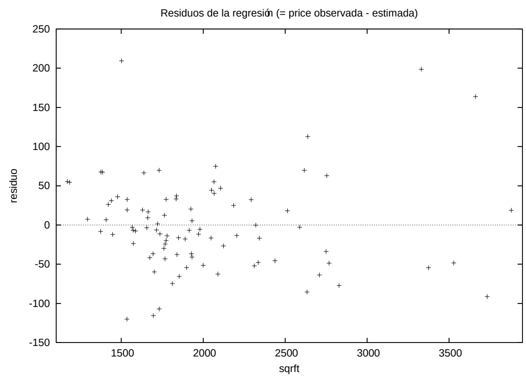
Modelo 1: estimaciones MCO utilizando las 88 observaciones 1–88
Variable dependiente: price

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	$-21{,}770$	$29{,}4750$	$-0{,}7386$	$0{,}4622$
lotsize	$0{,}00206771$	$0{,}000642126$	$3{,}2201$	$0{,}0018$
sqrft	$0{,}122778$	$0{,}0132374$	$9{,}2751$	$0{,}0000$
bdrms	$13{,}8525$	$9{,}01015$	$1{,}5374$	$0{,}1279$

Media de la var. dependiente	293,546
D.T. de la variable dependiente	102,713
Suma de cuadrados de los residuos	300724
Desviación típica de los residuos ($\hat{\sigma}$)	59,8335
R^2	0,672362
$F(3, 84)$	57,4602
Breusch-Pagan: h(γ_0 + γ_1 lotsize + γ_2 sqrft)	27,97







1. ¿Qué modelo está estimando la empresa? Interpreta los dos primeros coeficientes estimados del modelo.

2. Interpreta la información contenida en los gráficos y realiza los contrastes que creas oportunos. ¿Cuáles son las propiedades del estimador MCO? Razona tus afirmaciones.

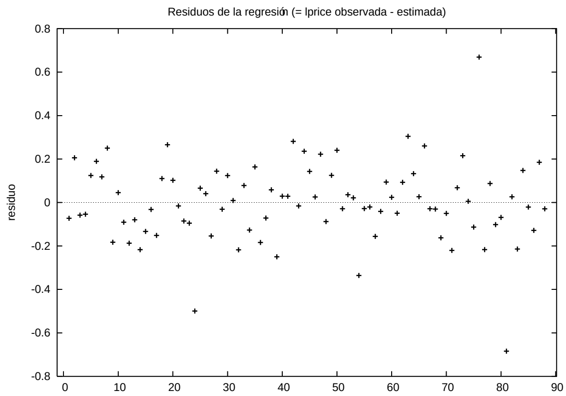
3. Dados los resultados obtenidos, propón una estructura para la matriz de varianzas y covarianzas. ¿Cómo la estimarías?

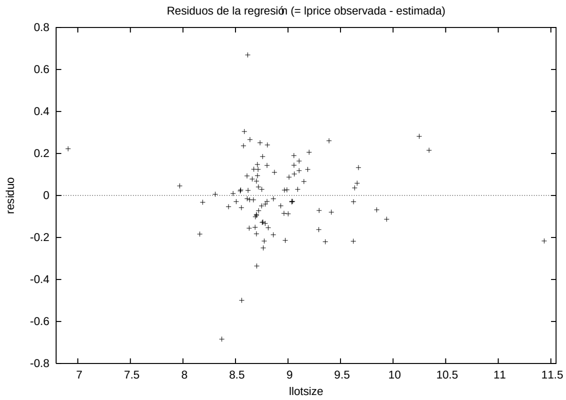
   Los resultados de la segunda alternativa se muestran a continuación:

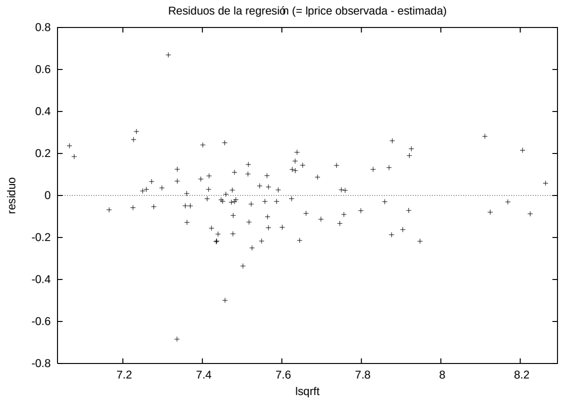
Modelo 2: estimaciones MCO utilizando las 88 observaciones 1–88
Variable dependiente: ln(price)

Variable	Coeficiente	Desv. típica	Estadístico t	valor p
const	$-1{,}2970$	0,651284	$-1{,}9915$	0,0497
ln(lotsize)	0,167967	0,0382811	4,3877	0,0000
ln(sqrft)	0,700232	0,0928652	7,5403	0,0000
bdrms	0,0369583	0,0275313	1,3424	0,1831

Media de la var. dependiente	5,63318
D.T. de la variable dependiente	0,303573
Suma de cuadrados de los residuos	2,86256
R^2	0,642965
$F(3, 84)$	50,4237
Breusch-Pagan: h(γ_0 + γ_1 ln(lotsize) + γ_2 ln(sqrft))	4,66







4. ¿Qué modelo está estimando la empresa? ¿Recogen los coeficientes lo mismo que en la especificación anterior? Razona tu respuesta.

5. Interpreta la información contenida en los gráficos y realiza los contrastes que creas oportunos. ¿Cuáles son las propiedades del estimador MCO? Razona tus afirmaciones.

6. Dados los resultados obtenidos, propón una estructura para la matriz de varianzas y covarianzas. ¿Cómo la estimarías?

7. ¿Cuál de las dos especificaciones te parece más adecuada para determinar el precio de la vivienda?, ¿por qué?

<u>PROBLEMA LADE-2007.1</u> (Jun-2007)

Una empresa quiere analizar si el gasto realizado en publicidad tiene algún efecto sobre los beneficios obtenidos. Para ello especifica una relación lineal entre los gastos en publicidad (P), considerados no estocásticos, y los beneficios (B):

$$B_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_t$$

donde u_t tiene una distribución normal. La empresa dispone de datos anuales desde 1997 a 2006, con los que estima por MCO la relación anterior, obteniendo

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{\widehat{B_t}} = \underset{(1,56)}{4,59} - \underset{(3,39)}{3,46}\, P_t + \hat{u}_t \qquad \sum \hat{u}_t^2 = 39,40$$

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
P_t	0,3	0,3	0,5	0,7	0,1	0,4	0,2	0,8	0,3	0,5
B_t	5,76	6,90	3,16	4,63	4,45	2,53	1,96	0,11	0,71	1,48
$\hat{u}_t$	2,21	3,35	0,30	2,46	0,21	-0,67				

a) Contrasta si el gasto en publicidad influye en la obtención de beneficios.

b) Completa la serie de residuos y utiliza algún método gráfico para comprobar si las perturbaciones cumplen todas las hipótesis básicas.

c) Realiza un contraste para ver si las perturbaciones siguen un proceso AR(1).

d) De acuerdo con tus resultados anteriores, ¿qué propiedades tiene el estimador de MCO? ¿Y el contraste realizado en el apartado 1? Razona tus respuestas.

e) Supón que las perturbaciones se forman de acuerdo con el proceso $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, donde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2_\varepsilon)$ y ρ es desconocido. Explica detalladamente cómo realizarías el contraste del apartado 1 en este caso.

f) Se decide incluir como regresor el nivel de inversión (I_t), que se considera no estocástico, y se estima el modelo por MCO obteniendo:

$$\underset{(\widehat{desv}(\hat{\beta}))}{B_t} = \underset{(0,71)}{5,64} - \underset{(1,57)}{0,79}\, P_t + \underset{(0,20)}{1,17}\, I_t + \hat{v}_t \qquad R^2 = 0,86 \quad DW = 2,13$$

Con esta nueva información, ¿cambiaría en algo tu respuesta en el apartado D?

<u>PROBLEMA LADE-2007.2</u> (Jun-2007)

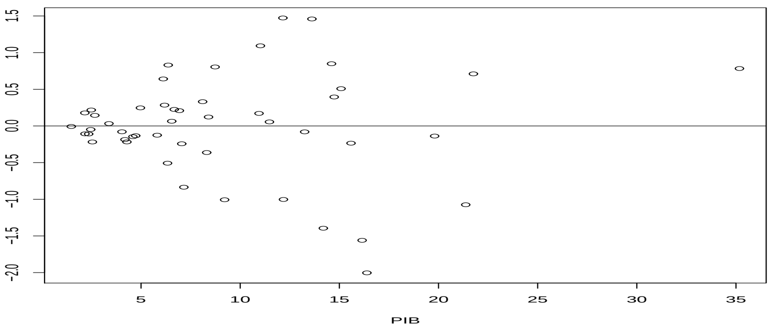
Se dispone de datos anuales del Producto Interior Bruto (PIB), que se considera no estocástico, y del Valor Añadido Bruto Industrial (VAB) en miles de millones de euros para 48 provincias españolas (Fuente: Contabilidad Regional de España. INE).

Para analizar la proporción del PIB que proviene de la industria se ha estimado el siguiente modelo por MCO:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{VAB}}_i &= \underset{\text{(-0,045)}}{(-0,25)} + \underset{\text{(0,277)}}{(17,71)}\ \text{PIB}_i \qquad (1) \\ N &= 48 \quad R^2 = 0,87 \quad \sum \hat{u}_i^2 = 23 \end{aligned}$$

(entre paréntesis, los estadísticos t)

Se dispone, además, del siguiente gráfico en el que aparecen los residuos de MCO frente al PIB:



a) A la vista del gráfico anterior, ¿hay evidencia del incumplimiento de alguna de las hipótesis básicas? Comenta razonadamente tu respuesta.

b) Se desea contrastar la posibilidad de que la dispersión de las perturbaciones dependa del PIB. Utiliza una de las siguientes regresiones para realizar dicho contraste. Explica claramente todos los elementos del contraste realizado.

$$\begin{array}{llcll}
(1) & \hat{u}_i & = & 0,074 - 0,005PIB_i + 0,374\hat{u}_{i-1} + \hat{w}_i; & R^2 = 0,14; \quad \sum \hat{w}_i^2 = 19,13 \\
(2) & \hat{u}_i^2 & = & -0,015 + 0,053PIB_i + \hat{w}_i; & R^2 = 0,18; \quad \sum \hat{w}_i^2 = 25,94 \\
(3) & \dfrac{\hat{u}_i^2}{0,479} & = & -0,032 + 0,111PIB_i + \hat{w}_i; & R^2 = 0,18; \quad \sum \hat{w}_i^2 = 112,95 \\
(4) & \hat{u}_i & = & 0,019 + 0,366\hat{u}_{i-1} + \hat{w}_i; & R^2 = 0,13; \quad \sum \hat{w}_i^2 = 19,2
\end{array}$$

c) Suponiendo que $Var(u_i) = \sigma^2 PIB_i^2$ estima la relación entre VAB y PIB de la mejor forma posible. Para ello dispones de la siguiente información muestral para las 48 provincias analizadas:

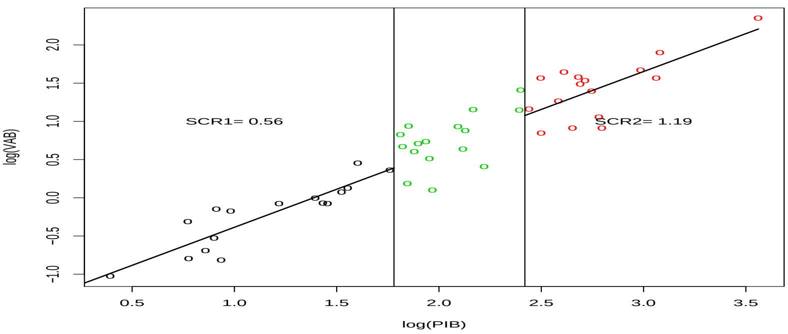
$$\begin{array}{lll}
\sum_i VAB_i = 121,37 & \sum_i PIB_i = 446 & \sum_i VAB_i PIB_i = 1694,32 \\
\sum_i PIB_i^2 = 6189,95 & \displaystyle\sum_i \frac{1}{PIB_i} = 8,58 & \displaystyle\sum_i \frac{VAB_i}{PIB_i} = 12,95 \\
\displaystyle\sum_i \frac{VAB_i}{PIB_i^2} = 2,27 & \displaystyle\sum_i \frac{1}{PIB_i^2} = 2,47 & \displaystyle\sum_i \frac{VAB_i^2}{PIB_i} = 34,95 \\
\displaystyle\sum_i \frac{VAB_i^2}{PIB_i^2} = 3,7 & \sum_i VAB_i^2 = 486,8 &
\end{array}$$

d) Razona las propiedades tiene el estimador propuesto.

e) Otro investigador considera que para analizar la relación entre PIB y VAB es mejor transformar las variables tomando logaritmos por lo que propone y estima por MCO el siguiente modelo:

$$\begin{array}{rcl}
\log(\widehat{\text{VAB}})_i & = & \underset{(-1,385)}{(-12,68)} + \underset{(1,022)}{(19,78)} \log(\text{PIB})_i \\
N & = & 48 \quad R^2 = 0,89 \quad \sum \hat{u}_i^2 = 3,07
\end{array} \qquad (2)$$

(entre paréntesis, los estadísticos t)



Para analizar si se ha mantenido constante la dispersión de las perturbaciones para los distintos valores del log(PIB) se han estimado los siguientes modelos:

$$\widehat{\log(\text{VAB})}_i = -1,382 + 0,995\log(\text{PIB})_i \quad \sum \hat{u}_i^2 = 0,56 \quad i \in 16 \text{ provincias de menor } \log(\text{PIB})$$
$$\widehat{\log(\text{VAB})}_i = -1,323 + 0,991\log(\text{PIB})_i \quad \sum \hat{u}_i^2 = 1,19 \quad i \in 16 \text{ provincias de mayor } \log(\text{PIB})$$

Utiliza estos resultados para contrastar si las perturbaciones del modelo considerado, que se suponen con distribución normal, han mantenido constante su dispersión. Explica claramente todos los pasos del contraste.

f) Comparando los modelos estimados en los apartados anteriores, ¿cuál te parece preferible? ¿Por qué?

PROBLEMA LADE-2007.3 (Jun-2007)

Sea el siguiente modelo de regresión:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad u_t \sim iid(0, \sigma_u^2) \tag{3}$$

La variable X_t no es observable y, en su lugar, observamos $X_t^* = X_t + \epsilon_t$, donde $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$ y además, sabemos que ϵ es independiente de u y $E(X_t u_s) = E(X_t \epsilon_s) = 0$, $\forall t, s$.

a) Obtén las propiedades de la perturbación w_t del modelo a estimar

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^* + w_t \qquad t = 1, 2, \ldots, T.$$

b) Suponiendo que la correlación entre X_t^* y X_{t-1}^* es 0,62, elige un método de estimación adecuado, explica su elección y detalla el estimador de los coeficientes β_1 y β_2, así como sus propiedades.

c) Si se desconociese que el regresor es una variable medida con error, pero se sospecha que en el modelo a estimar $E(X_t^* w_t) \neq 0$, explica cómo realizarías el contraste que te ayude a verificar dicha sospecha.

d) Supongamos ahora que en el modelo (3) X_t sí es observable, pero Y_t no lo es y, en su lugar, tenemos $Y_t^* = Y_t + \eta_t$, donde $\eta_t = \epsilon_t + 0,5\epsilon_{t-1}$ con $\epsilon \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$, η y u son independientes y además $E(X_t u_t) = E(X_t \eta_t) = 0$. Obtén las propiedades de la perturbación u_t^* del modelo a estimar:

$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t^* \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

y en función de éstas propón un método de estimación adecuado suponiendo que σ_u^2 y σ_ϵ^2 son conocidas.

PROBLEMA LADE-2007.4 (Sep-2007)

Sea el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 5 \qquad u_i \sim N(0, aX_i^2)$$

Sabemos que $E(u_i u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$, y que X es no estocástica.

a) Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de la perturbación.

b) Explica cómo estimarías el modelo de manera óptima y demuestra las propiedades del estimador propuesto en muestras finitas.

c) Utilizando los datos de la siguiente tabla:

i	Y_i	X_i
1	9	2
2	15	3
3	7	1
4	17	4
5	23	5

realiza una estimación eficiente de los coeficientes β y estima su matriz de varianzas y covarianzas.

$$\widehat{Var}\hat{\beta} = \hat{\sigma}^{*2}(X^{*'}X^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}62 & -0{,}2831 \\ -0{,}2831 & 0{,}1815 \end{bmatrix}^{-1}$$

d) Supón que desconoces totalmente la forma funcional de la varianza de la perturbación y quieres realizar el contraste de significatividad para la variable X. Explica cómo realizarías el contraste y comenta su fiabilidad para este tamaño de muestra.

PROBLEMA LADE-2007.5 (Sep-2007)

Un sindicato quiere analizar el comportamiento de los salarios en dos empresas del mismo sector. Para ello, propone el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} W_i^{(1)} &= \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} H_i^{(1)} + \beta_3^{(1)} A_i^{(1)} + u_i^{(1)}, \qquad i = 1, ..., N_1 \\ W_i^{(2)} &= \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} H_i^{(2)} + \beta_3^{(2)} A_i^{(2)} + u_i^{(2)}, \qquad i = 1, ..., N_2 \end{aligned}$$

donde W_i son los salarios, H_i son las horas trabajadas y A_i es la antiguedad del empleado. Además, $u_i^{(1)} \sim$ NID$(0, \sigma^2)$, $u_i^{(2)} \sim$ NID$(0, \sigma^2)$, y las perturbaciones $u_i^{(1)}$ y $u_j^{(2)}$ son independientes $\forall i, j$. Explica detalladamente cómo realizarías el contraste de que en ambas empresas todos los coeficientes son iguales.

PROBLEMA LADE-2007.6 (Sep-2007)

Una empresa de alimentación desea estimar la demanda de helados. Para ello dispone de datos de las siguientes variables:

$$\begin{aligned} C_t &= \text{consumo per capita de helado en litros} \\ P_t &= \text{precio medio del helado en € por litro} \\ M_t &= \text{temperatura media en °C} \end{aligned}$$

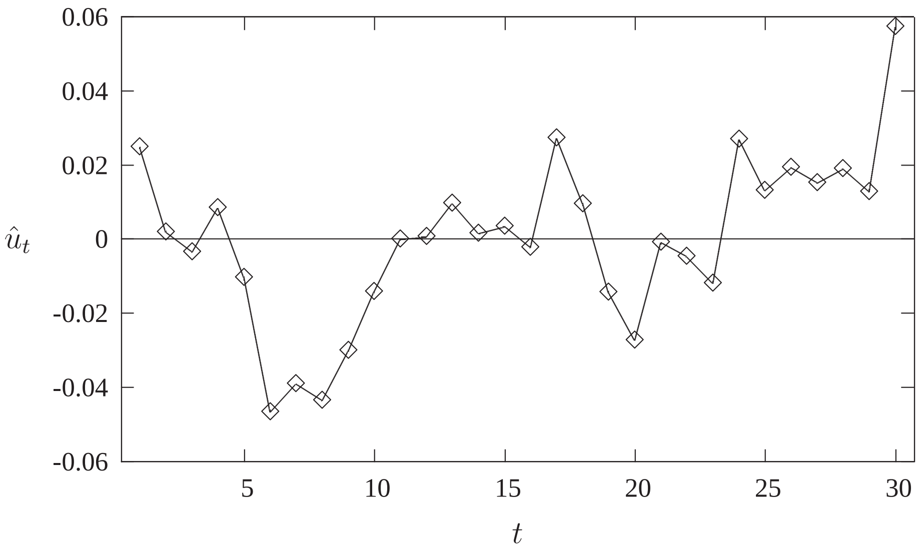
P_t y M_t se suponen no estocásticas. Los datos son mensuales, desde marzo de 2004 hasta agosto de 2006, ambos inclusive. Con ellos, se obtiene la siguiente estimación por el método de MCO:

$$\widehat{C_t} = \underset{(0,3941)}{(0,1454)} + \underset{(0,0031)}{(0,0005)}\, M_t - \underset{(0,4527)}{(0,2988)}\, P_t \qquad \hat{u}'\hat{u} = 0,0149 \quad R^2 = 0,6328$$

(Desv. típicas estimadas entre paréntesis)

a) Utilizando la información proporcionada contrasta la hipótesis de que el precio del helado no influye en el consumo.

b) Los residuos MCO de la estimación anterior se muestran en el gráfico siguiente:



A la vista de este gráfico, ¿qué puedes decir del resultado del apartado anterior? Explícalo con detalle.

c) Utiliza la información de la regresión siguiente para confirmar o descartar mediante un contraste de hipótesis tu argumentación del apartado anterior.

$$\hat{u}_t = \underset{(0,0177)}{(0,1148)} - \underset{(0,0003)}{(0,0004)}\, M_t + \underset{(0,0440)}{(0,2356)}\, P_t + \underset{(0,7307)}{(0,1760)}\, \hat{u}_{t-1} + \hat{v}_t \qquad R^2 = 0,4089$$

(Desviaciones típicas estimadas entre paréntesis)

d) Una especificación alternativa del modelo lleva a la siguiente estimación MCO:

$$\widehat{C}_t = \underset{(0,1750)}{(0,1510)} + \underset{(0,0035)}{(0,0005)}\, M_t - \underset{(0,3373)}{(0,2695)}\, P_t + \underset{(0,0019)}{(0,0007)}\, I_t \qquad R^2 = 0,7190 \quad \text{D-W} = 0,6559$$

(Desviaciones típicas estimadas entre paréntesis) donde I_t mide el ingreso per capita mensual. Basándote nuevamente en contrastes de hipótesis, argumenta si este nuevo modelo es preferible al anterior o no y por qué.

e) Finalmente, y dado el carácter posiblemente estacional de los datos, se ha decidido incluir las variables ficticias estacionales E_{1t}, E_{2t} y E_{3t} donde

$$E_{1t} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ es un mes de invierno (Enero, Febrero o Marzo)} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

y E_{2t}, E_{3t} se construyen idénticamente para cada uno de los tres meses de primavera y verano, respectivamente. El resultado de la estimación MCO es:

$$\begin{aligned} \widehat{C}_t &= \underset{(0{,}202)}{(0,154)} + \underset{(0{,}0036)}{(0,0008)}\, M_t - \underset{(0{,}352)}{(0,278)}\, P_t + \underset{(0{,}0015)}{(0,0007)}\, I_t + \underset{(0{,}029)}{(0,013)}\, E_{1t} + \underset{(0{,}018)}{(0,013)}\, E_{2t} + \underset{(0{,}012)}{(0,017)}\, E_{3t} \\ & R^2 = 0,7644 \qquad \text{(Desviaciones típicas estimadas entre paréntesis)} \end{aligned}$$

Si también se dispone de la siguiente regresión auxiliar:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= -\underset{(0{,}074)}{(0,159)} - \underset{(0{,}0002)}{(0,0008)}\, M_t + \underset{(0{,}088)}{(0,281)}\, P_t + \underset{(0{,}0004)}{(0,0007)}\, I_t - \underset{(0{,}013)}{(0,014)}\, E_{1t} - \underset{(0{,}004)}{(0,013)}\, E_{2t} \\ & + \underset{(0{,}0008)}{(0,0173)}\, E_{3t} + \underset{(0{,}267)}{(0,251)}\, \hat{u}_{t-1} + \hat{w}_t \\ & R^2 = 0,0866 \qquad \text{(Desviaciones típicas estimadas entre paréntesis)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la información sobre la estimación de este modelo, el inicial y el del apartado 4, explica con cuál de los 3 modelos te quedarías y por qué. A partir del modelo elegido, da una respuesta definitiva sobre la posible influencia o no del precio del helado sobre su consumo.

PROBLEMA LADE-2007.7 (Sep-2007)

Sea el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$ donde X_t no es estocástica.

a) Describe detalladamente un ejemplo concreto en el que el estimador MCO de este modelo no sea consistente. Demuestra por qué no es consistente.

b) En el caso descrito en el apartado anterior, y suponiendo que todos los parámetros son desconocidos, ¿cómo estimarías el modelo de forma asintóticamente eficiente? Detalla todos los elementos necesarios para obtener el estimador propuesto, incluídas las matrices.

$$Y^* = \begin{bmatrix} Y_3 - \hat{\rho} Y_2 \\ \vdots \\ Y_T - \hat{\rho} Y_{T-1} \end{bmatrix} \quad X^* = \begin{bmatrix} 1 & X_3 - \hat{\rho} X_2 & \cdots & Y_2 - \hat{\rho} Y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_T - \hat{\rho} X_{T-1} & \cdots & Y_T - \hat{\rho} Y_{T-1} \end{bmatrix} \quad \beta^* = \begin{bmatrix} \beta_1 (1 - \hat{\rho}) \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

con lo que se obtiene el estimador $\tilde{\beta}_{MCGF} = (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} Y^*$.

c) ¿Cómo contrastarías la significatividad individual de la variable explicativa X_t? Detalla todos los elementos necesarios para realizar dicho contraste.

PROBLEMA LADE-2008.1 (Jun-2008)

En un modelo de regresión lineal general, donde los regresores son no estocásticos y las perturbaciones heterocedásticas y no autocorrelacionadas, discute las siguientes afirmaciones:

a) $\hat{\beta}_{MCO}$ es sesgado.

b) $\hat{Var}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ donde $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{U}'_{MCO}\hat{U}_{MCO}}{T-K}$, es el estimador insesgado y consistente de la matriz de varianzas y covarianzas del estimador MCO.

c) No se puede hacer inferencia con el estimador MCO.

d) Es posible que, aún existiendo heterocedasticidad, el contraste de Goldfeld y Quandt no rechace la hipótesis nula.

PROBLEMA LADE-2008.2 (Jun-2008)

Sea el siguiente modelo a estimar:

$$Y_t = \beta X_t + u_t \quad \text{donde} \quad t = 1, \ldots, 50 \quad \text{y} \quad u_t \sim iid(0,1)$$

Se sabe que $X_t = 0{,}3X_{t-1} + w_t$ donde w_t es un ruido blanco tal que:

$$\begin{array}{ll} E(w_t u_s) = 5 & \text{si } t = s \\ E(w_t u_s) = 0 & \text{si } t \neq s \end{array}$$

Además se dispone de la siguiente información muestral:

$$\begin{array}{lll} \sum_{t=1}^{50} X_t^2 = 110 & \sum_{t=2}^{50} X_{t-1}^2 = 100 & \sum_{t=2}^{50} X_{t-1}X_t = 98 \\ \sum_{t=2}^{50} X_{t-1}Y_t = 80 & \sum_{t=1}^{50} X_t Y_t = 70 & \end{array}$$

a) Demuestra las propiedades del estimador MCO en el modelo.

b) En vista de las propiedades del apartado anterior, ¿qué método utilizarías para estimar β? Demuestra alguna de sus propiedades asintóticas y aplícalo para obtener la estimación de β.

c) Contrasta la significatividad de la variable X_t.

d) Si sólo conocemos que X_t es estocástica, ¿qué contraste utilizarías para saber qué método de estimación es el más adecuado? Descríbelo y realiza el contraste.

PROBLEMA LADE-2008.3 (Jun-2008)

El gestor de una empresa desea analizar la relación existente entre el rendimiento en bolsa de las acciones de su empresa, Y_t, y el rendimiento general del índice bursátil Ibex 35, X_t. Para ello especifica el siguiente modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

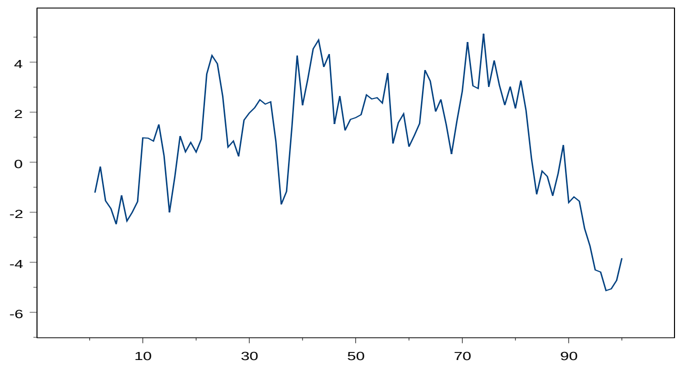
donde la variable X_t se supone no estocástica.

Dispone de 100 observaciones mensuales de dichos rendimientos desde enero de 2000 hasta abril de 2008, con los que ha obtenido la siguiente estimación por MCO:

$$\underset{(desv)}{\widehat{Y_t}} = \underset{(0,201)}{0,336} + \underset{(2,614)}{0,247}X_t + \hat{u}_t \qquad (1)$$

a) Contrasta si existe relación entre los rendimientos de las acciones de la empresa y el Ibex35.

b) La figura (1) muestra los residuos $\hat{u}_t$. ¿Encuentras evidencia de incumplimiento de alguna hipótesis básica?



c) Teniendo en cuenta la siguiente información, realiza un contraste para confirmar la ausencia o presencia de autocorrelación en las perturbaciones.

$$\sum_{t=1}^{100} \hat{u}_t = 94,22 \,, \quad \sum_{t=2}^{100} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2 = 151,06 \,, \quad \sum_{t=2}^{100} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}) = -2,62 \,,$$

$$\sum_{t=2}^{100} (\hat{u}_t \hat{u}_{t-1}) = 568,16 \,, \quad \sum_{t=1}^{100} \hat{u}_t^2 = 651,80 \,, \quad \sum_{t=2}^{100} \hat{u}_t^2 = 649,32$$

d) A la vista de la información obtenida, comenta las propiedades del estimador en (1).

e) Si $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ con ρ desconocido describe detalladamente cómo estimarías de forma asintóticamente eficiente los parámetros del modelo β_0 y β_1 y como realizarías el contraste que se pide en el apartado 1.

f) Una consultoría externa piensa que la incorporación de un nuevo cuadro directivo con la consiguiente reestructuración empresarial en febrero de 2004 tuvo un efecto positivo en la empresa, de forma que sus rendimientos bursátiles aumentaron considerablemente desde esa fecha hasta la actualidad. ¿Qué efectos tendría este hecho en las propiedades del estimador MCO en (1) así como en los contrastes realizados en el apartado 1 y el descrito en el apartado 5?

PROBLEMA LADE-2008.4 (Jun-2008)

Se dispone de 30 observaciones de la evolución temporal del gasto e ingreso de 2 países A y B, y se desea estimar con estos datos el modelo siguiente:

$$\begin{aligned} G_t^A &= \alpha^A + \beta^A I_t^A + u_t^A \\ G_t^B &= \alpha^B + \beta^B I_t^B + u_t^B \end{aligned}$$

La varianza de la perturbación u_t^A y la varianza de u_t^B son parámetros desconocidos y constantes en el tiempo. Se sabe además que las perturbaciones correspondientes a ambos países están correlacionadas contemporáneamente. Propón un método eficiente de estimación de los modelos anteriores, razonando la respuesta.

PROBLEMA LADE-2008.5 (Sep-2008)

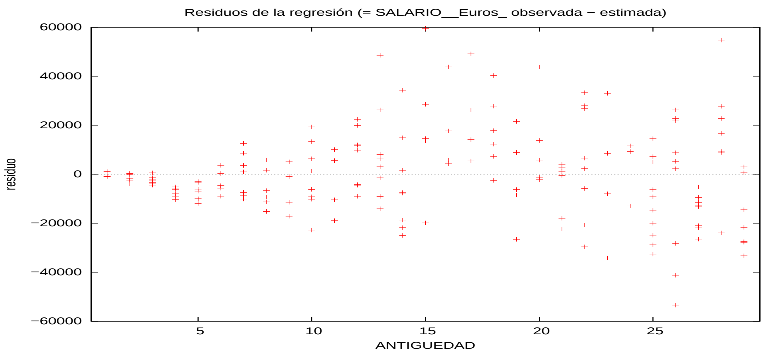
Sea el siguiente modelo de regresión lineal simple:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

donde las perturbaciones se supone que siguen una distribución normal. Se desean analizar los salarios de los profesores en las escuelas privadas (Y, medido en euros) según su antigüedad en la docencia (X, medido en años), para lo que se ha obtenido una muestra de 122 docentes. Dada la información muestral, presentamos la función de regresión obtenida mediante MCO y el gráfico de los residuos MCO frente a la variable antiguedad.

$$\underset{(desv)}{\widehat{Y_i}} = \underset{(2635,57)}{49184,7} + \underset{(151,77)}{1753,22}\, X_i \quad R2 = 0{,}42 \quad SCR = 130427,1 \tag{1}$$

a) Contrasta la significatividad de la variable Antigüedad.



b) Dado el gráfico anterior, crees que el contraste propuesto en el apartado anterior es válido? ¿Por qué?

c) ¿Qué contraste realizarías para saber si las perturbaciones son esféricas? Explícalo.

d) En el caso de rechazar la hipótesis nula en el contraste propuesto en el apartado anterior y suponiendo que $var(u_i) = a + bX_i + cX_i^2$ explica detalladamente cómo estimarías los coeficientes del modelo y cómo realizarías el contraste de significatividad de la variable explicativa.

<u>PROBLEMA LADE-2008.6</u> (Sep-2008)

Para analizar la relación entre dos variables se disponen de los siguientes datos

t	Y_t	X_t
1	7,4	0,3
2	7,6	0,3
3	9,9	0,5
4	5,9	0,4
5	11,1	0,1
6	6,2	0,4
7	9,5	0,2
8	6,4	0,5

Se estima por MCO el modelo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$, obteniéndose

$$\underset{(desv)}{\widehat{Y_t}} = \underset{(1,66)}{10,68} - \underset{(4,58)}{7,93}\, X_t + \hat{u}_t \qquad (2)$$

a) Basándote en un gráfico, analiza si existe autocorrelación en las perturbaciones.

b) Se desea contrastar la existencia de autocorrelación de orden 1 en las perturbaciones, para lo que se utiliza el contraste de Breusch y Godfrey, obteniéndose para el estadístico de contraste un valor $BG = 5,57$. Explica detalladamente cómo se ha obtenido este valor y realiza el contraste. Comenta la fiabilidad del mismo.

c) Si $u_t = -0,9u_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim NID(0,1)$, estima de forma eficiente los parámetros del modelo.

d) Contrasta la significatividad de la variable X_t.

PROBLEMA LADE-2008.7 (Sep-2008)

Sea el modelo de regresión $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 Y_{t-1} + u_t \quad t = 2,\ldots,200$ donde X_3 es un regresor no estocástico. Se considera además que $u_t \sim iid(0, \sigma 2_u)$ y X_2 es un regresor estocástico correlacionado con otra variable Z que no es estocástica.

a) Suponiendo que X_2 es independiente de las perturbaciones, ¿qué estimador de β utilizarías? Describe sus propiedades.

b) ¿Cómo contrastarías $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$? Describe detalladamente todos los elementos del contraste.

Para los siguientes apartados, si no sabes si la variable X_2 está medida con error o no:

c) ¿Como puedes decidir si la variable X_2 está medida con error o no? Describe todos los elementos del contraste.

d) Supón que el estadístico del contraste anterior vale 7. ¿Qué estimador elegirías en este caso? Razona tu elección, basándote en las propiedades de los estimadores. Escribe explícitamente las matrices y vectores que intervienen en el estimador.

PROBLEMA LADE-2009.1 (Jun-2009)

Para celebrar el Año Internacional de la Astronomía los alumnos de secundaria y bachillerato de 200 centros escolares han recogido datos de las siguientes variables:

Y: distancia de su centro de estudios al paralelo 40^o Norte en kilómetros

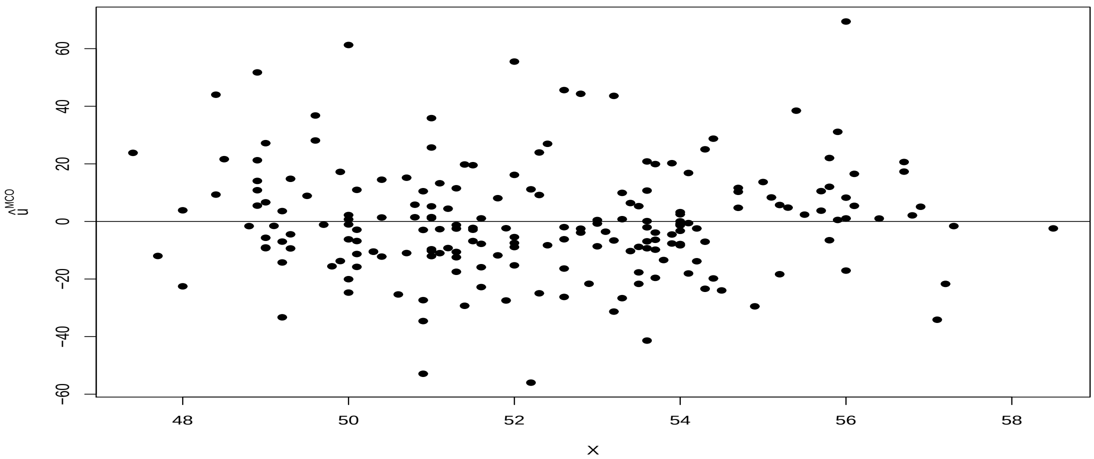
X: altura del sol en el horizonte al mediodía en grados

Con estos datos se ha estimado la relación lineal entre Y y X por MCO obteniéndose los siguientes resultados:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j})}{\hat{Y}_i} = \underset{(30,25)}{\overbrace{5594,9}^{\hat{\beta}_1}} - \underset{(0,58)}{\overbrace{111,91}^{\hat{\beta}_2}} X_i \qquad \sum_{i=1}^{200} \hat{u}_i^2 = 71260,46 \qquad R^2 = 0,9948 \tag{1}$$

a) El coeficiente β_2 indica a cuantos kilómetros equivale un grado de la esfera terrestre (con signo negativo). Se sabe que este parámetro toma el valor teórico de $-111,11$ km/grado. Contrasta si este valor es compatible con el obtenido en (1). Supón que $u_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$.

b) Un profesor de uno de los centros escolares afirma que las perturbaciones u_i no son homocedásticas como hemos supuesto en el apartado anterior, sino que su varianza depende de la variable X_i. Basándote en el siguiente gráfico, que presenta los residuos de MCO del modelo estimado (1) frente a la variable X_i, comenta la afirmación anterior.



c) Utiliza una de las siguientes regresiones para contrastar si la varianza de las perturbaciones depende de X_i. Explica claramente todos los elementos del contraste realizado.

$$(a) \quad \frac{\hat{u}_i^2}{\sqrt{71260,46}} = 2,65 - 0,025X_i + \hat{w}_i \qquad \sum \hat{w}_i^2 = 1269,9 \quad R^2 = 0,0005$$

$$(b) \quad \frac{\hat{u}_i^2}{18,876} = 37,31 - 0,351X_i + \hat{w}_i \qquad \sum \hat{w}_i^2 = 251450 \quad R^2 = 0,0005$$

$$(c) \quad \hat{u}_i = 0,34 - 0,11\hat{u}_{i-1} - 0,005X_i + \hat{w}_i \qquad \sum \hat{w}_i^2 = 70885 \quad R^2 = 0,0132$$

$$(d) \quad \frac{\hat{u}_i^2}{356,302} = 1,97 - 0,018X_i + \hat{w}_i \qquad \sum \hat{w}_i^2 = 698,6 \quad R^2 = 0,0005$$

d) Otro profesor cree que existe heterocedasticidad en las perturbaciones u_i pero causada por las distintas características del alumnado de bachillerato y secundaria. Cree que los alumnos de secundaria cometen, en general, mayores errores al medir la variable Y, y que por tanto, la variabilidad de la perturbación será mayor en los datos que proceden de los alumnos de secundaria que en los datos que proceden de los alumnos de bachillerato. Además, ha estimado por MCO la relación lineal entre X e Y por separado para los centros de secundaria y los centros de bachillerato obteniendo los siguientes resultados:

Para los 100 centros de bachillerato:

$$\underset{(\hat\sigma_{\hat\alpha_j})}{\hat{Y}_i} = \underset{(21,85)}{\overbrace{5535,9}^{\hat\alpha_1}} - \underset{(0,42)}{\overbrace{110,76}^{\hat\alpha_2}} X_i \qquad SCR = 9919 \qquad R^2 = 0,9986 \qquad N = 100 \tag{2}$$

Para los 100 centros de secundaria:

$$\underset{(\hat\sigma_{\hat\gamma_j})}{\hat{Y}_i} = \underset{(57,55)}{\overbrace{5662,7}^{\hat\gamma_1}} - \underset{(1,10)}{\overbrace{113,23}^{\hat\gamma_2}} X_i \qquad SCR = 60131 \qquad R^2 = 0,9909 \qquad N = 100 \tag{3}$$

Con esta información contrasta la hipótesis de que la varianza de la perturbación en los centros de secundaria es mayor que la de los centros de bachillerato.

e) A la vista de los resultados obtenidos hasta ahora, ¿qué puedes decir sobre la fiabilidad del contraste que has realizado en el primer apartado? Razónalo.

f) Otro profesor sostiene que los parámetros de la relación lineal entre Y y X son iguales para los centros de secundaria y bachillerato. A la vista de los resultados de los apartados anteriores, ¿cómo crees que se debería estimar la relación entre Y y X con los datos de los 200 centros escolares? Explica en detalle cómo calcularías el estimador que propongas.

PROBLEMA LADE-2009.2 (Jun-2009)

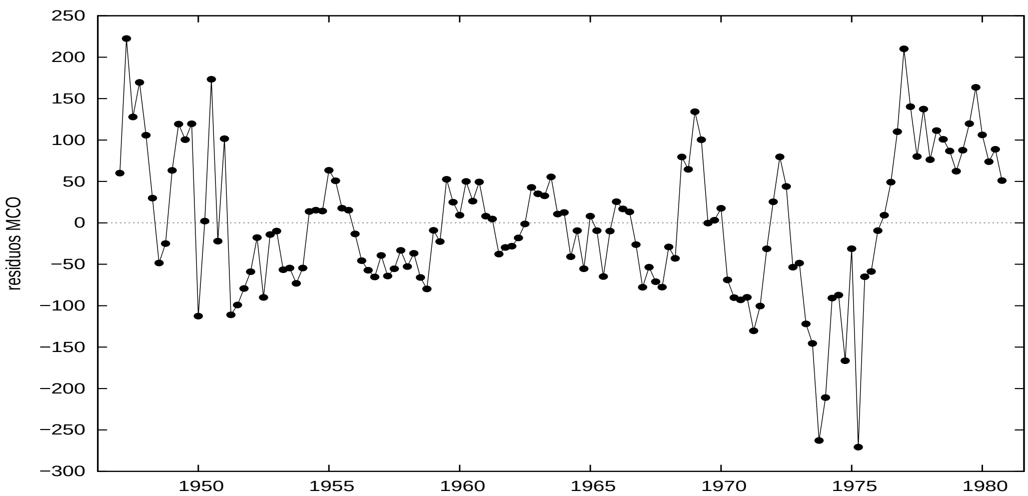
Un estudiante pretende medir la relación que existe entre el consumo y la renta en Estados Unidos para el periodo 1947 a 1980. Para ello dispone de **136 datos** trimestrales[7] del consumo per capita (C, en dólares) y de la renta disponible per capita (RD, en dólares). El estudiante comienza estimando la relación por MCO obteniendo el siguiente resultado:

$$\underset{\text{(estad-t)}}{\widehat{C}_t} = \underset{(9{,}9117)}{325,97} + \underset{(189{,}4498)}{0,8616}\ RD_t \qquad SCR = 966548 \quad R^2 = 0,9963 \quad DW = 0,6306 \tag{4}$$

a) Interpreta el coeficiente estimado asociado a la variable renta disponible.

b) Contrasta la significatividad de la variable renta disponible.

c) Comenta el gráfico proporcionado en la página siguiente (residuos de MCO frente al tiempo), ¿crees que se aprecia evidencia de heterocedasticidad y/o autocorrelación?



El estudiante decide estimar una segunda especificación por MCO en la que el consumo esté determinado por el consumo realizado en el trimestre anterior:

$$\underset{\text{(estad-t)}}{\widehat{C}_t} = \underset{(3{,}1245)}{78,8615} + \underset{(5{,}1943)}{0,215834}\, RD_t + \underset{(15{,}5848)}{0,753590}\, C_{t-1} \quad t = 2, \ldots, 136 \tag{5}$$

[7]Datos del libro: Undergraduate Econometrics (2001) de R.C. Hill, W.E. Griffiths y G.G. Judge.

$$SCR = 339029 \quad R^2 = 0,998679 \quad DW = 1,59122$$

d) ¿Qué supuesto sobre las variables explicativas es necesario para que el estimador MCO sea insesgado?, ¿se cumple este supuesto? Razona tu respuesta.

El estudiante quiere analizar más detenidamente los resultados obtenidos para el modelo (5) por lo que decide estimar la siguiente regresión auxiliar:

$$\underset{\text{(estad-t)}}{\widehat{u}_t} = \underset{(0,4388)}{10,9677} + \underset{(0,9714)}{0,0415440}\,RD_t - \underset{(-0,9617)}{0,0478147}\,C_{t-1} + \underset{(2,4522)}{0,216094}\,\widehat{u}_{t-1} + \hat{e}_t \tag{6}$$

$$SCR = 316915 \quad R^2 = 0,0452226$$

e) ¿Para qué sirve esta regresión auxiliar? ¿Cuál es la conclusión que se obtiene? Contrástalo.

f) Dado el resultado obtenido en el apartado anterior, ¿cuáles son las propiedades del estimador empleado en (5)? Razona tu respuesta.

g) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos hasta el momento, explica detalladamente como estimarías un modelo que explicase el consumo de forma consistente.

h) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos hasta el momento, explica detalladamente como estimarías un modelo que explicase el consumo de forma asintóticamente eficiente.

PROBLEMA LADE-2009.3 (Sep-2009)

Se dispone de datos del consumo en ropa (C_i, **en cientos de euros**) y de la renta (R_i, **en cientos de euros**) de 10 individuos:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_i	7	3	5	6	5	6	4	5	5	4
R_i	14	5	8	10	9	16	7	11	12	8
Sexo	Mujer	Mujer	Mujer	Mujer	Mujer	Hombre	Hombre	Hombre	Hombre	Hombre

Para analizar la proporción de renta que se dedica al consumo en ropa se propone el modelo $C_i = \beta_1 + \beta_2 R_i + u_i$, donde u_i **sigue una distribución normal**. Al estimar el modelo por MCO se obtienen los siguientes resultados:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j})}{\hat{C}_i} = \underset{(0,7026)}{\overbrace{2,1}^{\hat{\beta}_1}} + \underset{(0,0670)}{\overbrace{0,29}^{\hat{\beta}_2}}\, R_i \qquad \sum_{i=1}^{10} \hat{u}_i^2 = 3,59 \qquad R^2 = 0,7008 \tag{1}$$

a) Contrasta si ante un incremento de la renta de 100 euros el incremento medio del consumo en ropa es menor o igual a 35 euros.

b) Se sospecha que la varianza de la perturbación puede ser distinta para los hombres que para las mujeres de la muestra. Para analizar si esta sospecha es cierta se ha estimado por MCO la relación lineal entre consumo en ropa y renta por separado para la muestra de hombres y la de mujeres obteniendo los siguientes resultados:

Para los 5 hombres de la muestra:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_j})}{\hat{C}_i} = \underset{(0,2217)}{\overbrace{2,2913}^{\hat{\alpha}_1}} + \underset{(0,0197)}{\overbrace{0,2323}^{\hat{\alpha}_2}}\, R_i \qquad SCR = 0,0588 \qquad R^2 = 0,98 \qquad N = 5 \tag{2}$$

Para las 5 mujeres de la muestra:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_j})}{\hat{C}_i} = \overbrace{\underset{(0,6275)}{1,1589}}^{\hat{\gamma}_1} + \overbrace{\underset{(0,0650)}{0,4393}}^{\hat{\gamma}_2} R_i \qquad SCR = 0,5547 \qquad R^2 = 0,94 \qquad N = 5 \tag{3}$$

Utiliza estos resultados para contrastar si las perturbaciones del modelo considerado han mantenido constante su dispersión. Explica claramente todos los pasos del contraste.

c) Dado el resultado del contraste anterior, propón y calcula un estimador de los parámetros del modelo que sea asintóticamente eficiente. Supón que los parámetros de la relación consumo de ropa-ingreso para los hombres son iguales que los de la relación consumo de ropa-ingreso para las mujeres.

d) A la vista de los resultados obtenidos hasta ahora, ¿qué puedes decir sobre la fiabilidad del contraste que has realizado en el primer apartado? Razónalo.

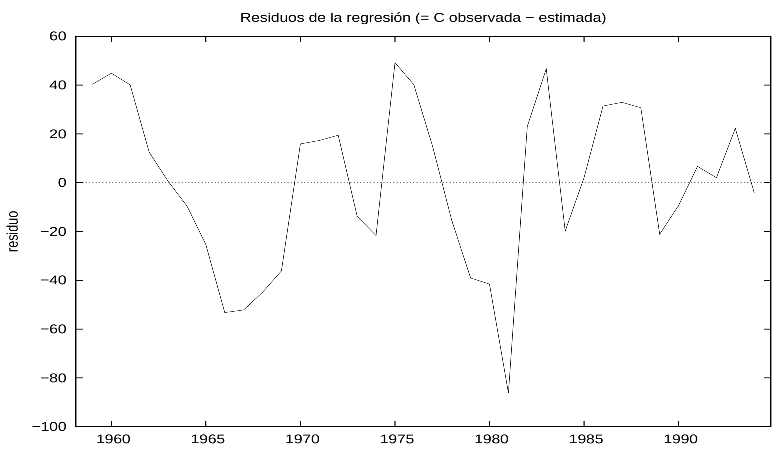
PROBLEMA LADE-2009.4 (Sep-2009)

Un analista quiere determinar la relación existente entre el consumo real (C, medido en billones de dólares) en función del salario real (W, medido en billones de dólares) y las rentas no salariales reales (P, medido en billones de dólares). Para ello dispone de una muestra con observaciones anuales[8] y obtiene los siguientes resultados MCO:

$$\underset{\text{(t-estad)}}{\widehat{C}_t} = \underset{(-11,3620)}{-222,15} + \underset{(21,2615)}{0,693262}\, W_t + \underset{(15,0735)}{0,735916}\, P_t \qquad t = 1959, \ldots, 1994 \tag{4}$$

$$SCR = 38976,5 \quad R^2 = 0,998754 \quad DW = 0,969426 \quad BG(1) = 9,621$$

Además se dispone de la siguiente información:



a) Interpreta el coeficiente estimado asociado a la variable W_t.

[8]Fuente: Ramanathan, R. (2002), Introductory Econometrics with applications, ed. South-Western

b) Comenta el gráfico de residuos. ¿Crees que se cumplen todas las hipótesis básicas sobre la perturbación? Contrástalo.

c) Completa las siguientes matrices, de manera que sean compatibles con el resultado del apartado anterior:

d) Suponiendo que las variables W y P no son estocásticas, razona las propiedades que tiene el estimador MCO de los coeficientes del modelo (4).

e) A continuación el analista se preocupa por la especificación del modelo por lo que decide analizar los resultados MCO de la siguiente especificación:

$$\underset{\text{(t-estad)}}{\widehat{C}_t} = \underset{(-10,1613)}{-223,32} + \underset{(5,4418)}{0,618833}\, W_t + \underset{(0,7730)}{0,0839831}\, W_{t-1} + \underset{(14,6813)}{0,725303}\, P_t \quad t = 1960, \ldots, 1994 \tag{5}$$

$$SCR = 36407,3 \quad R^2 = 0,998754 \quad DW = 0,949518 \quad BG(1) = 7,1034$$

¿Es consistente el estimador MCO de los coeficientes en (5)? Razónalo.

f) Por último el analista estudia los resultados MCO de la siguiente especificación:

$$\underset{\text{(t-estad)}}{\widehat{C}_t} = \underset{(-4,7021)}{-155,77} + \underset{(6,6942)}{0,513348}\, W_t + \underset{(6,4140)}{0,535774}\, P_t + \underset{(2,6911)}{0,270081}\, C_{t-1} \qquad t = 1960, \ldots, 1994 \tag{6}$$

$$SCR = 30081,4 \quad DW = 1,00858 \quad BG(1) = 8,704344$$

Dados **todos** los resultados de la estimación anterior, ¿cómo estimarías el modelo de la mejor manera posible? Argumenta por qué eliges este método, explícalo detalladamente y cita sus propiedades.

PROBLEMA LADE-2009.5 (Sep-2009)

Para explicar las ventas de una correduría de seguros (V_t, en miles de euros) se propone el modelo:

$$V_t = \beta_1 + \beta_2\, F_t + \beta_3\, T_t + \beta_4 C_t + u_t \quad t = 1, 2, \ldots, 400 \text{ observaciones mensuales}$$

donde:

- F_t número de trabajadores fijos de la correduría en el mes t
- T_t número de trabajadores temporales de la correduría en el mes t
- C_t meses desde la fundación de la correduría.

Se supone que las perturbaciones son $u_t \sim \mathcal{NID}(0,\, \sigma_u^2)$ y el resultado de la estimación por VI es:

$$\hat{V}_t = -34{,}95 + 31{,}16\, F_t + 20,14\, T_t + 0{,}60\, C_t \qquad R^2 = 0{,}3559$$

donde se ha usado $D_t =$ tasa provincial de desempleo en el mes t como instrumento para T_t.

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_{VI}) = \begin{bmatrix} 144{,}655 & -8{,}15421 & -47{,}9531 & -1{,}2992 \\ & 5{,}4432 & -1{,}1876 & -0{,}034 \\ & & 35{,}8342 & 0{,}0142 \\ & & & 0{,}0315 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuál puede ser el motivo para haber estimado este modelo por variables instrumentales?.

b) Explica detalladamente cómo se han obtenido las estimaciones de los coeficientes y sus varianzas. (Escribe todas las matrices y vectores).

c) ¿Conoces la distribución en muestras finitas del estimador? ¿Y la distribución asintótica? En caso afirmativo, escríbela.

d) Contrasta la hipótesis de que $\beta_4 = 1$.

e) Contrasta si el efecto sobre las ventas de los trabajadores fijos y temporales es el mismo.

PROBLEMA LADE-2010.1 (Jun-2010)

Un departamento de transportes pretende estudiar la relación existente entre la demanda de un servicio interurbano de autobuses y la población. Para ello dispone de una muestra de diez ciudades sobre:

Y: número medio de viajeros por hora (en cientos)

X: número de habitantes (en miles)

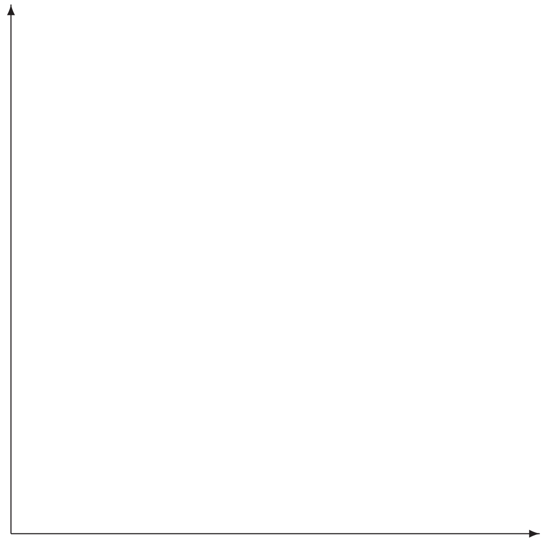
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
Y	23	22	21	24	24	20	34	40	19	28	255
X	10	6	4	5	8	4	8	10	4	7	66

La estimación de $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ por MCO da:

$$\hat{Y}_i = 12,5357 + 1,9643\, X_i \quad i = 1, \ldots, 10. \tag{1}$$

Se supone normalidad de las perturbaciones.

a) Representa la nube de puntos (X, Y) y la recta de regresión en el mismo gráfico. ¿Crees que la dispersión de los errores se mantiene constante a lo largo de la muestra? Responde basándote en el gráfico.



b) **Explica** detalladamente todos los pasos del contraste de Goldfeld y Quandt. Escribe (**con números**) las matrices X e Y de cada regresión. En este ejemplo, ¿por qué es preferible este contraste al de Breusch y Pagan?

c) Estima el modelo por MCG suponiendo que $Var(u_i) = \sigma^2\, X_i^2 \quad i = 1, \ldots, 10$.

d) Contrasta la significatividad del número de habitantes a la hora de explicar la demanda de transporte interurbano de una ciudad.

PROBLEMA LADE-2010.2 (Jun-2010)

Sea el siguiente modelo dinámico:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t \quad t = 2, \ldots, 200 \quad \text{donde } X \text{ es un regresor fijo} \tag{2}$$

a) Escribe la matriz de datos X y el vector Y.

b) ¿Es el estimador MCO insesgado y consistente en los siguientes casos? Demuéstralo.

   S1) $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$

   S2) $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \qquad \epsilon_t \sim iid(0, \sigma_\epsilon^2)$, ρ desconocido

c) Si en alguno de los casos anteriores el estimador MCO es inconsistente y quisiéramos estimar el modelo por Variables Instrumentales, ¿crees que Y_{t-2} sería un instrumento adecuado? ¿Y la variable X_{t-1}? Razona tus respuestas.

d) Explica detalladamente un contraste válido para distinguir entre las situaciones de (S1) y (S2).

e) Explica con todo detalle cómo lograrías un estimador consistente y asintóticamente eficiente de los parámetros del modelo en el caso (S2).

f) Explica cómo realizarías el contraste de significatividad conjunta de la regresión en el caso (S2).

PROBLEMA LADE-2010.3 (Jun-2010)

Se tienen datos mensuales desde enero de 2005 hasta diciembre de 2009 (60 datos) de las variables:

- $Y = \ln$ de las ventas de un grabador de DVDs (en millones de euros)
- $X_2 = \ln$ del precio del grabador (en euros)
- $X_3 = \ln$ del gasto en publicidad (en miles de euros).

Se supone que X_2 y X_3 son no estocásticas y que $u_t \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma_u^2)$ para todo t. A continuación se presentan estimaciones por MCO y $MCGF$ (red de búsqueda):

MCO-1 $\underset{\text{(t-estad.)}}{\widehat{Y}_t} = \underset{(2,9)}{22,1} - \underset{(-3,03)}{0,20}\, X_{2t} + \underset{(1,12)}{0,04}\, X_{3t} \qquad DW = 1,85$

MCO-2 $\underset{\text{(t-estad.)}}{\widehat{Y}_t} = \underset{(3,09)}{23,5} - \underset{(-2,16)}{0,22}\, X_{2t} \qquad DW = 1,38$

MCGF-1 $\underset{\text{(t-estad.)}}{\widehat{Y}_t} = \underset{(3,2)}{21,4} - \underset{(-2,11)}{0,23}\, X_{2t} + \underset{(1,40)}{0,05}\, X_{3t} \qquad \hat{\rho} = 0,12$

MCGF-2 $\underset{\text{(t-estad.)}}{\widehat{Y}_t} = \underset{(2,6)}{25,6} - \underset{(-2,27)}{0,25}\, X_{2t} \qquad \hat{\rho} = 0,31$

a) Haz (y explica) los contrastes de autocorrelación en los modelos MCO-1 y MCO-2.

b) ¿Es significativa la variable X_3 en el modelo MCO-1? ¿Qué puedes decir sobre la validez de este contraste?

c) Explica detalladamente el proceso que se ha utilizado para estimar MCGF-2 (incluidos $\hat{\rho} = 0,31$ y t-estad. $= -2,27$).

d) En vista de los resultados, razona qué modelo y qué método de estimación elegirías.

PROBLEMA LADE-2010.4 (Sep-2010)

Para analizar el precio de la vivienda se han recogido 187 observaciones de las siguientes variables:

Y: precio de la vivienda en miles de euros

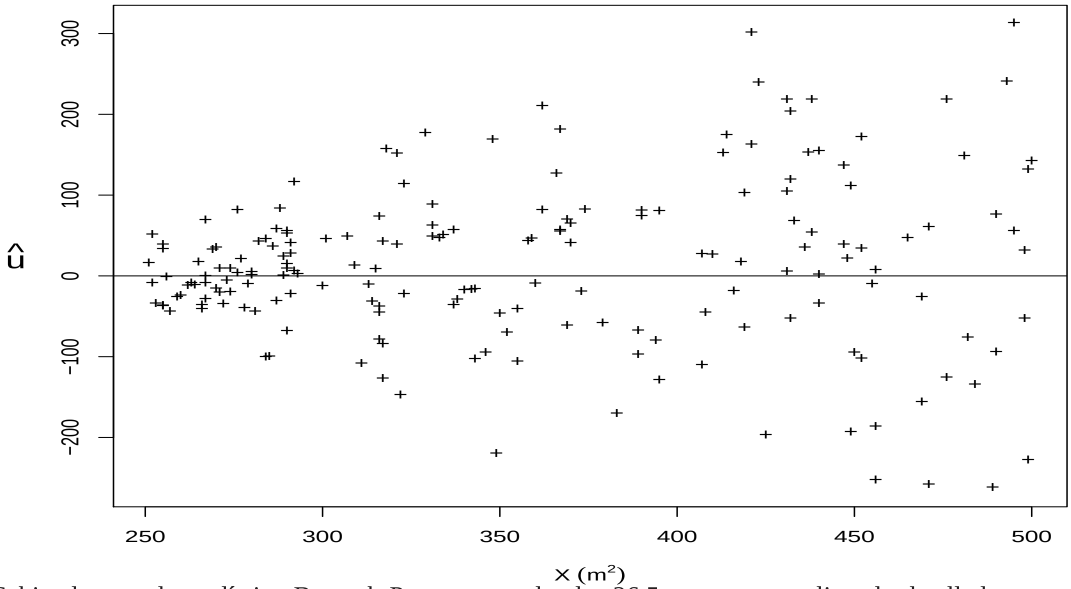
X: superficie de la vivienda en metros cuadrados

Con estos datos se ha estimado la relación lineal entre Y y X por MCO obteniéndose los siguientes resultados:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j})}{\hat{Y}_i} = \underset{(52,9655)}{\overbrace{-357,52}^{\hat{\beta}_1}} + \underset{(0,150752)}{\overbrace{2,60326}^{\hat{\beta}_2}} X_i \tag{1}$$

a) Contrasta la significatividad de la variable superficie.

b) Basándote en el gráfico de residuos MCO frente a la variable superficie que se presenta a continuación, ¿crees que el contraste realizado en el apartado anterior es correcto? ¿Por qué?



c) Sabiendo que el estadístico Breusch-Pagan toma el valor 26,5 contrasta, explicando detalladamente todos los pasos, si las perturbaciones son esféricas.

d) Dado el resultado del apartado anterior, explica detalladamente cómo estimarías de forma eficiente el modelo propuesto.

PROBLEMA LADE-2010.5 (Sep-2010)

Un estudiante desea analizar qué parte del precio de los ordenadores se debe al tamaño del disco duro. Para ello ha calculado el precio medio anual del ordenador en **euros** (P) y el tamaño medio de disco duro anual en **cientos de Gigabytes** (D) para los ordenadores de la tienda de sus padres con los datos de los diez últimos años. Con esta información ha estimado la siguiente regresión por MCO:

$$\underset{\text{(t-estad.)}}{\widehat{P}_t} = \underset{(12,12)}{1504,32} - \underset{(-4,60)}{1,52}\ D_t \qquad R^2 = 0{,}7259 \qquad \sum \hat{u}_t^2 = 443394 \tag{2}$$

En la siguiente tabla se recogen los valores de las variables y de los residuos de la regresión anterior:

Año	P (Precio)	D (Disco)	$\hat{u}_t^{mco}$
1	1776	74	384
2	1560	96	202
3	1370	125	56
4	1203	163	-54
5	1057	213	-124
6	920	225	-243
7	758	285	-314
8	699	421	-166
9	576	640	43
10	548	772	216

a) Interpreta los coeficientes de la regresión (2). ¿Te parecen razonables los valores obtenidos?

b) El estudiante sospecha que puede existir un problema de autocorrelación en la regresión (2). Dibuja un gráfico que permita analizar esta sospecha y comenta razonadamente la posible existencia de autocorrelación.

c) Estima la relación entre precio y disco duro por Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles (MCGF) suponiendo que $u_t \sim AR(1)$.

d) ¿Qué propiedades tiene el estimador que has utilizado?

Un compañero del estudiante le comenta que *todo el mundo sabe que los ordenadores cada día están más baratos* y, por ello, le sugiere incorporar el efecto del paso del tiempo en el modelo mediante la variable $t = 1, 2 \ldots, 10$ medida en años. Se estima por MCO esta nueva especificación obteniéndose el siguiente resultado:

$$\underset{\text{(t-estad.)}}{\widehat{P}_t} = \underset{(70{,}61)}{1872,23} + \underset{(5{,}49)}{0,69}\, D_t - \underset{(-19{,}10)}{187,79}\, t \tag{3}$$

$$R^2 = 0{,}9948 \qquad \sum \hat{u}_t^2 = 8336 \qquad DW = 2,14$$

e) Suponiendo que las perturbaciones siguen una distribución normal, contrasta si el paso del tiempo (t) es una variable relevante. Interpreta su coeficiente estimado.

f) Contrasta la existencia de un proceso AR(1) en las perturbaciones con los datos del modelo (3).

g) A la vista de los resultados obtenidos hasta ahora comenta las propiedades de los tres estimadores que han aparecido en el ejercicio, los de los modelos (2), (3) y el de MCGF que has estimado en el apartado C.

PROBLEMA LADE-2010.6 (Sep-2010)

Un investigador dispone de datos mensuales del consumo (C_i, en miles de euros), la renta que han declarado a Hacienda (R_i, en miles de euros) y el salario del cabeza de familia (S_i, en miles de euros) para un grupo de 10 **familias**:

Familia	consumo	renta declarada	salario
1	1,3	1,5	1,3
2	1,4	1,7	1,6
3	1,5	1,8	1,7
4	1,1	1,2	1,0
5	1,7	1,9	1,6
6	1,5	1,7	1,6
7	1,4	1,6	1,4
8	1,3	1,5	1,4
9	1,3	1,5	1,4
10	1,7	1,7	1,3
$\sum variable$	14,2	16,1	14,3
$\sum variable^2$	20,48	26,27	20,83

Para analizar la proporción de renta que se dedica al consumo se propone el modelo: $C_i = \alpha + \beta R_i + u_i$, donde u_i sigue una distribución normal. Se ha estimado este modelo por MCO con los datos de consumo y renta declarada a Hacienda de la tabla anterior y se han obtenido los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{C}_i} = \underset{(0{,}2406)}{0,0453} + \underset{(0{,}1485)}{0,8539}\, R_i \qquad R^2 = 0{,}8052 \quad \sum \hat{u}_i^2 = 0,0615 \tag{4}$$

a) ¿Te parece probable que exista autocorrelación en las perturbaciones de este modelo? Razónalo.

b) Se cree que alguna de las familias puede haber declarado a Hacienda una renta distinta a la real, con lo que los datos observados no serían iguales a la variable de interés, es decir, observaríamos la variable renta con error, $RD_i = R_i + \epsilon_i$, donde R_i es la variable explicativa que no observamos y RD_i es la variable observada, la renta declarada a Hacienda. ¿Qué consecuencias tendría este hecho sobre el estimador de MCO? Demuéstralo.

c) Supón que, en efecto, la renta se mide con error. Estima el modelo por el método de Variables Instrumentales.

d) Sea $\widehat{Var}(\widehat{\beta}_{VI}) = \begin{bmatrix} 0,0954 & -0,0586 \\ -0,0586 & 0,0364 \end{bmatrix}$ la matriz de varianzas y covarianzas estimada del estimador de VI. Explica cómo se ha calculado.

e) Contrasta si, en efecto, la renta se mide con error o no. Comenta la fiabilidad del contraste en esta aplicación.

f) En función de los resultados obtenidos hasta ahora, ¿qué estimador te parece preferible, el de MCO o el de VI? Razónalo.

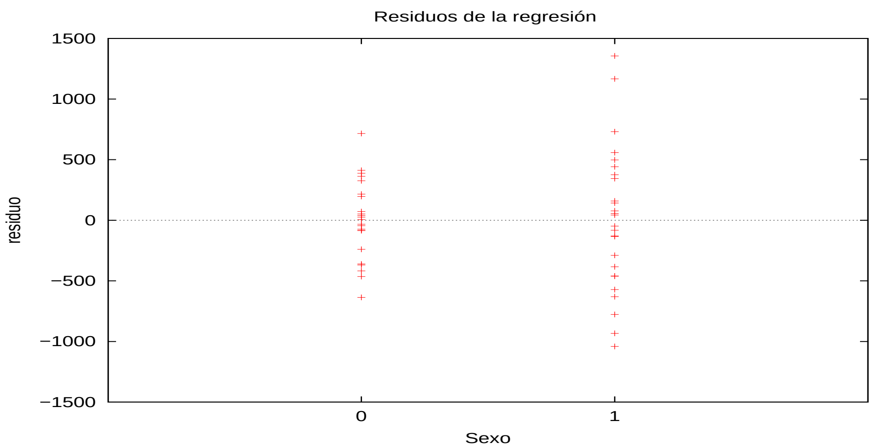
PROBLEMA LADE-2011.1 (Jun-2011)

Se quiere analizar el salario mensual (S_i) de 49 trabajadores de una determinada empresa. Para ello se dispone de información sobre las variables educación (Edu_i), experiencia laboral (Exp_i), edad ($Edad_i$) y sexo (H_i) de cada uno de los trabajadores. Nota: La variable H_i toma valor 1 si el individuo es hombre y 0 en caso contrario.

Para explicar el salario se proponen y estiman por MCO los siguientes modelos:

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\widehat{S}_i} = \underset{(383,13)}{648,27} + \underset{(31,69)}{132,50}\, Edu_i + \underset{(13,04)}{37,97}\, Exp_i - \underset{(7,69)}{5,83}\, Edad_i + \underset{(147,31)}{487,67}\, H_i \qquad (1)$$

$$\underset{(\widehat{desv.})}{\widehat{S}_i} = \underset{(258,87)}{434,82} + \underset{(31,51)}{133,55}\, Edu_i + \underset{(12,13)}{34,45}\, Exp_i + \underset{(144,87)}{470,46}\, H_i \qquad (2)$$



a) ¿Cuál de los dos modelos te parece más adecuado? Razona tu respuesta.

b) El investigador cree que la varianza de la perturbación puede ser diferente para hombres y mujeres. Para buscar evidencia a favor de esta hipótesis dibuja un gráfico de los residuos (del modelo más adecuado) frente a la variable Sexo. Recordad que el valor 0 recoge a las mujeres de la muestra y el valor 1 a los hombres. ¿Qué se puede observar en el gráfico?

c) Después de observar el gráfico, decide hacer un contraste de heterocedasticidad. La varianza de la perturbación la especifica de la siguiente manera: $\sigma_i^2 = h(\alpha_0 + \alpha_1 H_i)$. ¿Qué contraste va a llevar a cabo? Explícalo paso a paso.

d) En base a los siguientes datos, ¿qué conclusión obtiene?

$$\frac{\hat{u}_i^2}{\tilde{\sigma}_u^2} = 0,443 + 1,050 H_i + \hat{w}_i \qquad SCT = 127,66 \quad SCR = 114,21$$

e) Con los resultados obtenidos hasta el momento, ¿qué método de estimación propondrías? Explícalo en detalle y comenta sus propiedades.

PROBLEMA LADE-2011.2 (Jun-2011)

Se desea analizar el comportamiento de las importaciones de España (Y) en función del Producto Interior Bruto (PIB) y la Inversión (I). Para ello se ha estimado el siguiente modelo por MCO (DW: Durbin-Watson; BG(1): Breusch Godfrey para autocorrelación de orden 1):

$$\underset{(estad-t)}{\widehat{Y}_t} = \underset{(9{,}32)}{\overbrace{0{,}44}^{\hat{\beta}_1}} + \underset{(19{,}47)}{\overbrace{0{,}00018}^{\hat{\beta}_2}} PIB_t + \underset{(20{,}27)}{\overbrace{0{,}39}^{\hat{\beta}_3}} I_t \quad t = 1976, \ldots, 2009 \tag{3}$$

$$R^2 = 0{,}89 \qquad SCR = 1{,}42 \qquad DW = 0{,}96 \qquad BG(1) = 9{,}14$$

a) Explica con todo detalle cómo contrastarías la existencia de un proceso autorregresivo de primer orden en las perturbaciones y con la información aportada, realiza el contraste.

b) En el caso de que las perturbaciones siguieran un proceso autorregresivo de orden 1:

$$u_t \sim \text{AR(1)}: \qquad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (0, \sigma_\varepsilon^2), \qquad |\rho| < 1$$

   a) Obtén (demuestra) a qué es igual $Cov(u_t, u_{t-1})$.

   b) Escribe la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones.

   c) En este caso, ¿sería consistente el estimador MCO? ¿Y asintóticamente eficiente? Razónalo.

   d) Detalla cómo estimarías el modelo de forma consistente y asintóticamente eficiente.

Otra posible especificación consiste en dinamizar el modelo introduciendo la variable endógena retardada un periodo como variable explicativa. El resultado de la estimación por MCO es el siguiente:

$$\underset{(estad-t)}{\widehat{Y}_t} = \underset{(3{,}72)}{\overbrace{0{,}39}^{\hat{\alpha_1}}} + \underset{(15{,}28)}{\overbrace{0{,}000179}^{\hat{\alpha_2}}} PIB_t + \underset{(9{,}70)}{\overbrace{0{,}43}^{\hat{\alpha_3}}} I_t \underset{(-0{,}2791)}{\overbrace{-0{,}015}^{\hat{\alpha_4}}} Y_{t-1} \qquad t = 1977, \ldots, 2009 \qquad (4)$$

$$R^2 = 0{,}96 \qquad SCR = 1{,}38 \qquad DW = 0{,}89 \qquad BG(1) = 8{,}79$$

c) Se sospecha que la autocorrelación detectada en los residuos del modelo (3) puede ser debida a la omisión de la variable relevante Y_{t-1}. Razona por qué una mala especificación puede provocar problemas de autocorrelación.

d) ¿Qué propiedades tiene el estimador MCO del modelo (4) ? Realiza algún contraste si lo consideras oportuno.

PROBLEMA LADE-2011.3 (Jun-2011)

Un investigador dispone de datos del salario mensual (S_i, en miles de euros) y de los años de educación post-obligatoria (E_i) para un grupo de 10 personas. Además dispone de información de la distancia de su hogar materno a la universidad más cercana (D_i, en decenas de kilómetros):

Individuo	Salario S_i	Educación E_i	Distancia D_i
1	1,0	1	13
2	2,2	6	6
3	2,4	4	9
4	2,5	3	9
5	3,7	7	4
6	2,4	4	8
7	2,3	0	14
8	2,2	3	9
9	1,8	7	5
10	3,1	8	3
$\sum variable$	23,60	43	80
$\sum variable^2$	60,28	249	758

Para analizar el efecto de la educación en el salario de un individuo se propone el modelo: $S_i = \alpha + \beta E_i + u_i$.
Se ha estimado este modelo por MCO con los datos de la tabla anterior y se han obtenido los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv})}{\widehat{S}_i} = \underset{(0{,}3960)}{1,7348} + \underset{(0{,}0794)}{0,1454}\, E_i \qquad R^2 = 0{,}2956 \quad \sum \hat{u}_i^2 = 3,2289 \qquad (5)$$

a) ¿Te parece probable que exista autocorrelación en las perturbaciones de este modelo? Razónalo.

b) Se piensa que la variable Educación y la perturbación del modelo pueden estar correlacionadas. Si esto fuese cierto, ¿qué propiedades tendría el estimador de MCO del modelo (5)? Razónalo en detalle.

c) **Estima** el modelo por el método de Variables Instrumentales (VI) utilizando la variable Distancia como instrumento (el investigador piensa que esta variable puede estar relacionada de forma negativa con la educación, pero no cree que se relacione con la perturbación del modelo). **Nota:** al no ser una matriz simétrica el determinante de $Z'X$ puede ser negativo.

d) Sea $\widehat{Var}(\widehat{\beta}_{VI}) = \begin{bmatrix} 0,1836 & -0,0319 \\ -0,0319 & 0,0074 \end{bmatrix}$ la matriz de varianzas y covarianzas asintótica estimada del estimador de VI. Explica cómo se ha calculado (no realices ningún cálculo).

e) Contrasta si, en efecto, la variable Educación y la perturbación del modelo están correlacionadas. Comenta la fiabilidad del contraste en esta aplicación.

PROBLEMA LADE-2011.4 (Sep-2011)

Se dispone de datos de la media de la Nota de Acceso a la Universidad ($Nota$) para 201 centros educativos de la CAV para los años 2009 y 2010 (N=201+201=402) por tipo de centro: público (PU) o concertado-privado (PR). Para analizar el efecto del tipo de centro en la nota se estima por MCO con todos los datos (los de 2009 y 2010) obteniendo los siguientes resultados:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j})}{\widehat{Nota}_i} = \underset{(0,0458)}{\overbrace{6,2647}^{\hat{\beta}_1}} \underset{(0,0677)}{\overbrace{-0,1928}^{\hat{\beta}_2}} PU_i \qquad \sum_{i=1}^{402} \hat{u}_i^2 = 182,7854 \qquad N = 402 \tag{1}$$

donde PU_i es una variable ficticia que toma valor 1 si el centro es público y cero en caso contrario. Se supone que u_i **sigue una distribución normal**.

a) Se sospecha que la varianza de la perturbación puede ser diferente en los distintos años. Para analizar si esta sospecha es cierta se ha estimado por MCO el modelo para los años 2009 y 2010 por separado:

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j})}{\widehat{Nota}_{i,2009}} = \underset{(0,0680)}{\overbrace{6,0971}^{\hat{\beta}_1^{2009}}} \underset{(0,1005)}{\overbrace{-0,2316}^{\hat{\beta}_2^{2009}}} PU_{i,2009} \qquad \sum_{i=1}^{201} \hat{u}_{i,2009}^2 = 100,2597 \qquad N_{2009} = 201 \tag{2}$$

$$\underset{(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j})}{\widehat{Nota}_{i,2010}} = \underset{(0,0562)}{\overbrace{6,4323}^{\hat{\beta}_1^{2010}}} \underset{(0,0831)}{\overbrace{-0,1540}^{\hat{\beta}_2^{2010}}} PU_{i,2010} \qquad \sum_{i=1}^{201} \hat{u}_{i,2010}^2 = 68,5586 \qquad N_{2010} = 201 \tag{3}$$

Contrasta si las perturbaciones del modelo han mantenido constante su dispersión en los dos años. Explica claramente los pasos del contraste y especifica la hipótesis nula, la alternativa, el estadístico de contraste y la regla de decisión.

b) Con los resultados obtenidos hasta el momento, ¿qué método de estimación propondrías para estimar el modelo (1)? Explícalo en detalle y comenta sus propiedades.

c) Durante el curso 2010 se implementó en la CAV un plan para mejorar el resultado de los alumnos en las pruebas de acceso. Se supone que este plan ha funcionado y que, por tanto, hay un cambio estructural en el modelo (los coeficientes del modelo son distintos en el año 2009 y en el 2010). Escribe un sistema de ecuaciones que tenga en cuenta esta circunstancia y propón un estimador de los parámetros que sea asintóticamente eficiente.

PROBLEMA LADE-2011.5 (Sep-2011)

Sea el siguiente modelo de regresión:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 X_t + u_t \qquad t = 2, \ldots, 80 \tag{4}$$

donde $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$ y consideramos que $\mathbf{X_t}$ **es una variable fija**. Utilizando el estimador MCO se han obtenido los siguientes resultados:

$$\underset{(\widehat{desv})}{Y_t} = \underset{(0,91)}{3,02} + \underset{(0,21)}{0,59}\, Y_{t-1} + \underset{(0,32)}{1,02}\, X_t + \hat{u}_t \quad R^2 = 0,65 \quad DW = 1,8$$

$$\hat{u}_t = 0,041 + 0,039\hat{u}_{t-1} - 0,008Y_{t-1} + 0,021X_t + \hat{v}_t \quad R^2 = 0,017$$

a) Utilizando la información disponible, ¿es el estimador de MCO un estimador insesgado de los coeficientes del modelo?, ¿consistente? Razona con todo detalle tu respuesta.

Supongamos, para los siguientes apartados que $u_t \sim iid(0, \sigma_u^2)$ y que la variable $\mathbf{X_t}$ **es estocástica** y se sospecha que $E(X_t u_t) \neq 0$. Por tanto, utilizando la variable Z_t como instrumento de la variable X_t, se estima el modelo por el método de variables instrumentales.

Estimación VI:

$$\hat{Y}_t = 2,61 + 0,67Y_{t-1} + 2,35X_t \tag{5}$$

donde

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_{VI}) = \begin{pmatrix} 1,09 & 0,09 & 0,07 \\ 0,09 & 0,11 & 0,10 \\ 0,07 & 0,10 & 0,42 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué condiciones debe verificar la variable instrumental Z_t para que el estimador de VI sea consistente?

c) Explica cómo se ha obtenido la estimación de los coeficientes β por el método de VI, $\hat{\beta}_{VI}$, y la estimación de su matriz de varianzas y covarianzas asintótica, $\hat{Var}(\hat{\beta}_{VI})$. Detalla cómo es cada matriz o vector utilizados.

d) Realiza un contraste para decidir el método de estimación más adecuado.

e) Contrasta la significatividad de la variable X_t.

PROBLEMA LADE-2011.6 (Sep-2011)

Se dispone de las siguientes observaciones muestrales de las variables Y_t y X_t:

t	Y_t	X_t
1	14	6
2	19	8
3	22	10
4	15	6
5	18,5	8
6	26,5	12
7	11	4
8	6	2
Suma	132	56
Media	16,5	7

Se supone que X es una variable no estocástica. Para analizar la relación entre las variables X e Y se ha estimado por MCO, con la información de la tabla anterior, el modelo de regresión lineal simple:

$$\hat{Y}_t = 2,5 + 2X_t$$

a) Dibuja un gráfico que te permita detectar la existencia de autocorrelación. ¿Encuentras indicios de autocorrelación?, ¿de qué signo? Comenta en detalle.

b) Realiza el contraste de Durbin y Watson.

c) Basándote en los resultados obtenidos en los apartados anteriores, ¿qué propiedades tiene el estimador de MCO?, ¿Qué puedes decir sobre la validez de los contrastes realizados con este estimador? ¿Existe un *mejor* estimador?

d) Estima los parámetros del modelo mediante el método de Mínimos Cuadrados Generalizados suponiendo que $u_t \sim AR(1)$ con $\rho = -0,8$.