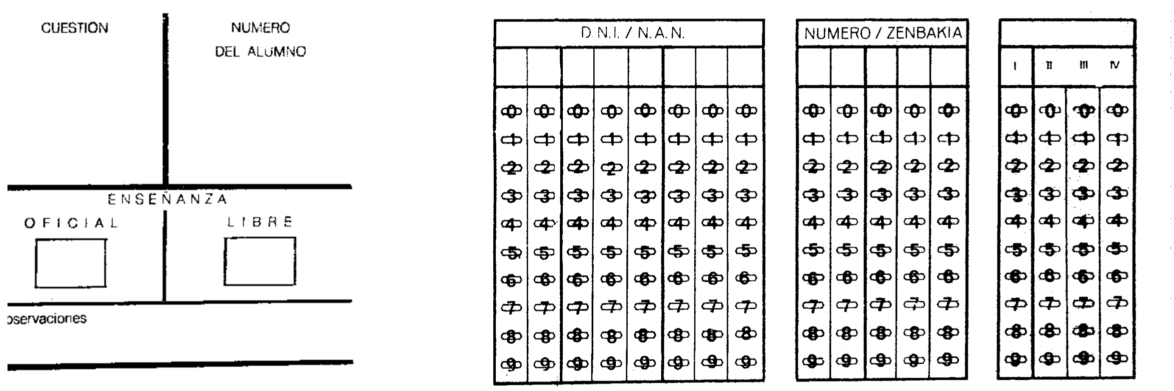
OHARRAK

1. Examina, ematen zaizuen kodifikazio orrian erantzuten diren galderaz osaturik dago eta orri desberdinetan erantzuten diren problemetaz.
2. Erantzun bat aukeratzeko, **nahikoa da aukeratutako letra gainean dagoen errektanguluan, behar den bezala marra bat egitea**, kodifikazio orrian. Lehenengo pentsatu, nahiz eta atzindu ahal izan (arkatzaz idazten baduzu) ez da aholkagarria. AHOLKUA: Egokiak iruditzen zaizkizuen erantzunak examina paperean seinalatu eta ematen diren azken hamar minututan kodifikazio orrira pasatu.
3. Aukera anizkoitza duten galderetan beti dago egokia den **bakar bat**. Zuzen erantzuten den galdera bakoitzak puntu bat balio du, gaizki erantzuten direnek 0.2ko penalizazioa dute . Erantzuten ez diren galderek ez dute penalizaziorik.
4. A, B eta C problema bakoitza, paper ezberdinetan erantzun behar dira. Examinaren bilketa mailaz maila izango da, arbelan jarriko diren momentuetan; lehenengo kodifikazio orria, eta gero A, B eta C problemak ordena honetan.
5. Azterketaren formularioak sei orri ditu, behe partean zenbakiz hornituta (0.1etik 0.6ra). Ziurtatu guztiak hartzen dituzula eta kexa zaitez zure formularioa ezosoa balitz. Azterketa mota ezberdinak daude. Hau 0 motakoa da; jarri 0 bat zure kodifikazio orriaren I zutabean, adibidean bezala.
6. Guztira 30 eta 30 puntu lor daitezke galdera eta problemetan, hurrenez hurren. Beharrezkoak dira 15 eta 15 puntu atal bakoitzean azterketa gainditzeko. 14 erantzun edo gehiago dituzten galdera-sortek konpensa daitezke puntuazio oso ona ateratzen bada problemetan.
7. Bete itzazu zure datuak kodifikazio orrian eta ematen diren paperetan. Deialditan (II. zutabea) egin dituzun deialdien kopurua jarriko duzu, hau ere kontutan hartuz.

Adibidea:

12545 JAUREGI, Aitor Azterketa mota 0 Deialdiak



GALDERAK (Iraupena: ordu 1 eta 30 minutu)

1. **OPARI-GALDERA.** Zein da Espainiako hiriburua?

   (A) Paris (B) Sebastopol (C) Madrid (D) Londres (E) Pekin

Hurrengo adierazburua 2tik 4ra doazen galderei dagokie:

Lantegi batean egiten diren piezen luzerak, zentimetrotan, $N(10, \sigma^2 = 4)$ banaketa jarraitzen du. Pieza bat onargarria da bere luzera (8,12) tartean badago.

2. Denbora konkretu batean 100 pieza egin badira, onargarriak diren piezen kopuruaren banaketa zehatza honako hau da:

   (A) $b(0.6826, 100)$ (B) $\mathcal{P}(\lambda = 68.26)$ (C) Dena gezurrezkoa (D) $N(1000, \sigma^2 = 400)$ (E) $b(0.3174, 100)$

3. Denbora horretan lantegiak egin dituen pieza onargarrien kopuruaren batezbestekoa hurrengoa da:

   (A) 31.74 (B) 50.34 (C) 68.26 (D) 84.13 (E) 15.87

4. Denbora horretan 20 pieza baino gehiago **baztertzeko** probabilitatea, gutxi gorabehera izango da:

   (A) 0.01 (B) 0.50 (C) 0.76 (D) 0.99 (E) 0.24

Hurrengo adierazburua 5etik 8ra doazen galderei dagokie:

Gasolindegi batera minutu bakoitzean heltzen diren bezeroen kopuruak Poissonen banaketa jarraitzen du, batezbestekoa 0.80 izanik. Independentzia suposatzen da.

5. Banaketa horren moda honako hau da:

   (A) 0 eta 1 (B) 1 (C) 0 (D) 1 eta 2 (E) 2 eta 3

6. Minutu batean gasolindegira bi bezero baino gehiago heltzeko probabilitatea izango da:

   (A) 0.0474 (B) 0.1912 (C) 0.4493 (D) 0.8088 (E) 0.9526

7. 10 minututan gehienez 5 bezero heltzeko probabilitatea hurrengoa da:

   (A) 0.8088 (B) 0.3841 (C) 0.0996 (D) 0.1912 (E) 0.6159

8. Ordu oso batean gehienez 50 bezero heltzeko probabilitatea, gutxi gorabehera, honako hau da:

   (A) 0.6406 (B) 0.8106 (C) 0.9772 (D) 0.1894 (E) 0.3594

9. Bitez X eta Y a.a. independente bi, $X \in \gamma(a, 1)$ eta $Y \in \gamma(b, 1)$ izanik. $X + Y$ a.a.-aren banaketa hurrengoa da:

   (A) $\gamma(a + b, 1)$ (B) χ^2_1 (C) χ^2_{a+b} (D) Dena gezurrezkoa (E) $\gamma(a, 2)$, $a = b$ bada

10. Bedi $\{X_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ a.a.-en segida bat, hurrengo banaketarekin:

$$X_n = \begin{cases} 2, & \left(1-\frac{1}{n}\right) \text{ probabilitatearekin} \\ 0, & \frac{1}{n} \text{ probabilitatearekin} \end{cases}$$

Segida horrek konbergitzen du:

(A) bakarrik banaketan eta probabilitatean $X = 2$-ra

(B) bakarrik banaketan eta probabilitatean $X = 0$-ra

(C) banaketan, probabilitatean eta batezbesteko koadratikoan $X = 2$-ra

(D) banaketan, probabilitatean eta batezbesteko koadratikoan $X = 0$-ra

(E) Dena gezurrezkoa

11. Bedi $\{X_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ a.a.-en segida bat $N(1, \sigma^2 = 1/n)$ banaketarekin. $N(m, \sigma^2)$ a.a. baten funtzio karakteristikoa $\psi_n(u) = e^{ium-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$ dela jakina bada, segida horrek konbergitzen du:

(A) banaketan $N(1, 1)$ a.a-ra

(B) banaketan eta probabilitatean $X = 1$-era

(C) banaketan $N(1, 2)$ a.a-ra

(D) banaketan eta probabilitatean $X = 0$-ra

(E) Dena gezurrezkoa

12. Bitez X eta Y a.a. independente bi, $N(0, 1)$ banaketarekin. Bitez $W = Y^2$ eta $Z = \frac{X}{\sqrt{W}}$. Z-ren banaketa hurrengoa da:

(A) χ^2_1 (B) $N(0, 1)$ (C) $Z \equiv 1$ (D) $\mathcal{F}_{1,1}$ (E) t_1

13. Bedi X a.a. bat t_n banaketarekin (n askatasun gradu dituen Student t). Orduan, hurrengoa egiaztatzen da:

(A) $t_{n,\alpha} > t_{n,\frac{\alpha}{4}}$ (B) $t_{n,\alpha} = -t_{n,1-\alpha}$ (C) $t_{n,\alpha} > t_{n,\frac{\alpha}{2}}$ (D) $t_{n,\frac{\alpha}{2}} > t_{n,\frac{\alpha}{4}}$ (E) $t_{n,\alpha} = t_{n,1-\alpha}$

14. Bedi X a.a. bat λ parametroa duen Poisson banaketarekin. λ parametroa estimatzeko n tamainuko l.a.b. bat hartu da: $X_1, \ldots, X_n$. λ parametroaren estatistiko nahiko bat honako hau da:

(A) $\sum_{i=1}^n X_i$ (B) $\prod_{i=1}^n X_i$ (C) $\prod_{i=1}^n X_i!$ (D) $\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i}\right)$ (E) $\sum_{i=1}^n X_i!$

Hurrengo adierazburua 15 eta 16 galderei dagokie:

Bedi X a.a. bat hurrengo zenbatasun funtzioarekin:

$$P(X=0) = 4\theta; \quad P(X=2) = \frac{1}{2} - 2\theta; \quad P(X=-2) = \frac{1}{2} - 2\theta.$$

θ parametroa estimatzeko n tamainuko l.a.b. bat hartu da, bertan lau zero irten direlarik.

15. θ parametroaren estimazioa egiantz handienen metodoarekin honako hau da:

(A) $\frac{1}{n}$ (B) $\frac{1}{4n}$ (C) $\frac{n-1}{4n}$ (D) $\frac{n-1}{n}$ (E) $\frac{4}{n}$

16. θ parametroaren estimazioa momentuen metodoarekin honako hau da:

(A) $\frac{n-1}{4n}$ (B) $\frac{1}{4n}$ (C) $\frac{4}{n}$ (D) $\frac{n-1}{n}$ (E) $\frac{1}{n}$

Hurrengo adierazburua 17tik 20ra doazen galderei dagokie:

Badakigu normal banaketa duen populazio batean laginketa egiten denean $\frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$ dela, S^2 laginaren bariantza izanik, eta χ^2_p banaketa baten batezbestekoa eta bariantza, hurrenez hurren, p eta $2p$ direla.

17. S^2-ren batezbestekoa, $E(S^2)$, izango da:

(A) σ^2 (B) Dena gezurrezkoa (C) $\frac{(n-1)\sigma^2}{n}$ (D) $\frac{n\sigma^2}{(n-1)}$ (E) $\frac{n(n-1)}{\sigma^2}$

18. S^2, σ^2-ren estimatzaile alboragabea da?

(A) bai (B) - (C) - (D) - (E) ez

19. S^2-ren bariantza hurrengoa da:

(A) $\frac{2n(n-1)}{\sigma^2}$ (B) Dena gezurrezkoa (C) $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$ (D) $\frac{2(n-1)\sigma^2}{n}$ (E) $\frac{2(n-1)n^2}{\sigma^4}$

20. S^2, σ^2-ren estimatzaile tinkoa da?

(A) bai (B) - (C) - (D) - (E) ez

Hurrengo adierazburua 21etik 23ra doazen galderei dagokie:

Populazio bateko probabilitate banaketa $\gamma(a = 5, r)$ delaren hipotesi nulua kontrastatu nahi da, $\gamma(a = 2, r)$ hipotesi alternatiboaren aurka, hau da, r parametroa berdina litzateke banaketa bietan. Gogora ezazu $\gamma(a, r)$ banaketa baten dentsitate funtzioa hurrengoa dela:

$$f(x; a, r) = \frac{a^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1}e^{-ax}, \quad x > 0,\ a, r > 0$$

Horretarako aipatutako populaziotik behaketa bateko lagin bat hartu da (hau da, lagina X balioa da).

21. X balio horrentzat potentzia maximoa duen eskualde kritikoaren itxura honako hau da:

(A) $[K_1, K_2]$ (B) $[0, K]$ (C) $[K, +\infty]$ (D) $[K_1, K_2]^c$ (E) Dena gezurrezkoa

22. $r = 1$ eta $x = 0.40$ badira, zein da kontrastearen erabakia 0.05 esangura mailarekin?

(A) - (B) H_0 ez baztertu (C) H_0 baztertu (D) - (E) -

23. Eta kasu horretan, esangura maila horrentzat, zein izango litzateke, gutxi gorabehera, potentzia?

(A) 0.70 (B) 0.60 (C) 0.30 (D) 0.40 (E) 0.95

Hurrengo adierazburua 24 eta 25 galderei dagokie:

Bedi X a.a. bat $U[\theta, 5]$ banaketa uniformearekin. $H_0 : \theta = \theta_0$ hipotesi nulua, $H_1 : \theta = \theta_1$, hipotesi alternatiboaren aurka kontrastatzeko ($\theta_0 < \theta_1$), $n = 1$ tamainuko lagina hartzen da eta H_0 baztertzea erabakitzen da laginaren balioa 2 edo handiagoa bada.

24. $\theta_0 = 0$ bada, proba horren esangura maila izango da:

(A) 0.20 (B) Dena gezurrezkoa (C) 0.60 (D) 0.05 (E) 0.40

25. $\theta_1 = 1$ bada, proba horren potentzia izango da:

(A) 0.60 (B) Dena gezurrezkoa (C) 0.25 (D) 0.75 (E) 0.40

Hurrengo adierazburua 26 eta 27 galderei dagokie:

Txanpon batean aurpegia edo gurutzea irteteko probabilitateak berdinak diren (txanpon erregularra) edo bestela $P(\text{aurpegia}) = 0.70$ probabilitatea duen txanpon trukatua den kontrastatu nahi da. Horretarako txanpona 10 bider jaurtitzen da.

26. Txanpona 10 bider jaurtitzen bada eta Z a.a.-k lortutako aurpegien kopurua adierazten badu, %5 esangura mailarekin, erabakia txanpona erregularra dela baztertzea izango da hurrengoa betetzen bada:

(A) $Z \geq 8$ (B) $Z \geq 9$ (C) $Z \geq 6$ (D) $Z = 0$ (E) $Z \geq 3$

27. Txanpon trukatua bada, txapona erregularra dela ez baztertzeko probabilitatea izango da:

(A) 0.0282 (B) 0.8507 (C) 0.1493 (D) 0.0107 (E) 0.3828

Hurrengo adierazburua 28tik 30era doazen galderei dagokie:

Pertsona batek kalkulagailu bat erosteko asmoa dauka. Erosketa egin aurretik 16 dendetan prezioa galdetzen du, 178 eurotako batezbesteko prezioa lortuz eta laginaren desbidazio tipikoa 12 eurotakoa izanik. Banaketa normala dela suposatzen da.

28. %90 konfidantza mailarekin baieztatu dezakegu kalkulagailuaren batezbesteko prezioa hurrengo tartean dagoela:

(A) (172.58, 183.42) (B) (173.85, 182.15) (C) (169.40, 186.60)
(D) (167.30, 188.70) (E) (171.40, 184.60)

29. %10eko esangura mailarekin kalkulagailuaren batezbesteko prezioa $m = 180$ den hipotesi nulua kontrastatu nahi bada, kontrastearen erabakia hurrengoa da:

(A) hipotesi nulua ez baztertu (B) - (C) hipotesi nulua baztertu (D) - (E) -

30. %90 konfidantza mailarekin baieztatu daiteke kalkulagailuaren prezioaren **desbidazio tipikoa** hurrengo tartean dagoela:

(A) (9.60, 17.81) (B) (9.15, 19.18) (C) (8.77, 16.30)
(D) (83.78, 368.05) (E) (102.16, 187.36)

PROBLEMAK (Denbora: 75 minutu)

A. (10 puntu, 25 minutu)

Izan bitez $X_1, \ldots, X_n$ a.a. independenteak non $X_1 \in N(k_1\theta, \sigma^2)$, $X_2 \in N(k_2\theta, \sigma^2), \ldots, X_n \in N(k_n\theta, \sigma^2)$ diren, denak $\sigma^2 > 0$ bariantza ezagunarekin eta $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ konstanteak ere ezagunak dira.

Gogora ezazu $N(m, \sigma^2)$ banaketaren dentsitate funtzioa honako hau dela:

$$f(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\; e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

i) Lor ezazu θ parametroaren estimazioa egiantz handienen metodoa aplikatuz.

ii) Aipatutako estimatzaile hori alboragabea da? Zeintzuk dira behar dituzun baldintza edo baldintzak estimatzaile hau tinkoa izan dadin? Oharra: Azken galdera honi erantzuteko estimatzailearen bariantza lortu behar duzu.

B. (10 puntu, 25 minutu)

Hurrengo taulak X aldagai diskretuaren probabilitate banaketa biltzen du hipotesi nulupean ($P_0(x)$) eta hipotesi alternatibopean ($P_1(x)$).

X	0	1	2	3	4	5	6
$P_0(x)$	0	0	0.05	0.05	0.10	0.40	0.40
$P_1(x)$	0.20	0.20	0.10	0.10	0.40	0	0

$n = 1$ tamainuko l.a.b. bat dugu $H_0 : P(x) = P_0(x)$ hipotesi nulua, $H_1 : P(x) = P_1(x)$ hipotesi alternatiboaren aurka kontrastatzeko.

i) Barneratuko zenituzke $X = \{5, 6\}$ puntuak eskualde kritikoan? Azal ezazu.

ii) Barneratuko zenituzke $X = \{0, 1\}$ puntuak eskualde kritikoan? Azal ezazu.

iii) %10 esangura mailarekin lor ezazu kontraste horrentzat eskualde kritikorik potenteena erantzuna arrazoituz. **Oharra**: Galdera hau erantzun aurretik gogoratu aurreko ataletan erantzundakoa.

C. (10 puntu, 25 minutu) Bedi $N(m, \sigma^2)$ banaketa duen X a.a. bat, bariantza ezezaguna da eta estimatu nahi da. Horretarako n tamainuko l.a.b. bat hartu da: $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

i) Azal ezazu, detaile guztiarekin, nola lortzen den $(1-\alpha)$ konfidantza maila duen σ^2-ren konfidantza tartea.

ii) $n = 30$ bada eta laginan lortutako bariantzaren balioa $s^2 = 25$ bada, lor ezazu %95 konfidantza maila tartea σ^2 populazioaren bariantzarentzat.

SOLUCIONES DEL CUESTIONARIO (tipo 0)

1: C	11: B	21: C
2: A	12: E	22: B
3: C	13: B	23: C
4: D	14: A	24: C
5: C	15: A	25: D
6: A	16: E	26: B
7: D	17: C	27: B
8: A	18: E	28: A
9: E	19: C	29: A
10: C	20: A	30: A

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

Problema A

Como $X_i \in N(k_i\theta, \sigma^2)$, con varianza $\sigma^2 > 0$ conocida, entonces tenemos que

$$f(x_i;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{(x_i-k_i\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

i) Así, la función de verosimilitud estará dada por

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$$

$$L(\theta) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{(x_1-k_1\theta)^2}{2\sigma^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{(x_2-k_2\theta)^2}{2\sigma^2}}\right]\cdots\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{(x_n-k_n\theta)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\ e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-k_i\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

El estimador máximo verosímil de θ es el valor que maximiza la función de verosimilitud o, equivalentemente, su logaritmo neperiano:

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-k_i\theta)^2}{2\sigma^2}$$

Derivando respecto de θ, tendremos que:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-k_i\theta)(k_i) = 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i - \sum_{i=1}^n k_i^2\theta = 0,$$

de donde

$$\hat{\theta}_{\text{MV}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i X_i}{\sum_{i=1}^n k_i^2}$$

ii) El estimador será insesgado si $\mathrm{E}(\hat{\theta}_{\text{MV}}) = \theta$.

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_{\text{MV}}) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n k_i X_i\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)}\sum_{i=1}^n k_i \mathrm{E}(X_i)$$

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_{\text{MV}}) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)}\sum_{i=1}^n k_i(k_i\theta) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)}\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)\theta = \theta$$

Por lo tanto, $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ es un estimador insesgado para θ. Para establecer las condiciones bajo las cuales el estimador $\hat{\theta}_{\text{MV}}$ es consistente, en caso de serlo, podemos verificar si se cumplen las dos condiciones suficientes siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}) = \theta$

b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}) = 0$

Como $\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}$ es un estimador insesgado de θ, la condición a) se cumple. Por otro lado, tenemos que

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n k_i X_i\right) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(k_i X_i)$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{MV}}) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^n k_i^2 \mathrm{Var}(X_i) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^n k_i^2\right)^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n k_i^2}$$

Por lo tanto, si $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n k_i^2 = +\infty$ se cumplirían las dos condiciones suficientes y, en consecuencia, $\hat{\theta}_{MV}$ sería un estimador consistente de θ.

Problema B

Queremos contrastar la hipótesis nula de que X es una v.a. discreta con función de cuantía $P_0(x)$ frente a la alternativa de que la función de cuantía es $P_1(x)$:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P_0(x)$	0	0	0.05	0.05	0.10	0.40	0.40
$P_1(x)$	0.20	0.20	0.10	0.10	0.40	0	0

Hemos tomado una m.a.s. de tamaño $n = 1$; es decir, observamos X.

i) ¿Incluirías los puntos $X = \{5, 6\}$ en la región crítica?

Dado que, bajo la distribución de probabilidad de la hipótesis alternativa $P_1(x)$, estos puntos tienen probabilidad cero, la v.a. no puede tomar esos valores bajo la hipótesis alternativa, pero sí bajo la hipótesis nula. Por tanto, $X = \{5, 6\}$ son puntos de no rechazo de H_0 y, por tanto, **nunca** deben incluirse en la región crítica.

ii) ¿Incluirías los puntos $X = \{0, 1\}$ en la región crítica?

Dado que, bajo la distribución de probabilidad de la hipótesis nula $P_0(x)$, estos puntos tienen probabilidad cero, la v.a. no puede tomar estos valores bajo la hipótesis nula. Por tanto, $X = \{0, 1\}$ son puntos de rechazo de H_0 y, por tanto, **siempre** deben incluirse en la región crítica.

iii) Al nivel de significación $\alpha = 0.10$ y **recordando lo respondido en los apartados anteriores**, tenemos que las posibles regiones críticas para este contraste son $\mathrm{RC}_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\mathrm{RC}_2 = \{0, 1, 4\}$. Esto se debe a que:

$$\alpha_1 = P(X \in \mathrm{RC}_1 | P_0) = P(X = 0, 1, 2, 3 | P_0) = 0 + 0 + 0.05 + 0.05 = 0.10 \leq \alpha = 0.10$$
$$\alpha_2 = P(X \in \mathrm{RC}_2 | P_0) = P(X = 0, 1, 4 | P_0) = 0 + 0 + 0.10 = 0.10 \leq \alpha = 0.10$$

Para ver cuál de estas dos regiones críticas es la más potente para este contraste, calculamos las respectivas potencias:

$$\text{Potencia}_1 = P(X \in \mathrm{RC}_1 | P_1) = P(X = 0, 1, 2, 3 | P_1) = 0.20 + 0.20 + 0.10 + 0.10 = 0.60$$
$$\text{Potencia}_2 = P(X \in \mathrm{RC}_2 | P_1) = P(X = 0, 1, 4 | P_1) = 0.20 + 0.20 + 0.40 = 0.80$$

De lo anterior, concluimos que, al nivel de significación $\alpha = 0.10$, la región crítica RC_2 es la más potente para este contraste.

Problema C

i) Sea $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ una m.a.s. de tamaño n tomada de una distribución $N(m, \sigma^2)$. Entonces:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$$

Intervalo de Confianza

$$P\left(\chi^2_{\overline{n-1}|1-\alpha/2} < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\overline{n-1}|\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{\overline{n-1}|\alpha/2}} < \frac{\sigma^2}{nS^2} < \frac{1}{\chi^2_{\overline{n-1}|1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{\overline{n-1}|\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{\overline{n-1}|1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza $1 - \alpha$ para la varianza es:

$$IC_{1-\alpha} = \left(\frac{ns^2}{\chi^2_{\overline{n-1}|\alpha/2}}, \frac{ns^2}{\chi^2_{\overline{n-1}|1-\alpha/2}}\right)$$

ii) En el caso de que $n = 30$ y $s^2 = 25$ el intervalo de confianza 95% será:

$$IC_{1-\alpha} = \left(\frac{750}{\chi^2_{\overline{n-1}|\alpha/2}}, \frac{750}{\chi^2_{\overline{n-1}|1-\alpha/2}}\right)$$

Dado que $\chi^2_{\overline{29}|0.05/2} = 45.7$ y $\chi^2_{\overline{29}|1-0.05/2} = 16$, entonces,

$$IC_{0.95} = (16.41, 46, 88)$$